第 14 章　フーリエ級数によるひずみ波の解析

○　フーリエ級数(Fourier series)

周期関数 $f(t)$ とは，ある**周期** T で同一の波形を繰り返すもので，次の性質がある。

$$f(t+T) = f(t)$$

このとき，$f(t)$ を以下のフーリエ級数に展開すると，いろいろの周波数の三角関数の和として表現でき，式が扱い易く大変便利である。

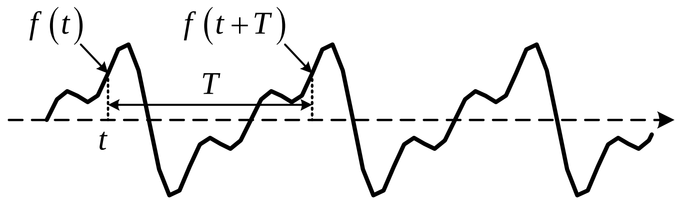


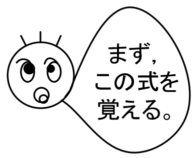
図 14-1 周期関数（ひずみ波交流）

〔形式 A〕

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ , } n = 1, 2, 3, \cdots \tag{14-1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t dt \quad (n \neq 0) \quad , \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t dt$$



〔形式 B〕

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \tag{14-2}$$

$$A_0 = a_0 \quad , \quad A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \quad , \quad \phi_n = \tan^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$

ここで，A_n をスペクトルという。A_0：**直流分**，$f_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1)$：**基本波**(fundamental wave)，$f_2(t) = A_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$：**第 2 高調波**(second harmonic)，$f_3(t) = A_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$：**第 3 高調波**(second harmonic)　などという。第 n 高調波の周波数は，基本波の周波数 $f_0 = \omega_0 /(2\pi)$ の n 倍，周期は基本波の周期 T の $1/n$ になる。

〔形式 C〕

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \tag{14-3}$$

$$C_0 = a_0 \quad , \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

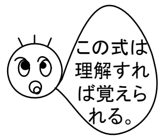
$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots)$$

変数 t のかわりに，$\omega_0 t = \theta$ を用いるときは，形式 A では，

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \tag{14-4}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$



この理由は，$\omega_0 t = \theta$ より，

これは，$dt = \dfrac{d\theta}{\omega_0} \qquad t: 0 \to T \quad , \quad \theta:\ 0 \to \omega_0 T = 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\,dt = \frac{1}{\omega_0 T}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta$$

ただし，$f(\theta)$ は $f(t)$ で $\omega_0 t = \theta$ と置き換えた関数を意味する。a_n, b_n についても同様である。

（注）**積分範囲**を $0 \to T$ または $0 \to 2\pi$ としたが, とにかく１周期積分すればよいので, $-\dfrac{T}{2} \to \dfrac{T}{2}$

または $-\pi \to \pi$ としてもよい。

〔形式 A〕の説明

まず，a_0 を求めよう。$f(t)$ を $0 \to T$ まで積分して，

$$\int_0^T f(t)dt = a_0\int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\,dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^T \cos n\,\omega_0\, t\, d\,t = 0$，$\displaystyle\int_0^T \sin n\,\omega_0\, t\, d\,t = 0$　だから

$$\therefore \quad \int_0^T f(t)\,d\,t = a_0\,T \qquad \therefore \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

a_0 は平均値であり，$f(t)$ に含まれる直流成分を表す。覚えやすい。

a_n を求めるには，$f(t)$ の両辺に $\cos m\omega_0 t$ を掛けて積分する。

$$\int_0^T f(t)\cos m\,\omega_0 t\,d\,t = a_0\int_0^T \cos m\,\omega_0\,t\,d\,t$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t\ \cos m\omega_0 t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t\ \cos m\omega_0 t\,dt$$

ここで,

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{\cos(n-m)\omega_0\,t + \cos(n+m)\omega_0\,t\right\}dt$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \dfrac{T}{2} & n = m \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin n\,\omega_0 t \cos m\,\omega_0 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{\sin(n+m)\omega_0\,t + \sin(n-m)\omega_0\,t\right\}dt = 0$$

従って，第２項の n が m に等しい場合のみ値をもち，

$$\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t\,dt = a_m \cdot \frac{T}{2} \qquad \therefore\ a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos m\omega_0 t\,dt$$

m を改めて n とすれば公式を得る。

b_n を求めるには，$f(t)$ の両辺に $\sin m\omega_0 t$ を掛けて積分する。

$$\int_0^T f(t)\sin m\omega_0 t\,dt = a_0\int_0^T \sin m\omega_0 t\,dt$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^T \cos n\omega_0 t\sin m\omega_0 t\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_0^T \sin n\omega_0 t\sin m\omega_0 t\,dt$$

