

第 16 章 過渡現象解析 II

ある時間関数 $f(t)$ に e^{-st} を掛けて時間 0 から ∞ まで積分したものはラプラス変換と呼ばれ、複素数 s の関数になる。これを使うと微分方程式の解が機械的に得られ、過渡現象が計算できる。特に、ラプラス変換 (L 変換) を利用すると、スイッチを入れたり切ったりする直前の初期値で解が求まるので、直後の初期値が良く判らないときに便利である。

○ ラプラス変換(Laplace transform)の定義

$f(t)$ が変数 t の関数であるとき、 s を複素数として

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-1)$$

が存在するものとする。 $f(t)$ から $F(s)$ に変換することをラプラス変換と呼び、

$$F(s) = L[f(t)] \quad (16-2)$$

と略記することが多い。(16-1) , (16-2)で、 $f(t)$ を表関数、 $F(s)$ を裏関数とよぶ。

また、 $t=0$ で $f(t)$ が瞬間的に無限となる場合、**変化の直前** $t=-0$ と、**直後** $t=+0$ を区別して考え、

$$L_+[f(t)] = \int_{+0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-3)$$

$$L_-[f(t)] = \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-4)$$

と定義する。

$$L[f(t)] = \int_{-0}^{+0} f(t) e^{-st} dt + L_+[f(t)] \quad (16-5)$$

の関係がある。もし、 $f(t)$ が -0 と $+0$ の間で有限であれば(16-5)の第 1 項は 0 となり、 $L_- = L_+$ となる。特に区別する必要のない時は、 L の記号を用いる。

通常、表関数 $f(t)$ と裏関数 $F(s)$ とは 1 対 1 に対応していると考えて良く、 $F(s)$ から $f(t)$ を求めることをラプラス逆変換(inverse Laplace transform)といい、これを、

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad (16-6)$$

の記号で表現する。ラプラス逆変換は $F(s)$ を**部分分数展開**して求めることができる。下記の $F(s)$ の例で説明する。 $F(s)$ の分母を因数分解して、次式で表せるとする。

$$F(s) = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)^2} \quad (16-7)$$

a, b, c, d は、全て 0 以外可能である。 $s_1 = 0$ や s_1, s_2 が共役複素数の場合もよい。 $F(s)$ の部分分数展開は次式となる。重根の場合はそれより次数の低い項も有り得る。

$$F(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{(s-s_3)^2} + \frac{D}{s-s_3} \quad (16-8)$$

A, B, C, D は以下のようにして求める。先に | の左の演算をした後で根を代入する。例えば、(16-8)の両辺に $(s-s_1)$ を掛けると、右辺の A の項だけが約分でき、 $s = s_1$ を代入したら、それ以外は 0 となるので、結局右辺は A となる。 D は微分した後で $s = s_3$ を代入する。

$$A = (s-s_1)F(s)|_{s=s_1}, \quad B = (s-s_2)F(s)|_{s=s_2}$$

$$C = (s-s_3)^2 F(s)|_{s=s_3}, \quad D = \frac{d}{ds} \left\{ (s-s_3)^2 F(s) \right\} |_{s=s_3} \quad (16-9)$$

後述のラプラス変換表を用いて、(16-8)の逆変換は次式となる。

$$f(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Cte^{s_3 t} + De^{s_3 t} \quad (16-10)$$

重根がなければ計算は容易である。なお、 A, B, C, D は恒等式から求めることもできる。

単位インパルス関数(unit impulse)のラプラス変換を求めてみよう。

まず、単位インパルス関数は次のようにして作られる。



図 16-2 単位インパルス関数 (δ 関数)

図 16-2 より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \times \frac{1}{\Delta t} = 1 \quad (16-11)$$

である。よって、

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)e^{-st} dt$$

← $-0 \sim +0$ 以外は 0

$$= e^0 \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1$$

← -0 から $+0$ においてこの値は e^0

$$L_+[\delta(t)] = \int_{+0}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 0 \quad (\because +0 \sim \infty \text{ で } \delta(t) = 0)$$

