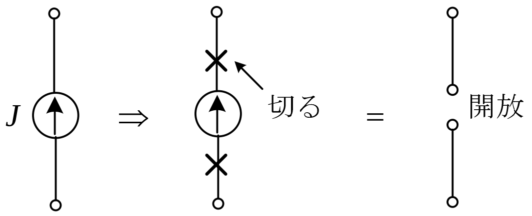
第12章　回路の諸定理

この章では，電気回路の問題を解くときによく利用される重ね合わせの理，テブナンの定理，ノートンの定理，供給電力最大の法則について学ぶ。

○　重ね合わせの理(superposition law)

電圧源や電流源が多く含まれる回路の解析を行う場合，全部の電源を一度に考えるのではなく，一つ一つの電源について解を求め，最後に加え合わせるという方法である。その際，注目している電源以外の電源は殺しておく必要があり，電圧源は短絡，電流源は開放する。

電圧＝0は短絡することで達成される。開放しても電圧は発生する。電池には，開放しても1.5Vが出ている。もちろん，図のように実際に短絡してはいけない。

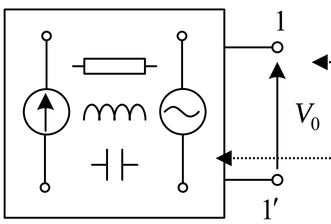


直流電流源と交流電流源は同じ記号である。J は一定の直流かフェーザ表示のいずれかである。本章は主として後者を考える。

電流＝0は開放して線を切る（実際にはしないこと）ことで達成される。短絡しても Jが流れる。

重（かさ）ね合わせの理（り）が使える回路は，定数の R,L,C,M から成る回路（**線形回路**）である。R,L,C,M の値が電圧や電流で変化する回路やダイオード・トランジスタを含む回路は非線形だから使えない。しかし，トランジスタ増幅回路では，動作点（どうさてん）の近傍（きんぼう）で線形回路とみなせるので使える。なお，電源は入力量だから直流と交流が混在してもよく，ひずみ波でも構わない。

○　テブナンの定理(Thévenin’s law)（等価電圧源定理ともいう）



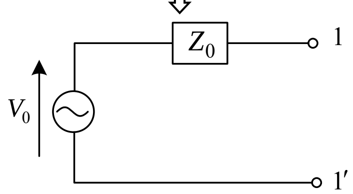
端子$1-1'$：開放されている（何もつながっていない）。

V_0：**開放電圧**

回路網：電圧源や電流源，R,L,C,M より成る。

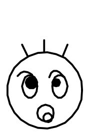
線形回路であればどんな回路でもよい。

⇩

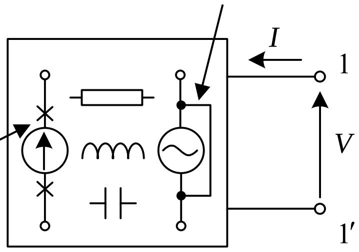


端子$1-1'$より回路網を見たときの等価回路は左図のように書ける。V_0は開放電圧だよ。

へえ！こんなに簡単な回路で書けるんだ！



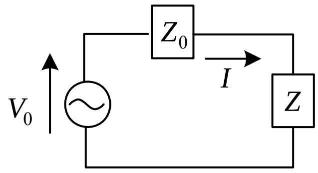
Z_0の求め方を図に示す。　　　全ての電圧源を短絡（導線で置き換える）



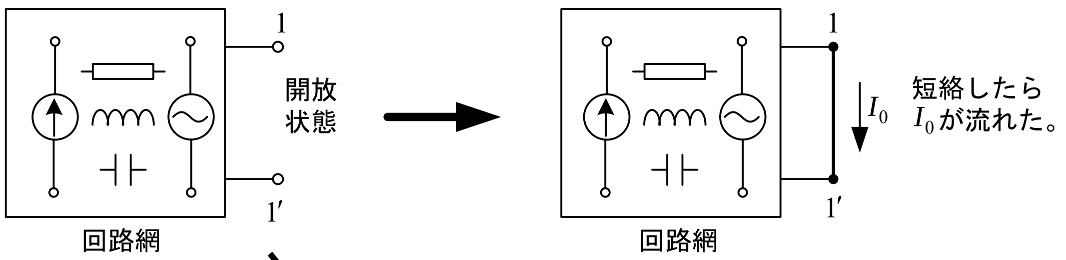
$$Z_0 = \frac{V}{I}$$ ：全ての電源を殺し，$1-1'$ より見たインピーダンスが Z_0

全ての電流源を開放
（回路から省く）

$1-1'$ にインピーダンス Z をつないだ時，流れる電流 I は，$I = V_0/(Z_0+Z)$ となる。これを**テブナンの定理**という。テブナンの定理の本質は“どんな複雑な回路も，電圧源と**内部インピーダンス** Z_0 の直列回路として表現できる”と言っている点にある。