ここで，

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t\sin m\omega_0 t dt = \frac{1}{2}\int_0^T \{\cos(n-m)\omega_0 t - \cos(n+m)\omega_0 t\}dt$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \dfrac{T}{2} & n = m \text{ のとき} \end{cases}$$

よって，第３項で n が m に等しい場合のみ値をもち，

$$\int_0^T f(t)\sin m\omega_0 t\,dt = b_m \cdot \frac{T}{2} \qquad \therefore\ b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt$$

m を改めて n とすれば公式を得る。

一般に，**関数系列**

$$\{\,\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \cdots\} = \{\,1, \cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots\}$$

において，次式が成立する。**関数系列の積分公式**と呼ぶ。

$$\int_0^T \phi_m\,\phi_n\,dt = 0 \quad (m \neq n) \tag{14-5}$$

ω_0 は**基本波の角周波数**，$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ は**最も長い基本波の周期**である。

$\phi_m\phi_n$ の周期は積を和に変えると，T の整数分の1である。

よって，$0 \sim T$ で積分すると，0 となる。

$$\int_0^T {\phi_0}^2 dt = T \tag{14-6}$$

$$\int_0^T {\phi_m}^2 d\,t = \frac{T}{2} \qquad (m \neq 0) \tag{14-7}$$

同じものの積には定数項を生じるので，積分は0 でない。

＊　この公式を理解していれば(覚えるのでなく)，フーリエ解析の計算は超簡単だ！

＊　[形式 A]で a_n や b_n を求める公式もそれらの係数と同じ三角関数を掛けたときに値が $T/2$ になるから，それで割れば求まる。

〔形式 B〕の説明　〔形式 A〕の三角関数を合成しただけ。
〔形式 C〕の説明　〔形式 A〕より〔形式 C〕を導く。

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

であるから，

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

但し，$C_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}$　，　$C_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2}$　　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

C_n , C_{-n} は一般に複素数である（しかし，それらで求まった $f(t)$ は実数である）。いま，

$$C_0 = a_0$$

と書くことにすれば，

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

係数 C_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ は以下のようにして求まる。まず，

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T e^{j(n+m)\omega_0 t}\,dt \qquad (14\text{-}8)$$

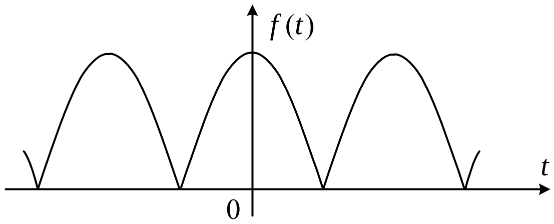
$$= \begin{cases} 1 & n = -m \quad のとき \\ 0 & n \neq -m \quad のとき \end{cases} \longleftarrow \frac{1}{jT(n+m)\omega_0}\Big[e^{j(n+m)\omega_0 t}\Big]_0^T = 0$$

の関係がある。これを用いて，

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt &= \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\ &= C_n \end{aligned}$$

k が n のときのみ値をもつ。

○ フーリエ級数の性質



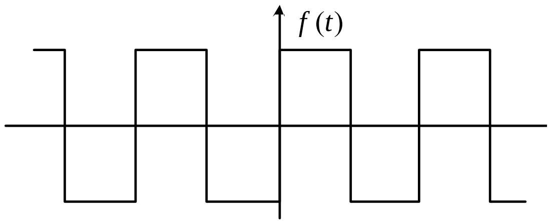
偶関数 $f(-t)=f(t)$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)$$

$$f(-t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 t-b_n\sin n\omega_0 t)$$

両者が等しいから， $b_n=0$

なわち， sin の成分はない。

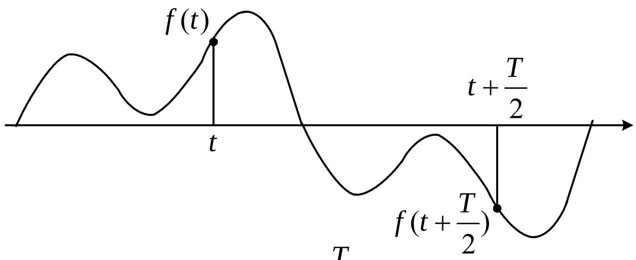


奇関数 $f(-t)=-f(t)$

$f(-t)=-f(t)$ だから

$a_0=0$ ， $a_n=0$

すなわち，直流分や cos の成分はない。



正負対称波 $f(t+\frac{T}{2})=-f(t)$

$n\pi$

$$f(t+\frac{T}{2})=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos(n\omega_0 t+\frac{n\omega_o T}{2})+b_n\sin(n\omega_0 t+\frac{n\omega_o T}{2})\right\}$$