$\delta(t)$ には、一般的に次の性質がある。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) f(t) dt \\ &= f(t_0) \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt \\ &= f(t_0) \end{aligned}$$

(標本抽出)

(16-12)

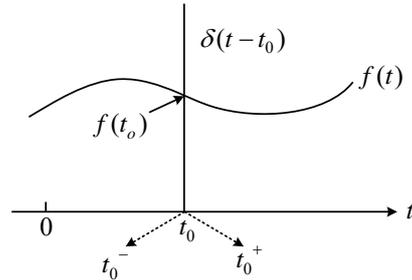


図 16-3 標本抽出

次に**単位ステップ関数**(unit step function) $u(t)$ を次のように定義する。

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq +0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t \leq -0 \end{cases} \quad (16-13)$$

$t = 0$ 付近で $u(t)$ は有限だから、

$L_+ = L_-$ であり、

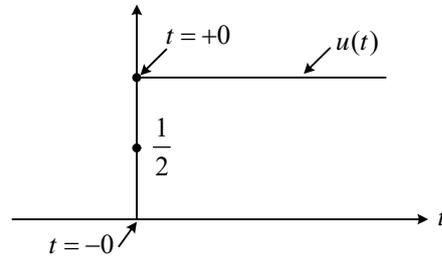


図 16-3 単位ステップ関数

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$$

となる。ここで、積分が $1/s$ に収束するためには $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$ が 0 とならなければならないが、

そのためには次の条件が必要である。いま s を $s = \alpha + j\beta$ とすると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} (\cos \beta t - j \sin \beta t) \quad (16-14)$$

従って、 $\alpha > 0$ であればよい。このとき、

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (16-15)$$

このように、値が収束するように s が存在するものとして計算する。通常使うときは変換表を用いるので、 $\alpha > 0$ の条件などは気にしなくてよい。一般に、

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (16-16)$$

が成立する。

簡単な関数のラプラス変換表を表 16-1 に示す。

表 16-1 ラプラス変換表

時間関数 $f(t)$	ラプラス変換 $F(s)$
単位インパルス関数 $\delta(t)$	$L_-[\delta(t)] = 1$ $L_+[\delta(t)] = 0$
単位ステップ関数 $U(t)$ または 1	$\frac{1}{s}$
e^{-at} , $t e^{-at}$ (a は複素数でもよい)	$\frac{1}{s+a}$, $\frac{1}{(s+a)^2}$
t , t^2 , t^n	$\frac{1}{s^2}$, $\frac{2}{s^3}$, $\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} [c \cos \beta t + (d + \alpha c) \frac{1}{\beta} \sin \beta t]$ $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ($a^2 < 4b$) 極 $\alpha \pm j\beta$
$ce^{\alpha t} + (d + \alpha c) t e^{\alpha t}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ($a^2 = 4b$) 極 α (重根)
$(\frac{c}{2} + \frac{d + \alpha c}{2\gamma}) e^{(\alpha + \gamma)t} + (\frac{c}{2} - \frac{d + \alpha c}{2\gamma}) e^{(\alpha - \gamma)t}$ $\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ($a^2 > 4b$) 極 $\alpha \pm \gamma$

(注意) $\delta(t)$ 以外, L_- ラプラス変換と L_+ ラプラス変換は等しい。

$\delta(t)$ 関数は, $f(t)$ の -0 の値と $+0$ の値が違うとき, $f(t)$ の微分で現れ, -0 と $+0$ 間の微分は $\delta(t)(f(+0) - f(-0))$ となる。このラプラス変換は

$$\int_{-0}^{+0} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(+0) - f(-0) \quad (16-17)$$

となり, L_- ラプラス変換と L_+ ラプラス変換に差を生じる。

○ **ラプラス変換の性質**

$$L[f(t)] = F(s) \quad , \quad L[g(t)] = G(s) \quad \text{とすると,}$$

(i) ラプラス変換及び逆変換は線形変換である。 a, b を定数とすれば,

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)] \quad (16-18)$$

$$L^{-1}[aF(s) + bG(s)] = aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[G(s)] \quad (16-19)$$