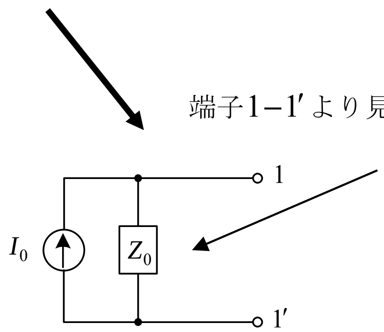


○　ノートンの定理(Norton’s theorem) （等価電流源定理ともいう）



端子$1-1'$より見た等価回路は下図のように表せる。

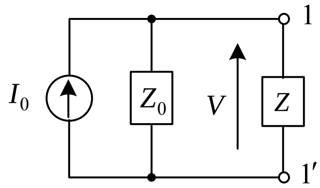
I_0 ：短絡電流



今度はZ_0が並列につながっている。
内部インピーダンスZ_0はテブナンの定理と同じであり，同様に求める。

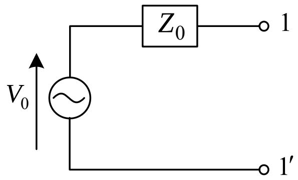
$1-1'$ にインピーダンス Z をつないだ時，端子$1-1'$の電圧は，

$$V = \frac{I_0 Z_0 Z}{Z_0 + Z} = \frac{I_0}{Y_0 + Y} \quad 但し，\ Y_0 \equiv 1/Z_0 \quad , \quad Y \equiv 1/Z$$



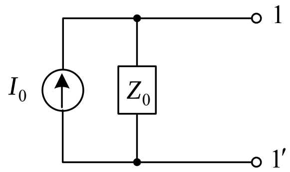
普通，この式を**ノートンの定理**という。ノートンの定理の本質は，
“ある端子について，どんな複雑な回路も，電流源と内部インピーダンスZ_0（または内部アドミタンスY_0）の並列回路として表現できる”と言っている点にある。

次の 2 つの回路は$V_0 = Z_0 I_0$が成立するとき，等価である。



(a)

等価
⇔

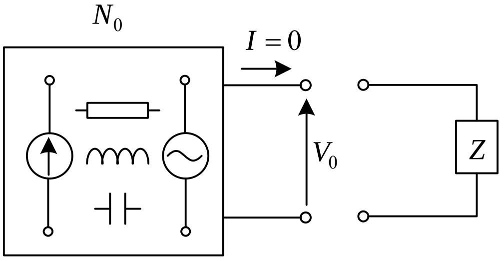


(b)

(a) の 1,1’を開放している時，1,1’にはV_0が発生する。(b)が等価となるためには，開放しているときV_0が発生しないといけないので，(b)より$V_0 = Z_0 I_0$でなくてはならぬ。

