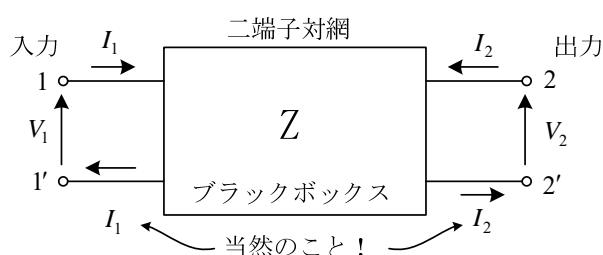


第 13章 二端子対網

二端子対(two terminal pair)とは、入力端子対(1,1')と出力端子対(2,2')のことである。回路をまとめたシステムとしてとらえて、入力(input)側と出力(output)側の関係を表す。電力や信号を送るとき使われる理論である。

○ インピーダンス行列 (Z 行列 impedance matrix)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

|| || ||
V Z I

通常, $z_{12} = z_{21}$ である。

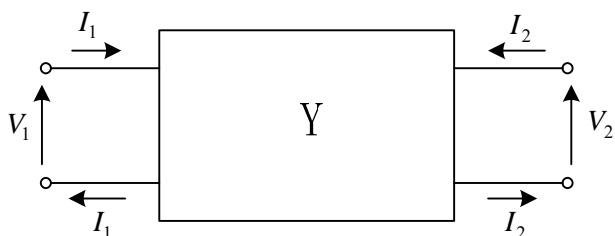
(注) V_1, I_1, V_2, I_2 の矢印は必ず,

図の方向に定義すること。

(Y行列も同様)

入力側に交流電源, 出力側に負荷をつなぐと
考えよう。二端子対網には電源は含まない。
にたんしつのもう

○ アドミタンス行列 (Y 行列)



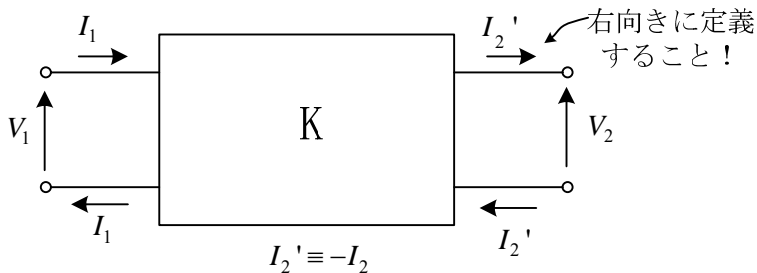
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

|| || ||
I Y V

通常, $y_{12} = y_{21}$ である。

$Y = Z^{-1}$ (逆行列) である。 Z, Y は常に存在するとは限らない。

○ 縦続行列 (K 行列, F 行列 cascade matrix)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2' \end{bmatrix}$$

||
K

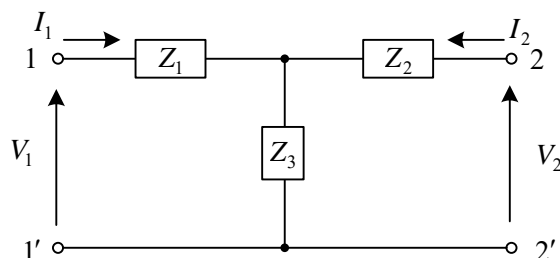
(注) V_1, I_1, V_2, I_2' の矢印は必ず, 図の向きに定義すること。

A, B, C, D を四端子定数という。通常, $AD - BC = 1$ ($|K| = 1$) が成立する。

Z, Y, K 行列の求め方には2つの方法がある。

- ① V_1, I_1, V_2, I_2 (または I_2') を図のように定義し、回路の式を上記の形に整理する方法。
- ② $I_1 = 0$ (開放), $V_1 = 0$ (短絡) など、特殊な場合を考えることにより求める方法。

図の回路のインピーダンス行列を求めてみよう。



このように書いても、 $1, 1'$ と $2, 2'$ は開放されている訳ではない。電源があるかも知れないし、負荷があるかも知れない。原因はともかくとして、 V_1, V_2, I_1, I_2 が生じていると仮定して求める。

図の様に V_1, V_2, I_1, I_2 を必ず矢印の向きに定義する。インピーダンス行列は次式で定義されている。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (13-1)$$

方法① とにかく式を立てて、(13-1)の形にする方法

$$\text{図より, } V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2)$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{インピーダンス行列は, } Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