n が偶数のとき， $-$ はつかない。

n が奇数のとき， $-$ がつく。

これが， $-f(t)$ に等しくなるには， $a_0=0$ ， a_n ， b_n の n は奇数

すなわち， a_1， b_1 ， a_3， b_3 ，$\cdots$ の項（奇数調波）だけが存在する

パーシバルの定理

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_o t+b_n\sin n\omega_0 t)\right\}^2dt \tag{14-9}$$

$$=a_0{}^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n{}^2+b_n{}^2}{2}$$

（関数系列の積分の公式からすぐ求まる。）

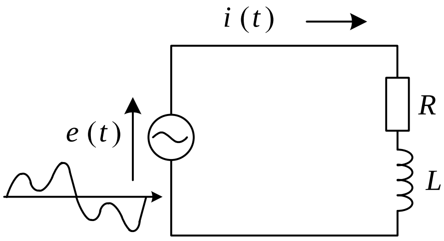
$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2d\,t=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,e^{jn\omega t}\right\}^2dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\,e^{jn\omega t}\right\}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m\,e^{jm\omega t}\right\}dt$$

$$=C_0{}^2+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}C_n\,C_{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_n\right|^2 \qquad (C_{-n}=\overline{C_n}) \tag{14-10}$$

○ フーリエ級数の電気回路への応用

周期関数はフーリエ級数によって周波数の異なる成分に分けられた。負荷が R, L, C の線形回路であれば，**重ね合わせの理**より成分ごとに解を求めて，後で，加え合わせればよい。周波数の高い成分程値は小さくなるのが一般的だから，$n=10$ ぐらいまででも，良い解が得られる。

$e(t)$ が与えられて，$i(t)$ の定常解を求める問題



手順１． $e(t)$ をフーリエ級数に展開し，

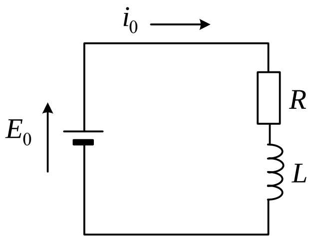
$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \qquad \text{(14-11)}$$

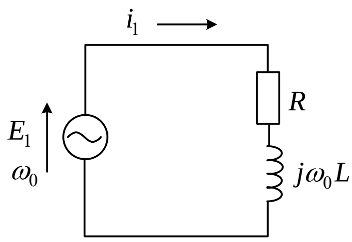
を得る。

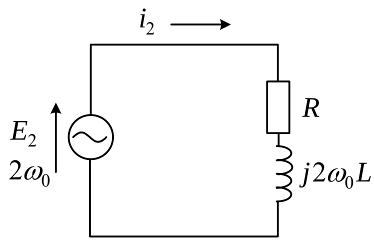
E_0 : 直流分，　E_{1e} : **基本波成分**の実効値

E_{2e} : **第2調波成分**の実効値・・・

手順２．成分ごとに i を求める。　　$E_n = E_{ne} e^{j\varphi_n}$　：**第 n 調波成分**のフェーザ







$$i_0 = \frac{E_0}{R} \qquad I_1 = \frac{E_1}{R + j\omega_0 L} \qquad I_2 = \frac{E_2}{R + j2\omega_0 L}$$

フェーザから瞬時値へ　$i_1 = \dfrac{\sqrt{2} E_{1e}}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \theta_1)$　但し，$\tan\theta_1 = \dfrac{\omega_0 L}{R}$

$$i_2 = \frac{\sqrt{2} E_{2e}}{\sqrt{R^2 + (2\omega_0 L)^2}} \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 - \theta_2) \quad \text{但し，} \tan\theta_2 = \frac{2\omega_0 L}{R}$$

手順３．各成分を重ね合わせて i を求める。

$$\begin{aligned} i &= i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \cdots \\ &= \frac{E_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} E_{ne}}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n) \end{aligned} \qquad \text{(14-12)}$$

但し，$\theta_n = \tan^{-1} \dfrac{n\omega_0 L}{R}$　　(14-13)

一般に，$i = i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n)$　と書ける。I_{ne} :**第 n 調波成分**の実効値