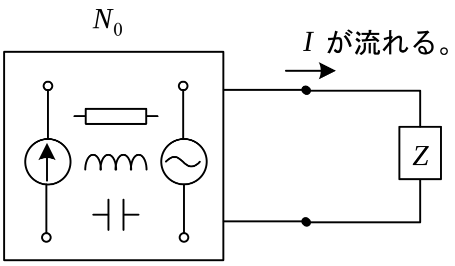
テブナンの定理を重ね合わせの理より証明しよう。

※

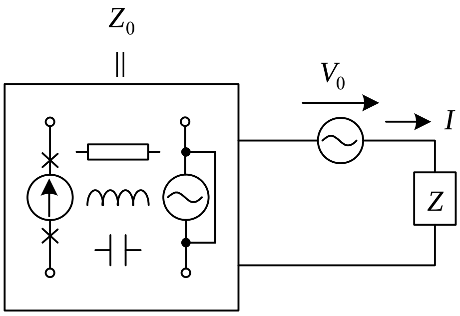


N_0：電源を含んだ回路
V_0：開放電圧
Z：インピーダンス（負荷）

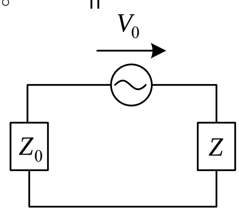
⇓ 接続する。



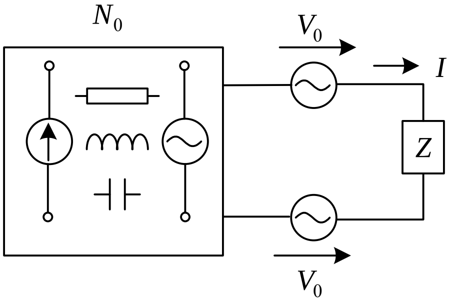
※※ ⇒



電源を殺している。 ‖

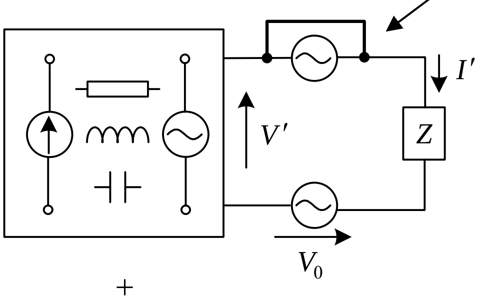


‖等価 これが成立することがテブナンの定理



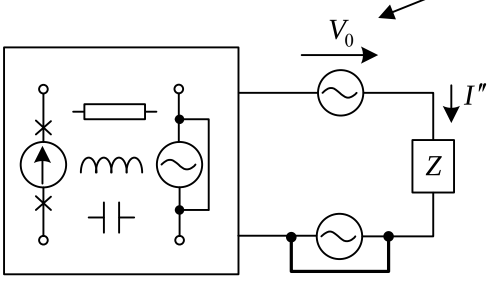
上下のV_0は打ち消しあい，
無いのと同じである。

‖ 重ね合わせの理



これのみ殺す。
V', I'を求める。$V'=V_0$, $I'=0$とすると，
V'と下の電源V_0が打ち消し合い，Zには電圧がかからない。よって，$I'=0$となり，1,1'を開放した最初の回路（※）の状態と同じで矛盾を生じない。故に，
$V'=V_0$, $I'=0$

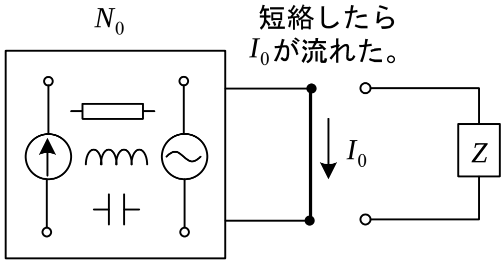
＋



これのみ生かす。
Zに流れるを電流I''とする。
重ね合わせの理より，$I=I'+I''$
$I'=0$より，$I''=I$である。
左の回路はテブナンの定理で証明したい回路（※※）になっている。

ノートンの定理を重ね合わせの理より証明しよう。

※

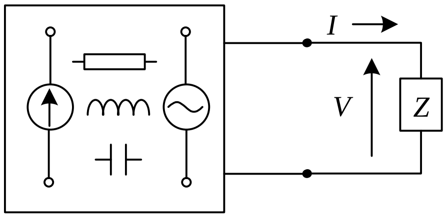


N_0 ：電源を含んだ回路

I_0 ：短絡電流

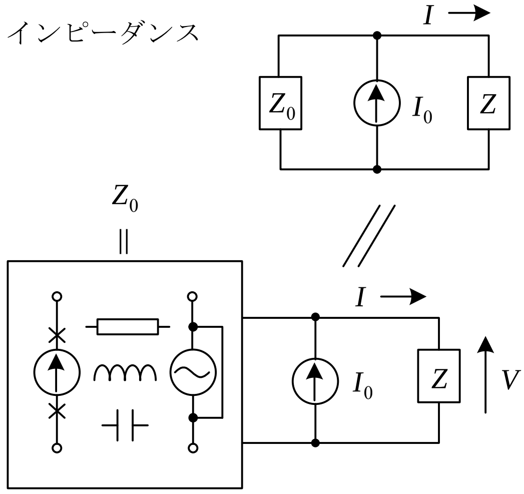
Z ：インピーダンス

⇓ Z を接続する！



⇒

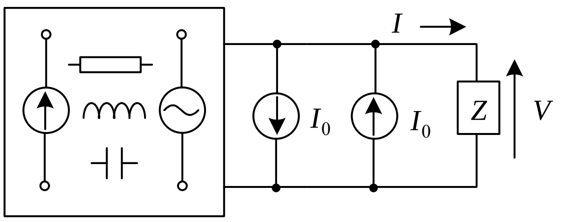
※※



‖ 等価

これが成立する

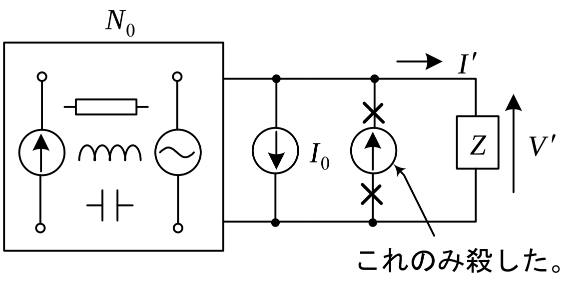
ことがノートンの定理



上向きの I_0 と下向きの I_0 は

打ち消しあい，無いのと同じ。

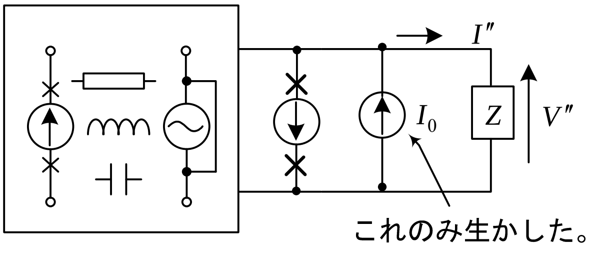
‖ 等価（重ね合わせの理）



I' を求める。$I'=0$ とすると $V'=0$ となり，N_0 より短絡電流 I_0 が流れ，これが電流源 I_0 を通って流れると考えると，※の状態と同じであり，矛盾を生じない。よって，$I'=0$