(ii) 導関数のラプラス変換

$$L_- \left[\frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(-0) \quad (16-20)$$

$$L_- \left[\frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - s f(-0) - f'(-0) \quad (16-21)$$

$$L_- \left[f^{(n)}(t) \right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - s^{n-2} f'(-0) - \dots - f^{(n-1)}(-0) \quad (16-22)$$

L_+ の場合には, -0 を $+0$ で置き換える。'は1階微分, $^{(n)}$ は n 階微分を表す。

$$\begin{aligned} \text{(説明)} \quad L_- \left[\frac{df(t)}{dt} \right] &= \int_{-0}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[f(t)e^{-st} \right]_{-0}^{\infty} + s \int_{-0}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[f(t)e^{-st} \right] - f(-0) + sF(s) = sF(s) - f(-0) \end{aligned}$$

この項が0になるように s の実部を選べるとする。

(iii) 積分関数のラプラス変換

$$L_- \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{-0} f(\tau) d\tau \quad (16-23)$$

L_+ の場合, -0 を $+0$ とすればよい。

$$\text{(iv) 時間推移} \quad L[f(t-T)] = e^{-sT} F(s) \quad (16-24)$$

$$L^{-1}[e^{-sT} F(s)] = f(t-T) \quad (16-25)$$

$$\text{(説明)} \quad L[f(t-T)] = \int_0^{\infty} f(t-T)e^{-st} dt$$

ここで, $t-T = \tau$ とおくと, $t < 0: f(t) = 0$ と考えて

$$L[f(t-T)] = \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+T)} d\tau = e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s)$$

○ ラプラス変換の電気回路への応用

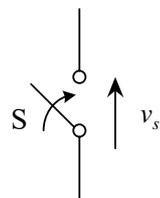
ラプラス変換を用いると回路の微分方程式を機械的に解くことができる。特に分布定数回路ではラプラス変換なしに論じることは難しいと言われている（文献 (3)）。また、コンデンサ電圧やコイルの電流の初期値（ $t=+0$ での値）がわからない時にも役立つ。つまり鎖交磁束不変の理や電荷量不変の理を使って $t=+0$ での値を求めることもできるが、その方法に自信が持てないときに機械的に初期値が求まるので便利である。

交流回路の過渡現象の計算にラプラス変換を使うと一般に大変な計算になる。この場合には微分方程式を直接解く方法で、まずは考えた方がよかろう。ただ、ラプラス変換による解き方は習得すべきなので、ラプラス変換を使って解くように試験問題で指示する事はある。このため基本的なラプラス変換の公式は覚えて欲しい。詳しいラプラス変換表が他の文献にあるが、実際に使うときは間違いないか何冊かでチェックしよう。

L_+ と L_- のどちらを使うか？

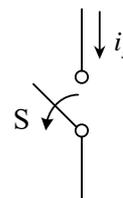
スイッチをオンまたはオフした直後のコンデンサの電荷やコイルに流れる電流の初期値（ $t=+0$ の値）が判っている時には、 L_+ 変換でよい。しかし、これらの初期値が判らないこともある。この場合には、既知である $t=-0$ の初期値を用いて解くことができる L_- ラプラス変換が便利である。

L_- ラプラス変換について述べる。スイッチを入れるとき、スイッチの間の電圧を考え、スイッチを切るとき、スイッチを流れる電流を考えてみよう。すると、 $-0 \leq t \leq +0$ で両者は有限で、 $t \geq +0$ では両者は完全に0であるからそれらの L_- ラプラス変換は0となる。



$t=0$ でSオン

$$V_s(s) = \int_{-0}^{\infty} v_s e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} v_s dt = 0$$

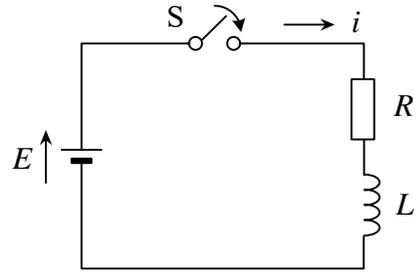


$t=0$ でSオフ

$$I_s(s) = \int_{-0}^{\infty} i_s e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} i_s dt = 0$$