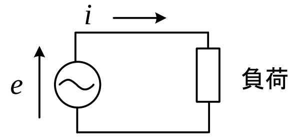
（注）フェーザ表示して，$I = i_0 + I_1 + I_2 + I_3 + \cdots$　と書いてはいけない。フェーザ同士の演算ができるのは，あくまで同じ周波数のときのみ。瞬時値を加えることは重ね合わせの理より可能。

○ ひずみ波交流の実効値，電力，力率

電源電圧と電流が次式で与えられるとする（直流分は0の場合を考えることが多い）。

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \qquad (14\text{-}14)$$

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n) \qquad (14\text{-}15)$$



e, i の**実効値**(root-mean-square (r.m.s.) value, effective value)をそれぞれ E_e, I_e とすると，

$$E_e \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt} \qquad \text{（実効値の一般的な定義）} \qquad (14\text{-}16)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\,\omega_0\,t + \varphi_n)\right]^2 dt} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} E_{ne}{}^2}$$

$$= \sqrt{E_{1e}{}^2 + E_{2e}{}^2 + E_{3e}{}^2 + \cdots} \qquad \text{（パーシバルの定理より簡単）} \qquad (14\text{-}17)$$

同様に電流の実効値は， $I_e \equiv \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} = \sqrt{I_{1e}{}^2 + I_{2e}{}^2 + I_{3e}{}^2 + \cdots}$ (14-18)

高調波がある場合も抵抗 R で消費される電力の平均値は $R\,I_e^2$ となる（$R\,i^2$ の平均値だから）。逆に，こうなるように実効値が定義されたのである。

ひずみ率(distortion factor)： k （どの程度，正弦波から変形しているかの目安）

$$k = \frac{\text{高調波の実効値}}{\text{基本波の実効値}} = \frac{\sqrt{E_{2e}{}^2 + E_{3e}{}^2 + \cdots}}{E_{1e}} \qquad (14\text{-}19)$$

電力（有効電力） P [W] （周波数が違うので平均電力は各調波の平均電力の和となる。確認せよ。）

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T e\,i\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} E_{ne}\,I_{ne}\cos\theta_n \qquad \text{注} \quad e\,i \neq e_1 i_1 + e_2 i_2 + \cdots + e_n i_n \qquad (14\text{-}20)$$

皮相電力 P_a [VA]（電源の電圧と電流の実効値の積 ： これは装置の大きさの目安になる）

皮相電力 $P_a = E_e\,I_e$ (14-21)

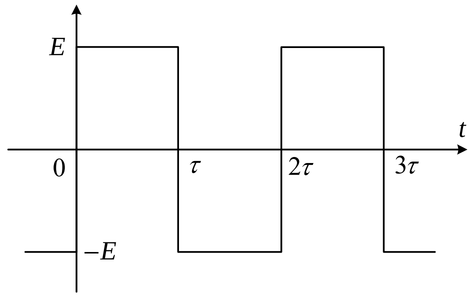
力率（総合力率 power factor） （$\cos\theta_1$ のことを**基本波力率** displacement factor という。）

$$\text{力率} = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{P}{P_a} \qquad (14\text{-}22)$$

基本波力率は電圧と電流を基本波成分だけで近似したときの力率で基本波成分のフェーザで考えてよい。これに対し総合力率は，近似せず力率の定義に立ち戻り有効電力/皮相電力で求める。

力率が低いとは，たくさん食べても栄養 がとれないこと。
効率が低いとは，とった栄養の割には仕事量が少 ないこと。

例題１　図の方形波 $f(t)$ をフーリエ級数に展開せよ。



τ ：タウと読む。

（解）奇数関数だから，$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{2E}{T}\left(\int_0^{\tau}\sin n\omega_0 t\,dt - \int_{\tau}^{2\tau}\sin n\omega_0 t\,dt\right)$$

$$= \frac{2E}{T}\left\{\frac{1}{n\,\omega_0}\left[-\cos n\omega_0\,t\right]_0^{\tau} - \frac{1}{n\,\omega_0}\left[-\cos n\omega_0\,t\right]_{\tau}^{2\tau}\right\}$$

$$= \frac{2E}{n\omega_0 T}\left(-\cos n\omega_0\tau + \cos 0 + \cos n\omega_0 2\tau - \cos n\omega_0\tau\right)$$

ここで，周期：$T = 2\tau$　，　$\omega_0\,T = 2\,\pi$　より，$\omega_0\,\tau = \pi$

$$b_n = \frac{E}{n\pi}\left(-\cos n\pi + 1 + \cos 2\pi n - \cos n\pi\right) = \frac{2E}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) = \begin{cases} \dfrac{4E}{n\pi} & n: 奇数 \\ 0 & n: 偶数 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,\omega_0\,t = \frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\,\omega_0\,t}{n}$$