＋

，



重ね合わせの理より

$I = I' + I''$

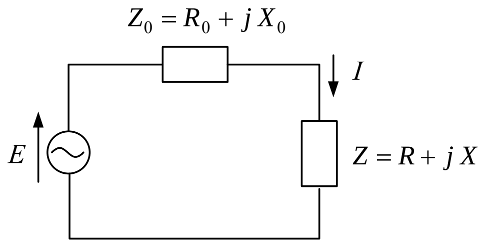
$I' = 0$ より，$I'' = I$

$V'' = ZI'' = ZI = V$

左図の回路は※※と等しく，ノートンの定理が成り立つ。

○　供給電力最大の法則 (maximum power-transfer theorem)

図の回路で，R で消費される電力が最大となるにはどのような条件が成立するか考えよう。



E ：電源電圧（一定）

$Z_0 = R_0 + jX_0$ ：電源の内部インピーダンス（一定）

$Z = R + jX$ ：可変インピーダンス

R で消費される電力を P とすると，

$$P = R|I|^2 = R \cdot \frac{|E|^2}{(R_0+R)^2 + (X_0+X)^2} = \frac{|E|^2}{\dfrac{R_0^2 + (X_0+X)^2}{R} + 2R_0 + R}$$

$$I = \frac{E}{R_0 + R + j(X_0+X)}$$

$$\therefore\ |I| = \frac{|E|}{|R_0 + R + j(X_0+X)|} = \frac{|E|}{\sqrt{(R_0+R)^2 + (X_0+X)^2}}$$

（**A**） R , X 両者可変の場合

電力 P が最大となる条件は次式で与えられる。これを**整合**(impedance matching) という。

$$X = -X_0,\quad R = R_0 \qquad すなわち，\qquad Z = \bar{Z}_0 \qquad (12\text{-}1)$$

まず，X を考えよ。整合しているとき，電源側と負荷側で消費される電力は等しい。

（**B**） R だけが可変の場合

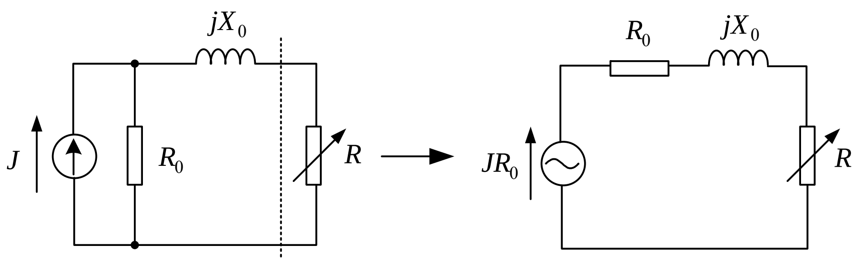
電力 P が最大となる条件は分母を R で微分して 0 とおくことにより次式で与えられる。

$$R = \sqrt{R_0^2 + (X_0+X)^2} \qquad (12\text{-}2)$$

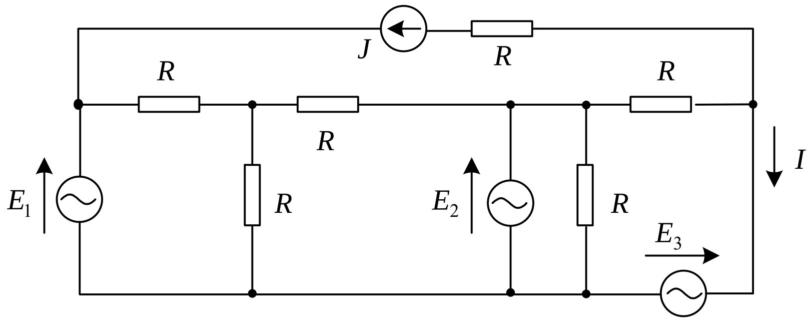
jX を電源のインピーダンスに含めて考えると，負荷 R と電源側のインピーダンスの絶対値が等しいとき電源から最大の電力を引き出すことができる。

上記の定理は，非常に応用範囲が広い。何故なら，どんな複雑な回路でもテブナンの定理を使うと，Z_0, E の直列回路で表現できるからである。

（例）（**B**）の応用例として，　$R = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = |Z_0|$　のとき，電力は最大となる。