回路の式を L_- 変換して解く場合、スイッチを入れたり、切ったりする直前の回路を含めた電圧、電流について微分方程式を立てる必要がある。このとき、スイッチを入れる間の電圧と、スイッチを切る間の電流が $t \geq +0$ の回路では扱えない。しかし、上式に示したように、これらの L_- ラプラス変換は0となる。従って、 $t=-0$ の初期値を用い、初期値以外はスイッチをオンまたはオフした後（ $t \geq +0$ ）の回路より、 L_- ラプラス変換が求まる。

例題1 図の回路で $t=0$ でスイッチ S をオンしたとき、流れる電流をラプラス変換を使って求めよ。



(解) 図より、

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (t \geq +0)$$

L_+ ラプラス変換して、

$$\frac{E}{s} = RI(s) + LsI(s) - Li(+0)$$

ここで、コイルの電流は急に变化しないので、スイッチを入れた直後 $i(+0) = 0$

$$\therefore \frac{E}{s} = (R + Ls)I(s)$$

恒等式

$$I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{R + Ls} = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

$$aR + aLs + bs = E$$

$$a = \frac{E}{R}$$

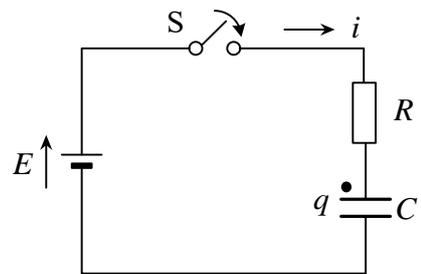
$$b = -\frac{L}{R}E$$

$$\text{逆変換して、} i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

(注) $t=+0$ はスイッチを入れた直後を意味する。このように $t=+0$ の値が判つているときは L_+ ラプラス変換でよい。

例題2 図の回路で、 $t=0$ でスイッチ S をオンしたとき、コンデンサの電荷をラプラス変換により求めよ。

但し、コンデンサには、 $t \leq -0$ で q_0 の電荷が蓄えられていたとする。



(解) 図より、 $t \geq +0$ で $E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

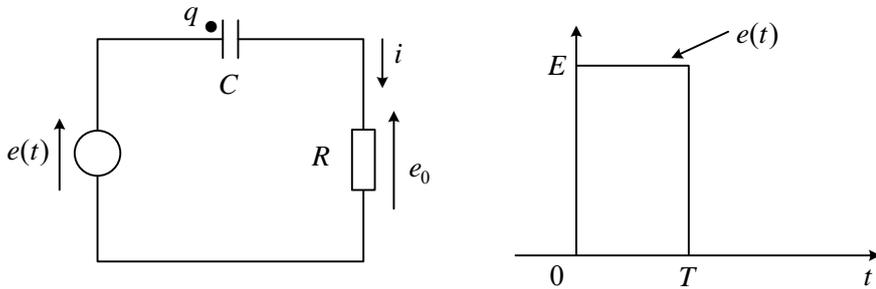
$$L_+ \text{ ラプラス変換して、} \frac{E}{s} = RsQ(s) - Rq(+0) + \frac{Q(s)}{C}$$

ここで、コンデンサの電荷は急に变化しないので、 $q(+0) = q_0$

$$Q(s) = \frac{E + Rq_0s}{s(Rs + 1/C)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{Rs + 1/C} = \frac{CE}{s} + \frac{q_0 - CE}{s + 1/(CR)}$$

$$\text{逆変換して、} q(t) = CE + (q_0 - CE)e^{-\frac{t}{CR}}$$

例題3 図のRC微分回路に、図のようなパルス電圧を加えた。出力電圧 e_0 を求めよ。但し、コンデンサの電荷は $t \leq -0$ で0とする。



(解) 電源電圧は、単位ステップ関数を用いて、次式で表せる。

$$e(t) = E[u(t) - u(t-T)] \quad \text{①}$$

成立する回路方程式は、

$$Ri + \frac{q}{C} = E[u(t) - u(t-T)] \quad \text{②} \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \text{③}$$