方法② 特殊な条件から求める方法

(13-1)で、 $I_2 = 0$ の場合を考える。 $I_2 = 0$ は、 $2, 2'$ を開放することを意味する。

このとき、図より

$$V_1 = (Z_1 + Z_3) I_1, \quad V_2 = Z_3 I_1$$

$$\therefore z_{11} = Z_1 + Z_3, \quad z_{21} = Z_3$$

次に、 $I_1 = 0$ ($1, 1'$ 開放) を考える。図より、

$$V_1 = Z_3 I_2, \quad V_2 = (Z_2 + Z_3) I_2$$

$$\therefore z_{12} = Z_3, \quad z_{22} = Z_2 + Z_3$$

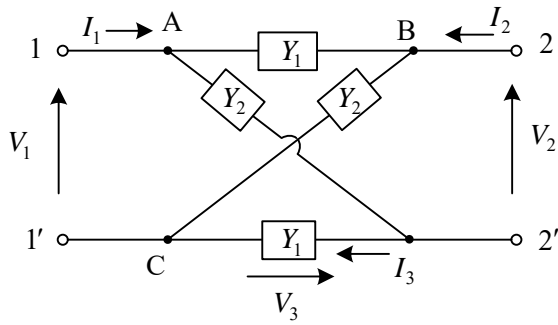
$Z_2 I_2 = 0$ となるから
 Z_2 の電圧は 0。

(注) Z 行列を求めるときは、 $I_2 = 0$ 及び、 $I_1 = 0$ の場合を考えればよい。

$V_1 = 0$ ($1, 1'$ を短絡) としても、 $z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = 0$ だから、 z_{11} と z_{12} が決められない。

* 抵抗、コイル、コンデンサ、変成器、理想変成器からなる二端子対網は、**相反性の条件** (相反定理) を満足し、 $z_{12} = z_{21}$, $y_{12} = y_{21}$, $AD - BC = 1$ が成立する。

例題1 図の回路のY行列を求めよ。 Y_1, Y_2 はアドミタンスである。



(解)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{より,}$$

$$V_2 = 0 \text{ のとき, } I_1 = y_{11}V_1, I_2 = y_{21}V_1$$

$$V_1 = 0 \text{ のとき, } I_1 = y_{12}V_2, I_2 = y_{22}V_2$$

まず、2, 2' を短絡し、 $V_2 = 0$ の状態を考える。1, 1'間で見ると Y_1, Y_2 の並列回路が直列につながっているから、全体のアドミタンスは $(Y_1 + Y_2)/2$ となり

$$I_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_1 \quad \text{より}$$

$$\therefore y_{11} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

また、 Y_1, Y_2 には $\frac{V_1}{2}$ の電圧が

加わるので、節点Bで考えると、

キルヒホッフの電流則より

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -Y_1 \frac{V_1}{2} + Y_2 \frac{V_1}{2} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_1$$

$$\therefore y_{21} = \frac{Y_2 - Y_1}{2}$$

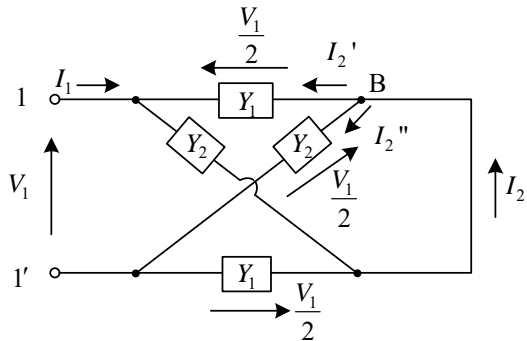
次に、1, 1'を短絡して $V_1 = 0$ の状態を考える。

$$I_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_2 \quad \text{より}$$

$$\therefore y_{22} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

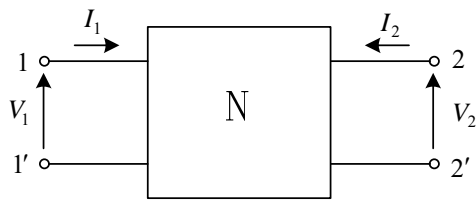
また、 $I_1 = -Y_1 \frac{V_2}{2} + Y_2 \frac{V_2}{2} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_2$

$$\therefore y_{12} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)$$

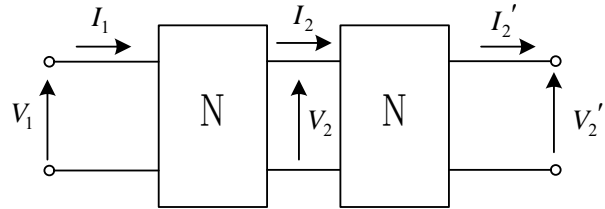


例題2 NのK行列 $K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ が既知のとき以下の問いに答えよ。

- (1) Nのインピーダンス行列ZをKで表せ。
- (2) 2,2'を入力側, 1,1'を出力側と考えたとき, NのK行列K'を求めよ。
- (3) (b) 図のように, Nを接続したとき, 全体の回路のK行列K'を求めよ。



(a)



(b)

(解) (1) 題意より, 電圧, 電流を図のように定義すると

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad I_1 = CV_2 - DI_2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より V_2 を求めると, $V_2 = I_1/C + (D/C)I_2$