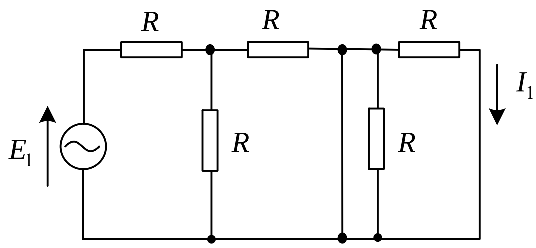


例題１　図の回路において重ね合わせの理を用いて電流Iを求めよ。



（解） E_1に着目すると， J 開放， E_2, E_3を短絡して図の回路が得られる。
導線と並列にある抵抗には電流が流れないから，

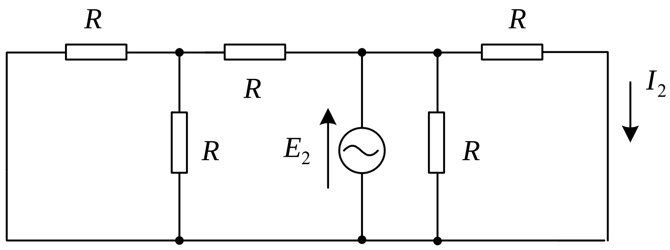
$$I_1 = 0$$



E_2に着目すると，

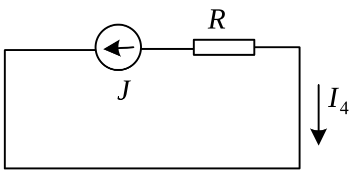
$$I_2 = \frac{E_2}{R}$$

左側の回路はI_2関係しない。



同様に， E_3に着目して　　$I_3 = -\dfrac{E_3}{R}$

Jに着目すると， E_1, E_3を短絡した回路に電流が流れて

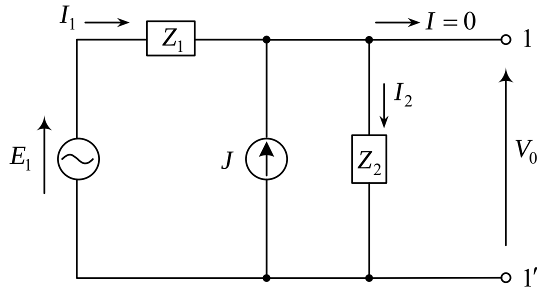


$$I_4 = -J$$

重ね合わせの理より

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{E_2}{R} - \frac{E_3}{R} - J$$

例題２　図の回路で，$1-1'$は開放状態にある。端子$1-1'$より見た等価回路をテブナンの定理より求めよ。また，$1-1'$にインピーダンスZをつないだ時の電流を求めよ。



（解）まず，開放電圧V_0を求める。I_1, I_2を図のように定義すると，

$$J + I_1 = I_2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$E_1 = Z_1 I_1 + V_0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$V_0 = Z_2 I_2 \qquad \cdots\cdots ③$$