但し，ω_0 ：**基本波の角周波数**　　n が大きい程**スペクトル（振幅）**は小さい。

① 基本波　$n = 1$

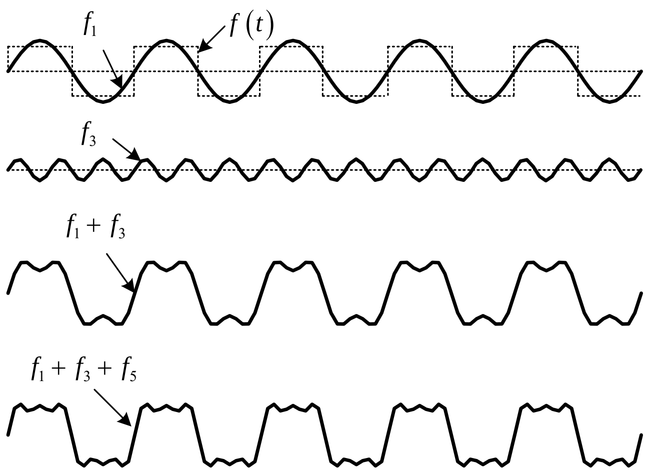
$$f_1 = \frac{4E}{\pi}\sin\omega_0\,t$$

③ 第３調波　$n = 3$

$$f_3 = \frac{4E}{3\pi}\sin 3\omega_0\,t$$

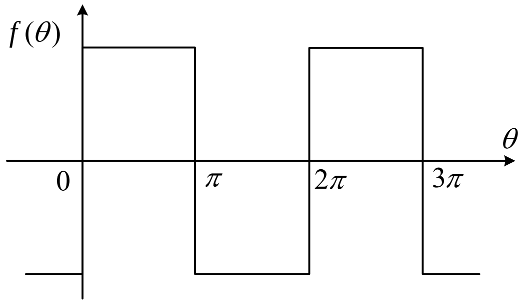
⑤ 第５調波　$n = 5$

$$f_5 = \frac{4E}{5\pi}\sin 5\omega_0\,t$$



第 n 高調波の振幅は基本波の $1/n$ になるので，第５調波まで加えた一番下の波形 $f_1 + f_3 + f_5$ でも，もとの $f(t)$ にかなり近くなることがわかる。周期関数はフーリエ級数を用いて周波数の違う三角関数の和として表わせることが実感できる。基本波だけで近似することも多く，そうすれば解析は容易である。

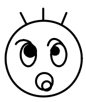
例題２　図の方形波 $f(\theta)$ をフーリエ級数に展開せよ。



（解）奇関数だから，$a_n = 0$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta \\
&= \frac{E}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin n\theta\, d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\sin n\theta\, d\theta\right) \\
&= \frac{E}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\left[-\cos n\theta\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\left[-\cos n\theta\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{E}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \cos 0 + \cos 2n\pi - \cos n\pi\right) \\
&= \frac{2E}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\
&= \begin{cases} \dfrac{4E}{n\pi} & n:\text{奇数} \\ 0 & n:\text{偶数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \\
&= \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{4E}{n\pi}\sin n\theta
\end{aligned}
$$



t で積分するより，θ で積分した方が計算は楽である。従って，例題１は例題２のように θ に直して計算した方が良いと思われる。θ については，１周期のところが 2π となる。例題１で，周期 $T = 2\tau$（図より）であるから，

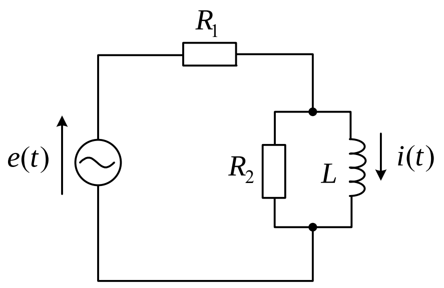
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau}$$　：**基本波の角周波数（最も低い角周波数）**

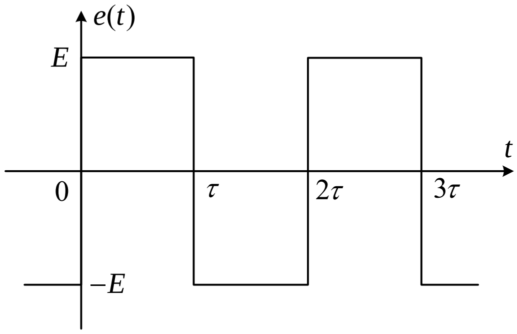
の関係がある。よって，例題２で $\theta = \omega_0 t$ とおけば，例題１の結果と一致する。