①に代入して, $V_1 = A(I_1/C + (D/C)I_2) - BI_2$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A/C & (AD/C) - B \\ 1/C & D/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{故に, } Z = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & | & K \\ 1 & & D \end{bmatrix} \quad |K|=1$$

(2) ②より, $I_2 = -\frac{I_1}{D} + \frac{C}{D}V_2$ ①に代入 $V_2 = \frac{V_1}{A} + \frac{B}{A}(-\frac{I_1}{D} + \frac{C}{D}V_2)$

$$\therefore V_2 = \frac{1}{1 - BC/(AD)} \left(\frac{V_1}{A} - \frac{B}{AD}I_1 \right) = \frac{1}{AD - BC} (DV_1 - BI_1)$$

$$I_2 = -\frac{I_1}{D} + \frac{1}{AD - BC} (CV_1 - \frac{CB}{D}I_1) = \frac{1}{AD - BC} (CV_1 - AI_1)$$

$AD - BC = 1$ であるから

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad \text{よって, } K' = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad \leftarrow A \text{ と } D \text{ を交換した式となる。}$$

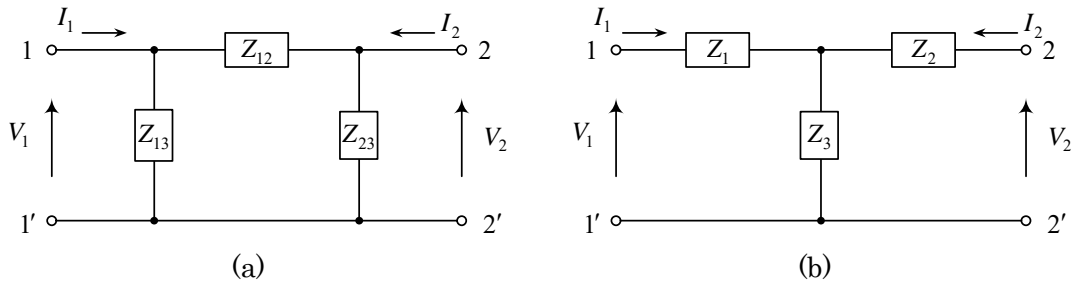
出力側は出る向きに定義するのが約束だから, -が必要

* 対称回路では $A = D$ が成り立つ (入出力どちらから見ても同じ回路)。

(3)
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = K^2 \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix}$$

従って,
$$K' = K^2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + CD & CB + D^2 \end{bmatrix}$$

例題3 (a)図の^{でるた}△形回路と(b)図のY形回路が等価であるための条件を求めよ。



(注)1'と2'をまとめて1つの点3とし、三端子について(a)を(b)に直して計算することが多い。

(解) (a),(b)のZ行列が等しい条件より求める。Z行列の定義より、

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

まず、2,2'を開放し、 $I_2 = 0$ の場合を考える。

$$\text{(a)図より、} V_1 = \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_1 = z_{11}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$V_2 = \frac{Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_1 \cdot Z_{23} = z_{21}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\text{(b)図より、} V_1 = (Z_1 + Z_3)I_1 = z_{11}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

$$V_2 = Z_3I_1 = z_{21}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{6}$$

次に、1,1'を開放し $I_1 = 0$ の場合を考える。

一般に、 $z_{12} = z_{21}$ であるから、 z_{22} だけを求めればよい。

$$\text{(a)図より、} V_2 = \frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{13})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_2 = z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

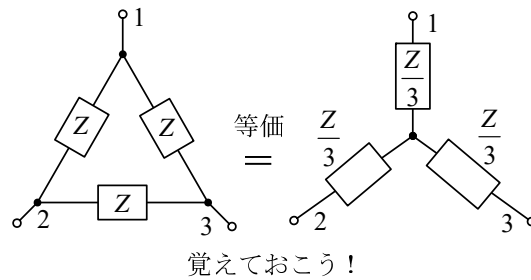
$$\text{(b)図より、} V_2 = (Z_2 + Z_3)I_2 = z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{8}$$

④と⑥、③と⑤、⑦と⑧を比較して、

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-2)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-3)$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-4)$$



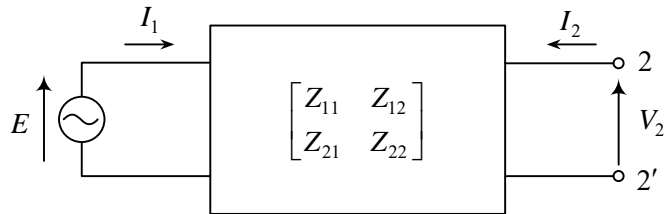
Y形にするとR, Lは1/3, Cは3倍になる。

* △形回路とY形回路の変換を**Y-△変換**(star-delta transformation)という。逆に、

$$Y_{13} = \frac{Y_1Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, Y_{23} = \frac{Y_2Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, Y_{12} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (13-5)$$

$$\text{但し、} Y_{13} = \frac{1}{Z_{13}}, Y_{23} = \frac{1}{Z_{23}}, Y_{12} = \frac{1}{Z_{12}}, Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