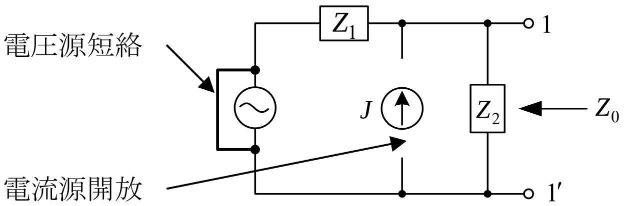
③を①に代入して，

$$I_1 = \frac{V_0}{Z_2} - J$$

②より，$V_0 = E_1 - Z_1 I_1 = E_1 - \dfrac{Z_1}{Z_2} V_0 + J Z_1$

$$\therefore V_0 = \frac{E_1 + J Z_1}{1 + Z_1/Z_2} \qquad \cdots\cdots ④$$

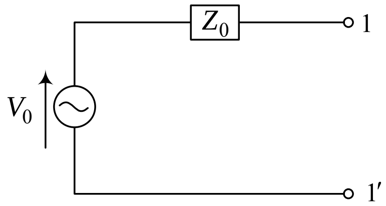
次に，$1-1'$より見たインピーダンスZ_0を求める。



図より，

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

従って，等価回路は次のように書ける。V_0, Z_0は④，⑤で与えられる。

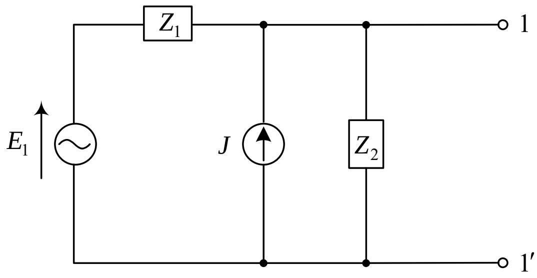


$1-1'$にZをつないだ時の電流Iは

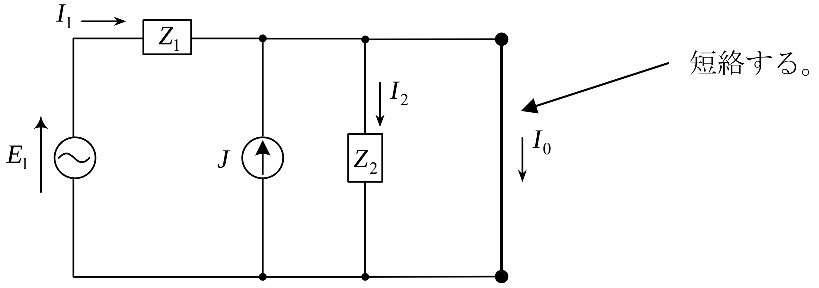
$$I = \frac{V_0}{Z_0 + Z}$$

$$= \frac{Z_2 (E_1 + J\, Z_1)}{Z_1 Z_2 + Z(Z_1 + Z_2)}$$

例題３　図の回路で，端子$1-1'$より見た等価回路をノートンの定理より求めよ。$1-1'$は開放状態にある。また，$1-1'$にインピーダンスZの負荷をつないだとき，流れる電流を求めよ。

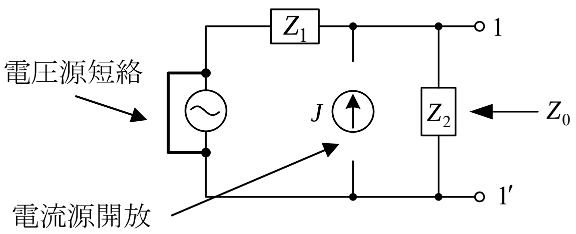


（解）まず，短絡電流I_0を求める。



図より，$I_2 = 0$　，$I_1 = \dfrac{E_1}{Z_1}$　　$\therefore I_0 = J + \dfrac{E_1}{Z_1}$　　・・・・・①

次に，$1-1'$より見たインピーダンスZ_0を求める。

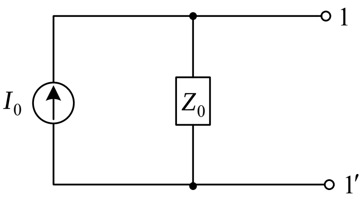


$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \cdots ②$$

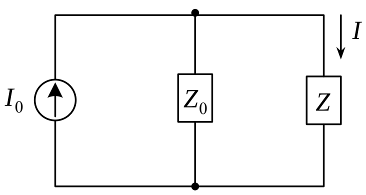
よって，$1-1'$より見た等価回路は(A)のように書ける。I_0, Z_0は①，②である。

また，$1-1'$にZをつないだ時の電流Iは等価回路(B)より求まる。

$$I = \frac{Z_0}{Z_0 + Z} I_0 = \frac{Z_2(E_1 + J Z_1)}{Z_1 Z_2 + Z(Z_1 + Z_2)} \quad \cdots ③$$



(A)



(B)

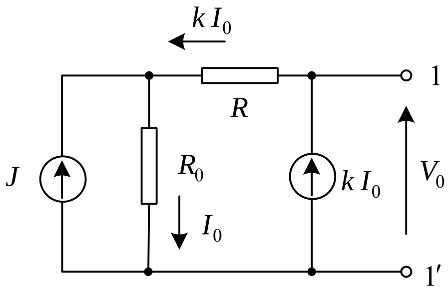
＊　例題２の結果と一致している。

例題 4　図の回路で 1,1’よりみた等価電圧源の回路をテブナンの定理より求めよ。1,1’は開放状態にある。図で，kI_0 が流れる電流源は R_0 に流れる電流 I_0 に比例して電流が変化する。

(解)

まず，開放電圧 V_0 を求める。

図より，R に流れる電流は kI_0 だから



$$V_0 = R_0 I_0 + R k I_0 \qquad ①$$

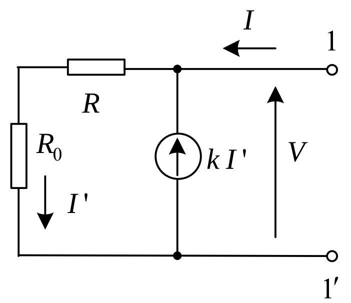
$$J + k I_0 = I_0 \qquad ②$$

①，②より

$$V_0 = \frac{R_0 + kR}{1-k} J$$

次に，1,1’よりみたインピーダンスを求める。このとき電流源 J を開放して

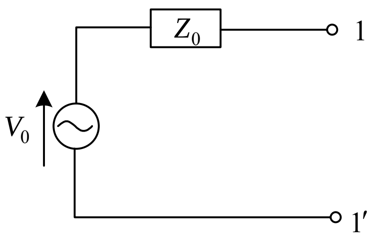
$I + kI' = I'$，$V = (R + R_0)I'$　より



$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{V}{(1-k)I'} = \frac{R + R_0}{1-k}$$