②, ③式を L_+ ラプラス変換して $t = +0$ の電荷の値を $q(+0)$ として

$$RI(s) + \frac{Q(s)}{C} = \frac{E}{s}(1 - e^{-sT}) \quad \text{④} \quad I(s) = sQ(s) - q(+0) \quad \text{⑤}$$

コンデンサの電荷は急に变化しないので、 $q(+0) = 0$ である。④, ⑤より

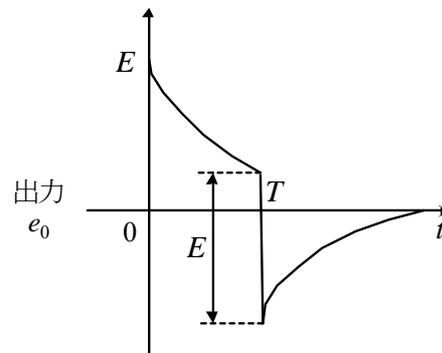
$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E}{R}(1 - e^{-sT}) \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \\ &= \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} - \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} e^{-sT} \end{aligned} \quad \text{⑥}$$

時間推移の公式を利用して、⑥式を逆ラプラス変換すると

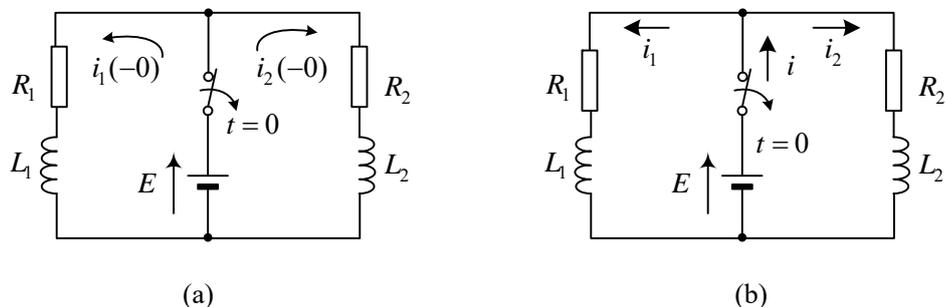
$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t-T}{RC}} u(t-T) \quad \text{⑦}$$

出力電圧は次式のように求まる。

$$e_0 = E e^{-\frac{t}{RC}} - E e^{-\frac{t-T}{RC}} u(t-T) \quad \text{⑧}$$



例題4 図(a)の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフする時、流れる電流を求めよ。スイッチをオフする前は定常状態とする。



(解) (b)図のスイッチを切る直前 ($t \geq -0$) からの回路方程式を立てる。

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 \quad \text{①}$$

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{②}$$

①, ②を L -変換すると

$$L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(-0) + R_1 I_1(s) = L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(-0) + R_2 I_2(s) \quad \text{③}$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

ここで、スイッチを切るとき $-0 \leq t \leq +0$ の電流は有限で、 $+0 \leq t$ では0だから、

$$I(s) = \int_{-0}^{\infty} i e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} i dt = 0 \quad \therefore \quad I_1(s) + I_2(s) = 0 \quad \text{④}$$

これを③に代入し $I_2(s)$ を消去すると、

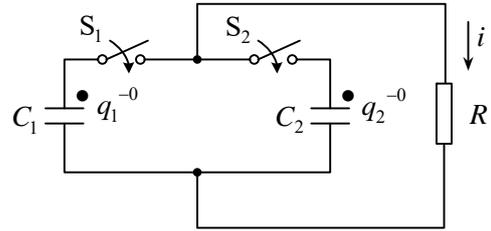
$$I_1(s) = \frac{L_1 i_1(-0) - L_2 i_2(-0)}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)} \quad \text{⑤}$$