例題4 図の回路でインピーダンス行列が既知のとき、2,2'の端子から見た等価電圧源を求めよ。



(解) 図のように、 I_1, I_2, V_2 を定義すると、

$$E = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

テブナンの定理を適用する。まず、開放電圧を求めるために上式で $I_2 = 0$ とおくと、

$$E = z_{11}I_1, \quad V_2 = z_{21}I_1 \quad \therefore V_2 = \frac{z_{21}E}{z_{11}} \equiv E_0 \quad \text{とおく。}$$

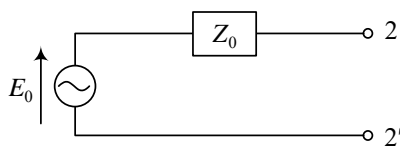
次に、2,2'端子から見たインピーダンスを求める。電源は殺す必要があるから、 E は短絡する。よって、 $\textcircled{1}$ で $E = 0$ とおけばよい。

$$\text{従って、} \quad 0 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \therefore I_1 = -\frac{z_{12}}{z_{11}}I_2$$

$$\textcircled{2} \text{に代入して、} \quad V_2 = \left(z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}} \right) I_2$$

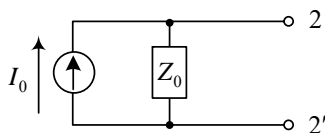
$$\therefore \frac{V_2}{I_2} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}}{z_{11}} \equiv Z_0 \quad \text{とおく。}$$

よって、等価電圧源は



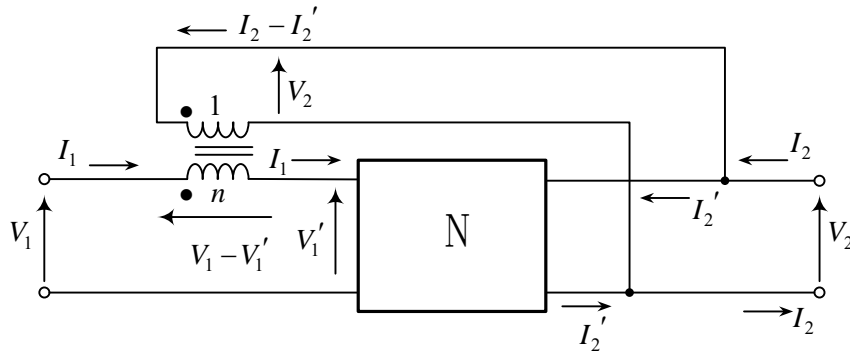
* 等価電流源はノートンの定理を用いる。 Z_0 の求め方は同じ。

短絡電流は I_0 は $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ で、 $V_2 = 0$ とおいて、 I_2 を求めて、 $I_0 = -I_2$ とする。



$$I_0 = \frac{z_{21}E}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \quad \text{となる。}$$

例題5 Nのインピーダンス行列が既知のとき、全体の二端子対網のインピーダンス行列を求めよ。



(解) 図のように、電圧、電流を定義する。

図より、理想変成器に関し、

$$V_1 - V_1' : V_2 = n : 1 \quad (\text{密結合の条件}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$nI_1 + I_2 - I_2' = 0 \quad (\text{励磁電流0の条件}) \quad \dots \textcircled{2}$$

題意より、
$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix}$$
 と書ける。 $\dots \textcircled{3}$

②を③へ代入して、

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}(nI_1 + I_2) \quad \dots \textcircled{4}$$

①, ③より

$$\begin{aligned} V_1 - nV_2 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2) \\ \therefore V_1 &= nZ_{21}I_1 + nZ_{22}(nI_1 + I_2) + Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2) \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④, ⑤より

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} + n(Z_{21} + Z_{12}) + n^2Z_{22} & Z_{12} + nZ_{22} \\ Z_{21} + nZ_{22} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

諸行列間の関係を以下に示しておく。

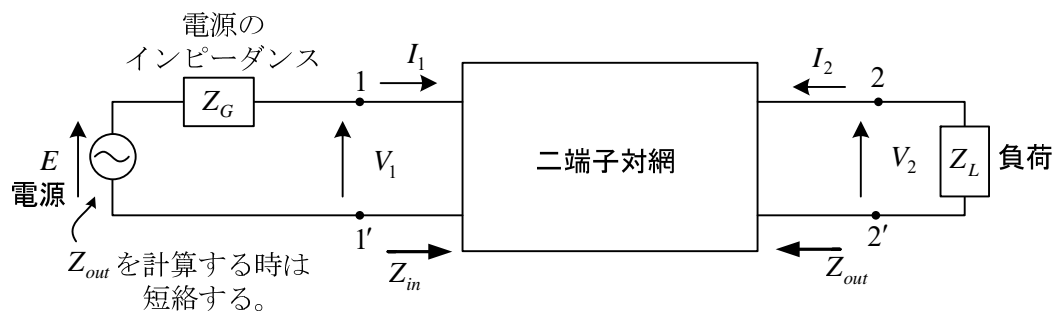
$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & |K| \\ 1 & D \end{bmatrix} \quad (13-6)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -|K| \\ -1 & A \end{bmatrix} \quad (13-7)$$