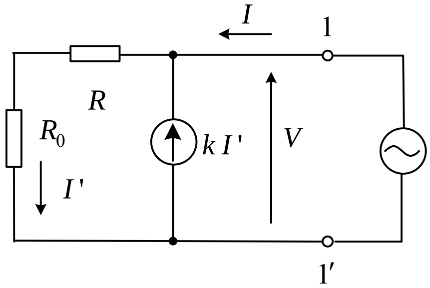
を得る。

よって，次の等価回路が得られる。

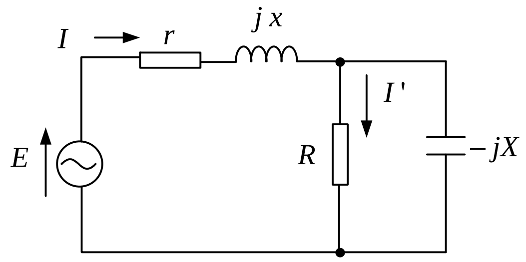


＊最初の回路の 1,1’にインピーダンス Z をつないで流れる電流を求め，等価回路の場合と比べよ。

(注意)　1,1’よりみたインピーダンス Z_0 を求める場合，kI' の電流源を開放しないこと。図のように交流電源を 1,1’の右側にあるものとしてインピーダンスを求めるとよい。なお，上記のようにある枝の電流に比例する電流源はトランジスタの回路で見られる。



例題５　図の回路で，R で消費される電力が最大となるように R の値を定めよ。



（解）図のように，I, I' をとると，分流の公式より

$$I' = \overbrace{\boxed{\dfrac{E}{r + jx + \dfrac{-jRX}{R - jX}}}}^{I}\dfrac{-jX}{R - jX} = \dfrac{-jXE}{(r + jx)(R - jX) - jRX} = \dfrac{-jXE}{rR + xX + j(xR - rX - RX)}$$

$$|I'| = \dfrac{X|E|}{\sqrt{(rR + xX)^2 + (xR - rX - RX)^2}}$$

R で消費される電力を P とすると，

$$P = R|I'|^2 = \dfrac{RX^2|E|^2}{(rR + xX)^2 + (xR - rX - RX)^2}$$

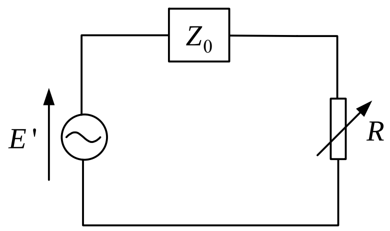
$$= \dfrac{RX^2|E|^2}{R^2(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) + 2RrX^2 + X^2(x^2 + r^2)}$$

$$= \dfrac{X^2|E|^2}{R(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) + 2rX^2 + X^2(x^2 + r^2)/R}$$

従って，$R(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) = \dfrac{X^2(x^2 + r^2)}{R}$ 　のとき，P は最大となる。

$$\therefore R = X\sqrt{\dfrac{r^2 + x^2}{r^2 + (x - X)^2}}$$

（別解）テブナンの定理より R の両端から他の回路をみた等価回路を求める。



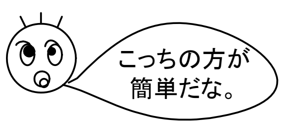
供給電力最大の法則より

$$Z_0 = \dfrac{-(r + jx)jX}{r + j(x - X)}$$

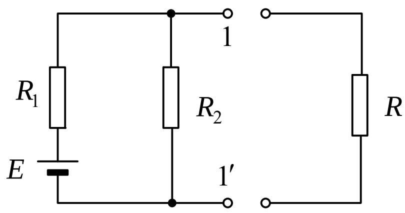
$$R = |Z_0| = \dfrac{|r + jx|X}{|r + j(x - X)|} = \dfrac{X\sqrt{r^2 + x^2}}{\sqrt{r^2 + (x - X)^2}}$$

とき P は最大となる。

（E' の計算はこの場合不要）



問題１　図の回路で，R をつなぐとき，R に流れる電流をテブナンの定理より求めよ。

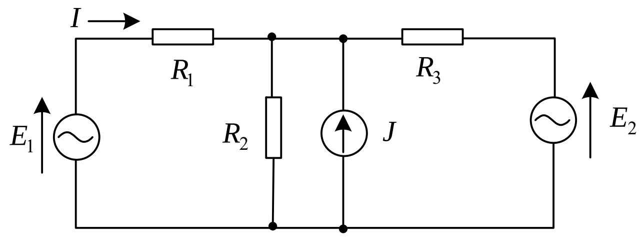


（答）$1,1'$ 間の開放電圧　$V_0 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

$1,1'$ から見た抵抗 R_0　$R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

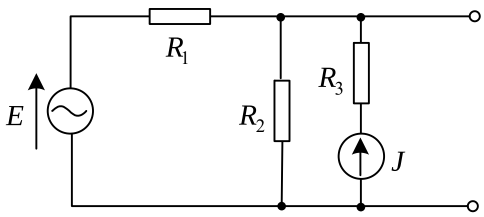
求める電流　$I = \dfrac{V_0}{R_0 + R} = \dfrac{R_2 E}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$