よって、初期値 $i_1(-0) = \frac{E}{R_1}$, $i_2(-0) = \frac{E}{R_2}$ を用いて、⑤より

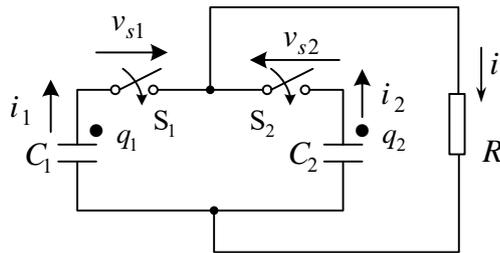
$$\begin{aligned} i_1(t) &= L^{-1}[I_1(s)] = L^{-1} \left[\frac{L_1 E/R_1 - L_2 E/R_2}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)} \right] \\ &= \frac{L_1 E/R_1 - L_2 E/R_2}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} \end{aligned}$$

$t \geq +0$ では、 L_1 と L_2 には同じ電流が流れるから、この初期値は共通である。しかし、 $t = -0$ では L_1 と L_2 に流れる電流は異なっている。ここに L_+ 変換と L_- 変換の差がある。

例題5 $t=0$ でスイッチ S_1, S_2 を閉じるとき、 R を流れる電流を求めよ。但し、 C_1, C_2 には、図の極板に q_1^{-0}, q_2^{-0} の電荷が充電されていた。



(解) スイッチをオンするとき、スイッチの電圧を図のように定義する。



$t \geq -0$ のとき、以下の式が成り立つ。

$$\frac{q_1}{C_1} + v_{s1} = \frac{q_2}{C_2} + v_{s2} = Ri \quad (1)$$

$$i_1 + i_2 = i, \quad i_1 = -\frac{dq_1}{dt}, \quad i_2 = -\frac{dq_2}{dt} \quad (2)$$

①を L -変換して、 v_{s1}, v_{s2} のラプラス変換は0だから $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = RI \quad (3)$

②を L -変換して、 $I = I_1 + I_2, \quad I_1 = -sQ_1 + q_1^{-0}, \quad I_2 = -sQ_2 + q_2^{-0} \quad (4)$

③, ④より I を求めると、

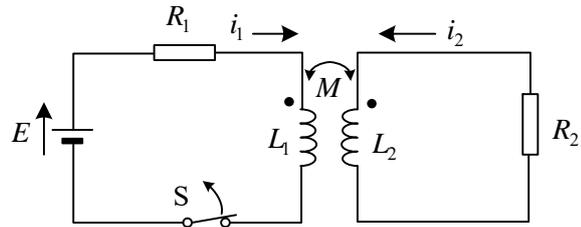
$$I(s) = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)s + 1}$$

$$i(t) = L^{-1}[I(s)] = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$$

③より、 $q_1(t) = C_1 \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}, \quad q_2(t) = C_2 \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$

(注意) 結果として、 $t \geq +0$ の回路で考えて、初期値に $t = -0$ の値を用いると、 L -変換が得られることが判る。

例題6 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフした。電流 i_2 を求めよ。スイッチを切る前は定常状態とする。



(解) スイッチを切る直前 ($t=-0$),
回路は定常状態なので,

$$i_1(-0) = E/R_1, \quad i_2(-0) = 0 \quad \text{①}$$

スイッチを切った後、 $i_1(t) = 0$ ($t \geq +0$)、 t が -0 から $+0$ の間 i_1 は有限であるから、 L 変換して

$$I_1(s) = 0 \quad \text{②}$$

i_2 の回路について、微分方程式を立てると ($t > -0$)

$$M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \quad \text{③}$$

③を L 変換して,

$$sM I_1 - M i_1(-0) + sL_2 I_2 - L_2 i_2(-0) + R_2 I_2 = 0 \quad \text{④}$$

①, ②を代入して

$$-M \frac{E}{R_1} + sL_2 I_2 + R_2 I_2 = 0 \quad \therefore I_2 = \frac{ME/R_1}{R_2 + sL_2}$$

$$\therefore i_2(t) = L^{-1} \left[\frac{ME/R_1}{R_2 + sL_2} \right] = \frac{ME}{L_2 R_1} e^{-\frac{R_2}{L_2} t}$$

☆ ラプラス変換を使わないで解く方法

L_2 の電圧は、 $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ だから、 $i_1(+0) = 0, i_2(-0) = 0$ を考慮して、