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & |Z| \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{-1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ |Y| & y_{11} \end{bmatrix} \quad (13-8)$$

○ 二端子対網の伝送的性質

図の二端子対網を含む回路で、**入力インピーダンス**(input impedance)と**出力インピーダンス**(output impedance)は、次式で求められる。但し、出力インピーダンスを求める際、電源は殺す必要がある。従って、テブナンの定理の場合のように電圧源は短絡する。



$$\text{入力インピーダンス} \quad Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} \quad (13-9)$$

$$\text{出力インピーダンス} \quad Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} \quad (13-10)$$

二端子対網の入力電圧 V_1 と出力電圧 V_2 の比を用いて、**伝達量 θ** を次式で定義する。**伝達量 θ** は二端子対網で決まり電源のインピーダンスや負荷は関係ない（電源の周波数は関係する）。

$$\theta \equiv \log \frac{V_1}{V_2} = \log_e \left| \frac{V_1}{V_2} \right| + j \arg \left(\frac{V_1}{V_2} \right) \quad (13-11)$$

$\alpha' = \log_e |V_1/V_2|$ は**減衰量**と呼ばれ単位はネーパ [Np]、 $\beta = \arg(V_1/V_2)$ は**位相量**と呼ばれ単位はラジアン [rad] である。通常、デシベル [dB] 表示した次式の減衰量 α が用いられる。

$$\alpha \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad [\text{dB}] \quad (13-12)$$

$|V_1| = |V_2|$ なら $\alpha = 0$ [dB]、 $\alpha > 0$ なら減衰、 $\alpha < 0$ なら増幅している。位相量は、入出力電圧の位相差 $\beta = \arg V_1 - \arg V_2$ を表わす。減衰量や位相量は二端子対網に含まれる回路素子のインピーダンスによって決まる。従って電源または信号の周波数の関数となる。**フィルタ**の設計は減衰量や位相量を用いて行われる。

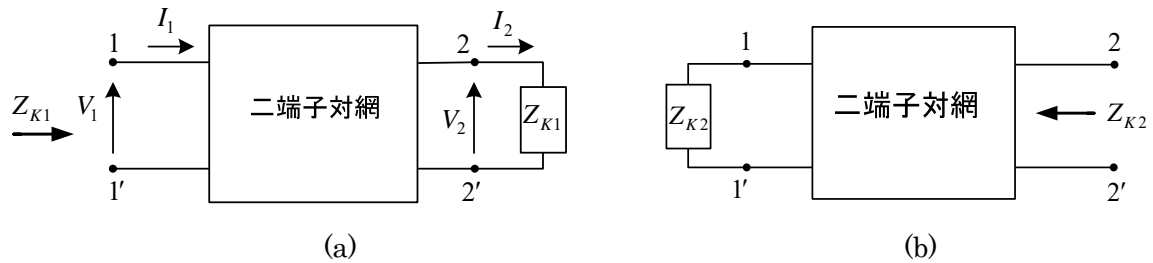
なお、電子回路や自動制御では、**伝達関数** $G = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{出力}}{\text{入力}}$ を定義して、

$$\text{利得 (ゲイン)} \quad g \equiv 20 \log_{10} |V_2/V_1| \quad [\text{dB}] \quad (13-13)$$

$$\text{位相} \quad \arg G = \arg(V_2/V_1) \quad [\text{rad}] \quad (13-14)$$

を考える。つまり、減衰ではなくて**増幅**の立場から見るのが一般的である。

反復パラメータ（反復インピーダンス(iterative impedance) Z_{K1}, Z_{K2} ，反復伝達量 θ_K ）について述べる。図(a)の回路で負荷として Z_{K1} をつないだ時、たまたま入力インピーダンスも Z_{K1} になったとき、その Z_{K1} を**反復インピーダンス**という。 Z_{K1} は二端子対網によって違う。2, 2' を入力側と考えると同様に Z_{K2} が定義できる。



反復とは繰り返すことである。第1章の問題4(b)で求めた抵抗が反復インピーダンスである。すなわち、上記の二端子対網を右に無限個つなげば、どの接続点から右を見ても同じインピーダンスになるはずであり、これが反復インピーダンス Z_{K1} になる。分布定数回路の**特性インピーダンス**も反復インピーダンスの一種である。