質問：なぜ複雑なフーリエ級数に展開するのか？

答え：複雑なようでも三角関数の和になれば，各成分については正弦波だから扱い易い（交流理論も使える）。また，基本波だけでも良い近似解が得られる。また，波形にどのような周波数成分がどれくらい含まれているかも重要な意味がある。

例題３　電源電圧$e(t)$が図の波形で与えられるとき，電流$i(t)$の定常解を求めよ。





（解）フーリエ級数に展開して，

$$e(t)=\frac{4E}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\omega_0 t}{n} \qquad \text{但し，} \omega_0=\frac{2\pi}{T},\ T=2\tau$$

まず，$e_n=\dfrac{4E}{n\pi}\sin n\,\omega_0\,t$　に対する電流i_nを求める。

e_nのフェーザをE_nとすれば，

$$E_n=\frac{4E}{\sqrt{2}n\pi}$$

図より，i_nのフェーザI_nは，分流の公式を用いて

$$I_n=\frac{E_n}{R_1+\dfrac{jR_2 n\omega_0 L}{R_2+jn\omega_0 L}}\cdot\frac{R_2}{R_2+jn\omega_0 L}$$

$$=\frac{R_2E_n}{R_1R_2+jR_1n\omega_0L+jR_2n\omega_0L}$$

$$|I_n|=\frac{R_2E_n}{\sqrt{(R_1R_2)^2+\{n\omega_0L(R_1+R_2)\}^2}}$$

$$\arg I_n=-\tan^{-1}\frac{n\omega_0L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

従って，

$$i_n(t)=\sqrt{2}\,|I_n|\sin(n\omega_0t+\arg I_n) \qquad (n=1,3,5,\cdots)$$

重ね合わせの理より，次式で$i(t)$が求まる。

$$i(t)=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}i_n(t)$$

（注）$e(t)$のフェーザをEとし，$E=E_1+E_3+E_5+\cdots$とか，$i(t)$のフェーザをIとすると，$I=I_1+I_3+I_5+\cdots$という式は成立しない。フェーザが定義されるのは同じ周波数の電源だけである。すなわち，eのフェーザがE，iのフェーザIが定義できない。瞬時値を加え合わせることは問題ない。

例題４　図の回路はダイオードを使って交流から直流を作る整流回路である。負荷のインダクタンスLが十分に大きければ，直流電流I_dは一定と考えてよい*。このとき，交流電源の電圧$e(t)$と電流$i(t)$の波形は図のようになる。$e(t)=\sqrt{2}\,E_e \sin\omega t$　で，$i(t)$のフーリエ級数展開は

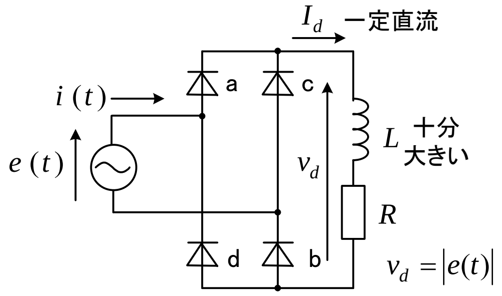
$$i(t)=\frac{4I_d}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$ である。

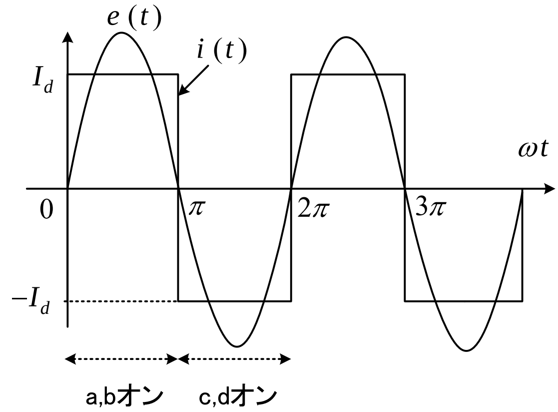
＊第15章例題１よりLが大きいとコイルの電流は変化が小さい。v_dが脈動してもほとんどI_dは変化しない。

(1) $i(t)$の実効値を求めよ。

(2) 基本波力率を求めよ。

(3) 総合力率（力率）を求めよ。





（解）(1) $I_e=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_d^2\,dt}=I_d$　　ここで，周期　$T=\frac{\omega}{2\pi}$