問題２　重ね合わせの理を用いて，図の回路の電流 I を求めよ。但し，交流電圧源，交流電流源は同じ周波数で，それらのフェーザを図中に示している。$R_1 = R_2 = R_3 = R$ とする。また，R_1 で消費される電力 P を求めよ。

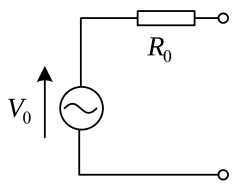


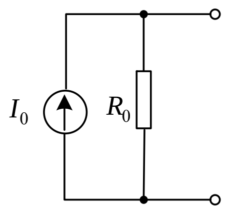
（答）$I = \dfrac{2E_1}{3R} - \dfrac{E_2}{3R} - \dfrac{J}{3}$　，　$P = R(\dfrac{2E_1}{3R} - \dfrac{E_2}{3R} - \dfrac{J}{3})^2$　（各回路の電力の和でない）

問題３　図の回路と等価な電源(電圧源及び電流源)を求めよ。但し，交流電圧源，交流電流源は同じ周波数で，E, J はそれらのフェーザである。



（答）　等価電圧源　等価電流源

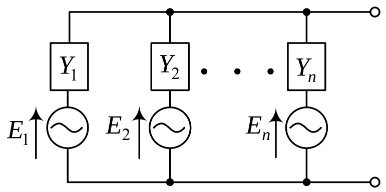




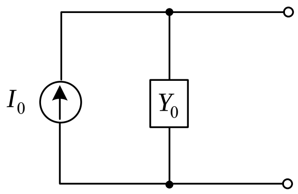
$R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$　$V_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} J + \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$　　$I_0 = J + \dfrac{E}{R_1}$

＊　電流源と直列の抵抗，電圧源と並列の抵抗は等価電源には含まれないことが判る。

問題４　図の回路と等価な電源を求めよ。但し，交流電圧源は全て同じ周波数で，それらのフェーザを図中に示している。また，Y はアドミタンスを表す。

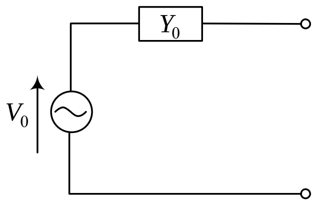


（答）ノートンの定理より



$$Y_0 = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$
$$I_0 = Y_1 E_1 + Y_2 E_2 + \cdots + Y_n E_n$$

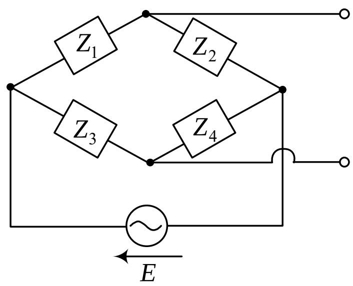
テブナンの定理より



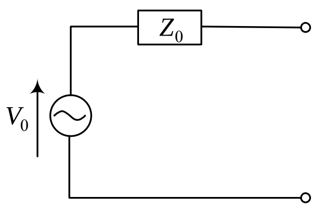
$$V_0 = I_0 / Y_0$$

（帆足-Millman の定理と呼ばれる）

問題５　図の回路と等価な電圧源による回路を求めよ。



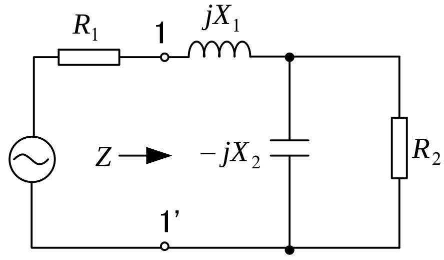
（答）



$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}$$
$$V_0 = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} E$$

問題６　図の回路で，R_2 で消費される電力が最大となる X_1, X_2 の値を求めよ。ただし，$R_1 < R_2$ とする。X_1, X_2 のみ可変である。

（電源から R_2 に最大の電力が伝えられるような $jX_1, -jX_2$ の回路を**整合回路**という。整合していれば R_2 から左を見たｲﾝﾋﾟｰﾀﾞﾝｽも R_2）



（答）1,1’から右を見たインピーダンス Z の実部と虚部が X_1, X_2 によって変えられるから，供給電力最大の法則（A）を適用する。$Z = \bar{Z}_0$　$(Z_0 = R_1)$ より

$$j X_1 + \frac{-jX_2 R_2}{R_2 - jX_2} = R_1 \quad \therefore \quad (R_1 - jX_1)(R_2 - jX_2) = -jX_2 R_2$$

実部と虚部を等しいとおいて　$X_1 = \sqrt{R_1(R_2 - R_1)}$　，$X_2 = R_2 \sqrt{R_1/(R_2 - R_1)}$