Z_{K1} を負荷としてつなぐとき、 $V_1 = Z_{K1}I_1$ ， $V_2 = Z_{K1}I_2$ であり、このとき、

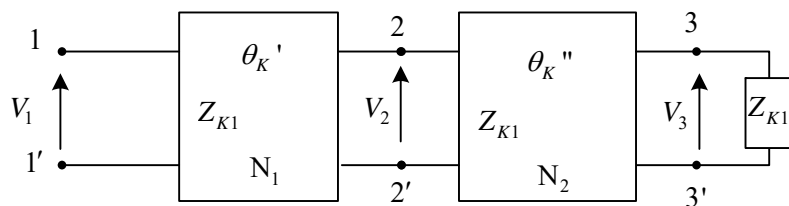
$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_2} = \log \frac{I_1}{I_2} \quad : \text{反復伝達量(iterative transfer constant)} \quad (13-15)$$

$$\alpha_k = 20 \log_{10} |V_1/V_2| \quad : \text{反復減衰量}, \quad (13-16)$$

$$\beta_k = \arg(V_1/V_2) \quad : \text{反復位相量} \quad (13-17)$$

という。反復パラメータは通信分野、分布定数回路（第17章）などで利用される。

問題 図のように二つの二端子対網 N_1, N_2 があり、左から見た反復インピーダンスがどちらも Z_{K1} で、反復伝達量がそれぞれ θ_K', θ_K'' であるとき、 N_1, N_2 全体の反復インピーダンスと反復伝達量を求めよ。



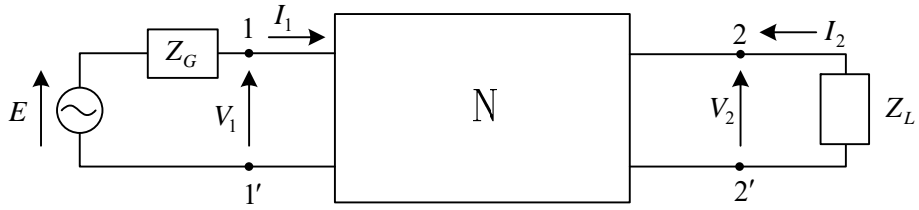
(解) 端子3, 3'に Z_{K1} を接続すると、2, 2'より右を見たインピーダンスは、定義より Z_{K1} である。よって、定義より1, 1'より右を見たインピーダンスも Z_{K1} となる。よって端子3, 3'に Z_{K1} を接続すると、1, 1'より右を見たインピーダンスが Z_{K1} となっているから、 N_1, N_2 全体の反復インピーダンスは Z_{K1} である。

N_1, N_2 全体の反復伝達量を θ_K とすると

$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_3} = \log \frac{V_1}{V_2} + \log \frac{V_2}{V_3} = \theta_K' + \theta_K'' \quad (13-18)$$

となる。

例題 6 図の回路において以下の問に答えよ。



- (1) N のインピーダンス行列 Z を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。
 (2) N の K 行列を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。

(解) (1) 図のように V_1, I_1, V_2, I_2 を定義すると，次式が成立する ($z_{11} \sim z_{22}$ は既知)。

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

図より， $Z_L = -V_2 / I_2 \quad \dots \dots \textcircled{3}$

②，③で， V_2 を消去し， I_2 を求めて①に代入すると入力インピーダンス Z_{in} は，

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

出力インピーダンス Z_{out} については，電源 E を短絡し， $2, 2'$ より見ることになるから，

$V_2 = V_1', V_1 = V_2', I_2 = I_1', I_1 = I_2'$ と書くと，②，①より

$$V_1' = z_{22}I_1' + z_{21}I_2' \quad \dots \dots \textcircled{2}'$$

$$V_2' = z_{12}I_1' + z_{11}I_2' \quad \dots \dots \textcircled{1}'$$

従って④式で， $Z_L \rightarrow Z_G, z_{11} \rightarrow z_{22}, z_{12} \rightarrow z_{21}, z_{21} \rightarrow z_{12}, z_{22} \rightarrow z_{11}$

と置き換えればよい。故に，

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_G + z_{11}} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

(2) 四端子定数を A, B, C, D とすると， I_2 が左向きに定義されていることに注意して

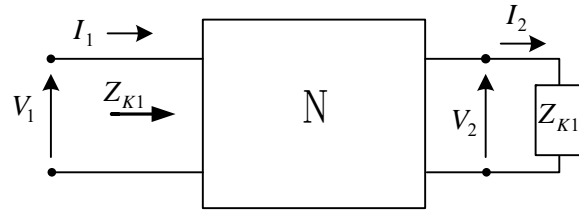
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A \frac{V_2}{-I_2} + B}{C \frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad \dots \dots \textcircled{6}$$

出力側から見た K 行列は， A と D を交換するだけでよいから(例題 2 参照)，

⑥の $Z_L \rightarrow Z_G$ として

$$Z_{out} = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A} \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

例題 7 N の K 行列 $K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ が既知のとき、以下の間に答えよ。