(2) $i(t)$の基本波成分$i_1(t)$は$n=1$の場合で，次式で与えられる。

$$i_1(t)=\frac{4I_d}{\pi}\sin\omega t$$

よって，交流電圧$e(t)$との位相差は0である。従って，基本波力率は，$\cos 0=1$

(3) 有効電力Pは，　$P=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}E_{ne}\,I_{ne}\cos\theta_n=E_e\frac{2\sqrt{2}}{\pi}I_d\cos 0=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}E_e\,I_d$

$$総合力率=\frac{有効電力}{皮相電力}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}E_e\,I_d}{E_e\,I_e}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=0.9$$

（注）(1) は　$I_e=\sqrt{I_{1e}{}^2+I_{3e}{}^2+I_{5e}{}^2+\cdots}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}I_d}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)}=I_d$

でも計算できるが，この場合は定義から求めた方が簡単である。

(3) 電源電圧は基本波成分のみであるから$E_{1e}=E_e$以外 0 である。有効電力は，

$P=\frac{1}{T}\int_0^T e\,i\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2}\,E_eI_d\sin\theta\,d\theta=\frac{2\sqrt{2}\,E_eI_d}{\pi}$　（ここで，$\theta=\omega t$）で求めても良い。

エネルギー保存則より，$P=RI_d^2$　だから，$I_d=\frac{2\sqrt{2}E_e}{\pi R}$　である。

例題５　図の回路で電源電圧の瞬時値が次式で与えられるとき，i_a　を求めよ。

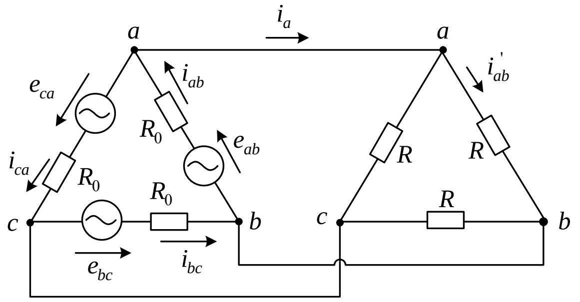
$$e_{ab} = e_{ab1} + e_{ab3},\ e_{bc} = e_{bc1} + e_{bc3},\ e_{ca} = e_{ca1} + e_{ca3}$$

ここで，$e_{ab1} = \sqrt{2}E_{1e}\sin\omega t,\ e_{bc1} = \sqrt{2}E_{1e}\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}),\ e_{ca1} = \sqrt{2}E_{1e}\sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$

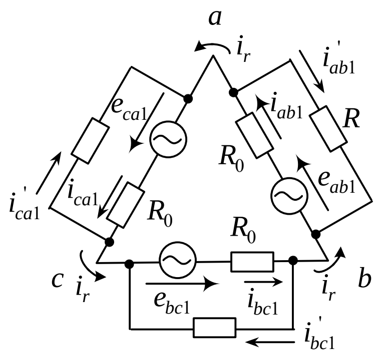
$$e_{ab3} = \sqrt{2}E_{3e}\sin 3\omega t$$

$$e_{bc3} = \sqrt{2}E_{3e}\sin 3(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

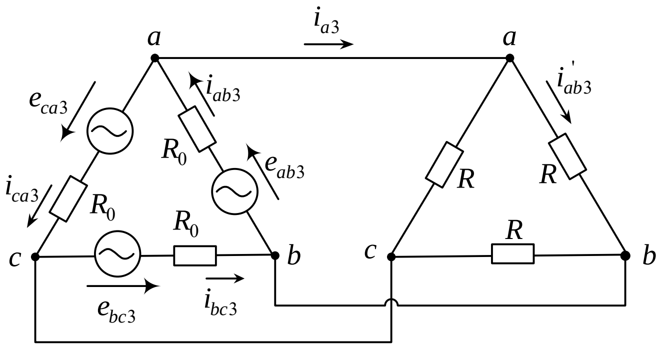
$$e_{ca3} = \sqrt{2}E_{3e}\sin 3(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$



（解）図のように(a)基本波成分，(b)第３調波成分に分けて，重ね合わせの理を利用する。



(a)基本波成分のみの回路



(b)第３調波成分のみの回路

基本波成分については，図の回路に変形すると

$$i_r = i_{ab1} - i'_{ab1} = i_{bc1} - i'_{bc1} = i_{ca1} - i'_{ca1}$$

$$\therefore\quad 3i_r = i_{ab1} + i_{bc1} + i_{ca1} - (i'_{ab1} + i'_{bc1} + i'_{ca1}) = 0$$　（三相回路の対称性より）