鎖交磁束不変の理より $L_2 i_2(-0) + M i_1(-0) = L_2 i_2(+0) + M i_1(+0)$ だから

$$M i_1(-0) = L_2 i_2(+0)$$

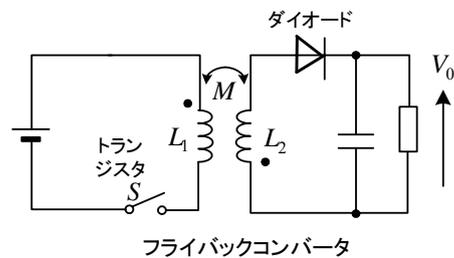
$$\therefore i_2(+0) = \frac{ME}{L_2 R_1} \quad \dots \text{①}$$

微分方程式を立てると、 $t \geq +0$ で

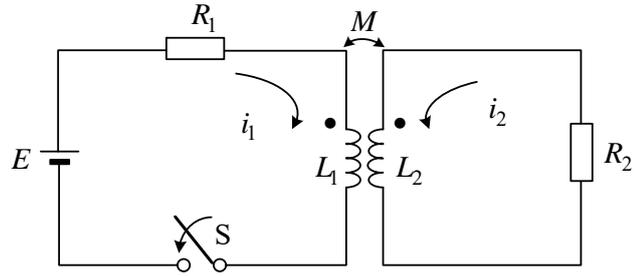
$$R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{②}$$

①, ②より容易に $i_2(t)$ が求まる。

この回路は、フライバックコンバータとして使われている。トランジスタで作るスイッチSをオン、オフして、直流電圧 V_0 の値を自由に変えることができる。



例題7 図の回路で $t=0$ でスイッチを入れるとき、電流 i_1 をラプラス変換を使って求めよ。スイッチを入れる前 $i_2=0$ とする。また、 $L_1L_2-M^2>0$ とする。



(解) スイッチを入れた後、以下の微分方程式が成り立つ。

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad ① \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad ②$$

スイッチを入れた直後、①、②のそれぞれの鎖交磁束は0のままだから（鎖交磁束不変）、

$$L_1 i_1(+0) + M i_2(+0) = 0, \quad L_2 i_2(+0) + M i_1(+0) = 0$$

$$\therefore i_1(+0) = i_2(+0) = 0 \quad ③$$

③式を考慮して、①、②式をラプラス変換すると次式を得る。

$$\frac{E}{s} = R_1 I_1 + s L_1 I_1 + s M I_2 \quad ④ \quad 0 = R_2 I_2 + s L_2 I_2 + s M I_1 \quad ⑤$$

④、⑤の連立方程式を解いて

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta s^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) s + R_1 R_2} \begin{bmatrix} (R_2 + s L_2) E / s \\ -M E \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta (s - s_1)(s - s_2)} \begin{bmatrix} (R_2 + s L_2) E / s \\ -M E \end{bmatrix} \quad ⑥$$

ただし、 $\Delta = L_1 L_2 - M^2$

$$s_1, s_2 = \frac{-(L_1 R_2 + L_2 R_1) \pm \sqrt{(L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}}{2 \Delta}$$

s_1 は+、 s_2 は-に対応する。

⑥式の I_1 は、以下のように部分分数に展開できる。

$$I_1 = \frac{C}{s} + \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \quad ⑦$$

$$C = s I_1|_{s=0} = \frac{R_2 E}{\Delta s_1 s_2} = \frac{E}{R_1} \quad ⑥ \text{の分母の根と係数の関係} \quad s_1 s_2 = \frac{R_1 R_2}{\Delta}$$

$$A = (s - s_1) I_1|_{s=s_1} = \frac{E}{s_1 - s_2} \left(\frac{L_2}{\Delta} + \frac{R_2}{s_1 \Delta} \right) \quad B = (s - s_2) I_1|_{s=s_2} = \frac{E}{s_2 - s_1} \left(\frac{L_2}{\Delta} + \frac{R_2}{s_2 \Delta} \right)$$

⑦式を逆ラプラス変換して

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \quad (\text{この結果は第15章例題10の結果と一致する})$$