(1) 反復インピーダンス Z_{K1} を求めよ。N が対称回路のときはどうなるか。

(2) 反復伝達量を θ_K とするとき、 e^{θ_K} を求めよ。N が対称回路のとき $\cosh \theta_K$ はどうなるか。

(解) (1) 反復インピーダンスの定義から、負荷のインピーダンスが Z_{K1} のとき、入力インピーダンスも Z_{K1} となるから、

$$Z_{K1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{A \frac{V_2}{I_2} + B}{C \frac{V_2}{I_2} + D} = \frac{AZ_{K1} + B}{CZ_{K1} + D}$$

$$\therefore CZ_{K1}^2 - (A - D)Z_{K1} - B = 0$$

$$Z_{K1} = \frac{1}{2C} \left[(A - D) \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} \right] \quad (13-19)$$

根号は Z_{K1} の実部が正になるように選ぶ。

N が対称回路のとき、 $A = D$ であるから、

$$Z_{K1} = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (13-20)$$

(2) 定義より、 $\theta_K = \log \frac{V_1}{V_2}$

$$\text{一方、} V_1 = AV_2 + BI_2 = AV_2 + \frac{BV_2}{Z_{K1}}$$

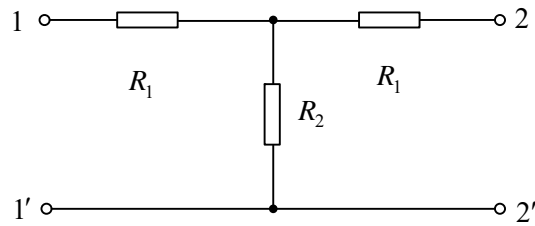
$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = A + \frac{B}{Z_{K1}}, \quad e^{\theta_K} = A + \frac{B}{Z_{K1}}$$

N が対称回路のとき、 $AD - BC = 1$ 、 $A = D$ を用いて

$$\cosh \theta_K = \frac{1}{2} (e^{\theta_K} + e^{-\theta_K}) = \frac{1}{2} \left(A + \sqrt{BC} + \frac{1}{A + \sqrt{BC}} \right) = A$$

* これらの式は、第 17 章の分布定数回路で利用する。

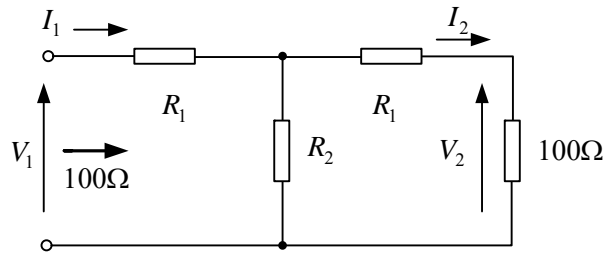
例題 8 図の回路で、反復インピーダンス $Z_K = 100\Omega$ 、反復減衰量 $\alpha[\text{dB}]$ であるように、 R_1, R_2 を定めよ。



(解) $Z_K = 100\Omega$ であるから、 $2, 2'$ に 100Ω を接続すると、入力抵抗も 100Ω となる。従って、

$$100 = R_1 + \frac{(R_1 + 100)R_2}{R_1 + 100 + R_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

題意より、



$$\alpha = 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{100 \times I_1}{100 \times I_2} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{I_1}{I_2} \right| \quad \dots \textcircled{2}$$

図より、

$$I_2 = \frac{R_2}{100 + R_1 + R_2} I_1 \quad \therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{100 + R_1 + R_2}{R_2} \quad \dots \textcircled{3}$$

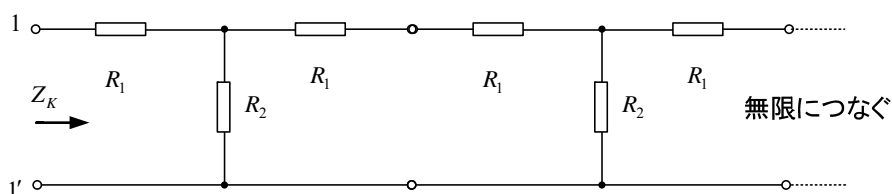
②, ③より、

$$10^{\frac{\alpha}{20}} = \frac{100 + R_1 + R_2}{R_2} \quad \dots \textcircled{4}$$

④を①に代入する。 $100 = R_1 + (R_1 + 100)10^{-\frac{\alpha}{20}} \quad \therefore R_1 = \frac{100(1 - 10^{-\frac{\alpha}{20}})}{1 + 10^{-\frac{\alpha}{20}}}$