従って，$i_{ab1} = i'_{ab1},\ i_{bc1} = i'_{bc1},\ i_{ca1} = i'_{ca1}$ だから，a,b,c 相が独立に解ける。i_a の基本波 i_{a1} は

$$i_{a1} = i_{ab1} - i_{ca1}\quad \text{より}\quad i_{a1} = \frac{\sqrt{6}E_{1e}}{R_0 + R}\sin(\omega t - \frac{\pi}{6})\qquad \because\ I_{a1} = \frac{1}{R_0 + R}(E_{1e} - E_{1e}e^{j2\pi/3})$$

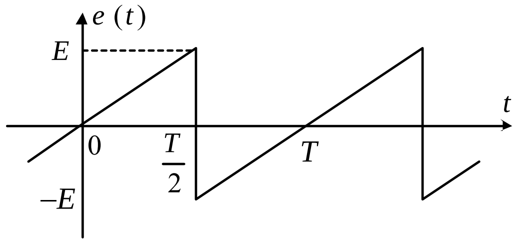
第３調波成分については，$e_{ab3} = e_{bc3} = e_{ca3}$ となり，対称性より　$i_{ab3} = i_{bc3} = i_{ca3}$ だから i_a の第３調波成分は $i_{a3} = i_{ab3} - i_{ca3} = 0$ となる。従って重ね合わせの理より $i_a = i_{a1} + i_{a3} = i_{a1}$ で求まる。

（参考）このように第３調波成分は Δ 電源の中で循環し，線路に流れない。

循環電流は，$i_{ab3} = i_{bc3} = i_{ca3} = \sqrt{2}(E_{3e}/R_0)\sin 3\omega t$

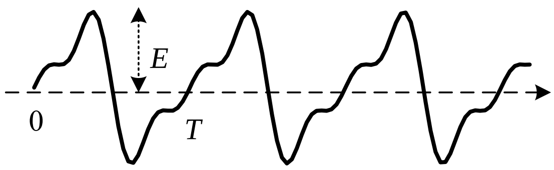
Ｙ電源（変圧器）では電源に第３調波成分が流れることができないので変圧器の飽和とヒステリシスがあると起電力が高調波を含むことになり問題である。一方 Δ 電源は変圧器鉄心の飽和とヒステリシスがあっても循環電流として電源に第３調波成分が流れて変圧器起電力が正弦波となることができ，配電に利用されている（文献５)。

問題１．のこぎり波電圧 $e(t)$ をフーリエ級数に展開せよ。

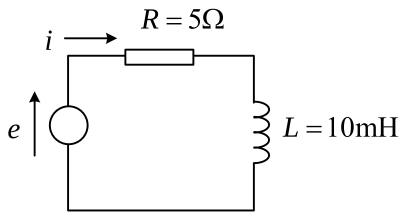


（答） $e(t)=\frac{2E}{\pi}(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\frac{1}{4}\sin 4\omega t+\cdots)$ 　　但し， $\omega=2\pi/T$

下図は，第３調波まで（第３項まで）加えたときの波形である。元の波形に近くなる。



問題２．図の回路に，基本波周波数 60Hz のひずみ波電圧 $e=100\sin\omega t+20\sin 3\omega t$ [V] を加えた。次のものを求めよ。



(1) 電流 i の式

(2) e , i の実効値

(3) 消費電力，皮相電力，総合力率

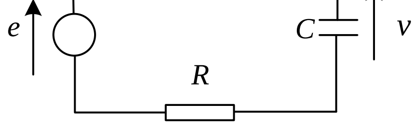
（答）(1) $i=16.0\sin(\omega t-37.0°)+1.62\ \sin(3\omega t-66.1°)$ [A]

(2) $E_e=72.1\text{V}$ ， $I_e=11.4\,\text{A}$

(3) $P=646\,\text{W}$， 皮相電力 822 VA， 総合力率 0.786

問題３．電源電圧 $e(t)$ が次式で与えられるときコンデンサ電圧を求めよ。

$$e(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}E_{ne}\sin(n\omega_0 t+\varphi_n)$$



(解)各成分に対する定常解を求め，加え合わせる。

$$\theta_n=\tan^{-1}\frac{n\omega_0 L-\frac{1}{n\omega_0 C}}{R}$$ 　とすると

$$v(t)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\frac{\frac{1}{n\omega_0 C}}{\sqrt{R^2+(n\omega_0 L-\frac{1}{n\omega_0 C})^2}}E_{ne}\sin(n\omega_0 t+\varphi_n-\theta_n-\frac{\pi}{2})$$