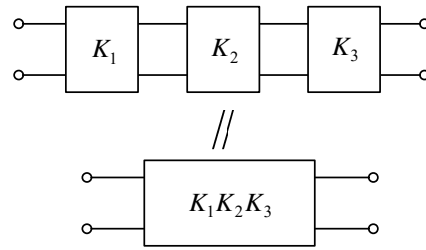
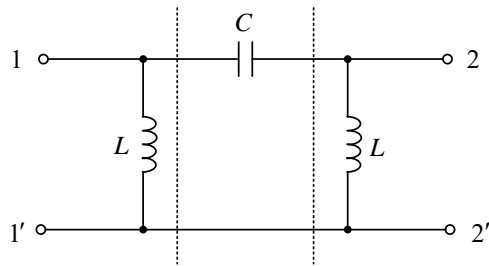
④より、 $R_2 = \frac{100 + R_1}{10^{\frac{\alpha}{20}} - 1} = \frac{200}{(10^{\frac{\alpha}{20}} - 1)(10^{-\frac{\alpha}{20}} + 1)}$

* 図のように無限につないだときの入力インピーダンスが反復インピーダンスである。



例題 9 図の回路につき以下の間に答えよ。

- (1) K 行列を求めよ。
- (2) 反復インピーダンスを求めよ。



(解) (1) 3つの部分に分けて考える。

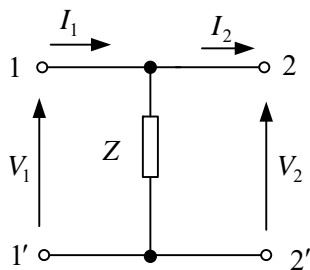
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ j\omega L & 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega L} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) & 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 対称回路だから, (13-20)より

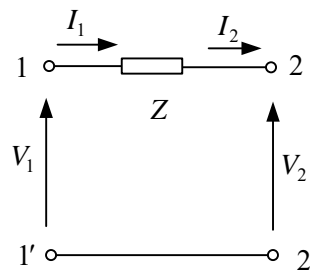
$$Z_K = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{2\omega^2 LC - 1}} = \frac{\omega L}{\sqrt{2\omega^2 LC - 1}}$$

ω が大きく $2\omega^2 LC > 1$ のとき, Z_K の実部が正の条件を満足している。このとき Z_K は純抵抗だから, この回路を無限個接続した場合, L, C だけの回路にもかかわらず, エネルギーが回路の遠くまで伝わっていくと解釈される。しかし, $2\omega^2 LC < 1$ なら, Z_K は虚数だからエネルギーは消費されず, 遠くに信号は届かないであろう。よって, 高域通過フィルタと考えられる。

☆ K 行列を求めるため, 基本回路の K はすぐ出そう! V_1, I_1 を V_2, I_2 で表す。

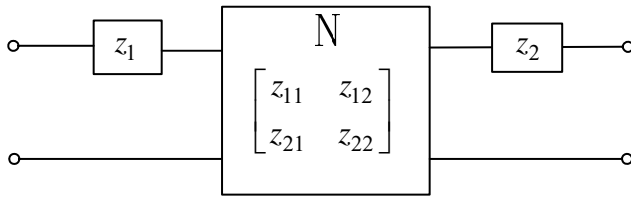


$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ I_1 &= I_2 + \frac{V_2}{Z} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

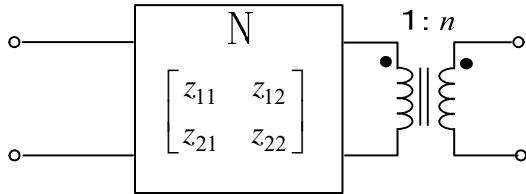


$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 + Z I_2 \\ I_1 &= I_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

問題 1 N のインピーダンス行列が既知であるとき、全体の 2 端子対網のインピーダンス行列を求めよ。

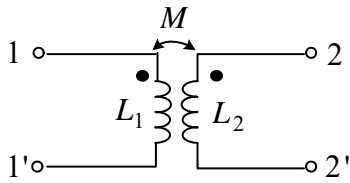


$$(答) Z = \begin{bmatrix} z_{11} + z_1 & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} + z_2 \end{bmatrix}$$



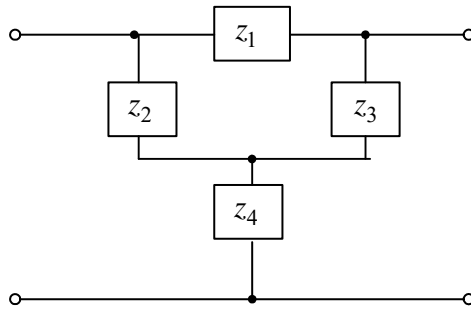
$$(答) Z = \begin{bmatrix} z_{11} & n z_{12} \\ n z_{21} & n^2 z_{22} \end{bmatrix}$$

問題 2 図の回路の K 行列を求めよ。



$$(答) K = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & \frac{j\omega(L_1L_2 - M^2)}{M} \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

問題 3 図の二端子対網において、インピーダンス行列を求めよ。



(答) 直接 $I_1 = 0$, $I_2 = 0$ を用いる方法, Y- Δ 変換して求める方法などを利用する。

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{z_2(z_1 + z_3)}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 & \frac{z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 \\ \frac{z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 & \frac{z_3(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 \end{bmatrix}$$