第 17 章　分布定数回路

これまでの章では，回路の抵抗，コンデンサ，コイルを結ぶ電線は理想的で導体として考えてきた。しかし，長い送電線では，抵抗やインダクタンスそれに対地との静電容量などを無視することができない。また，短い線でも周波数が非常に高い場合（通信の分野）にもそれらを無視できない。この章では，これらの場合を考える。

○　分布定数回路の基本式

平行２線の線路を考える。

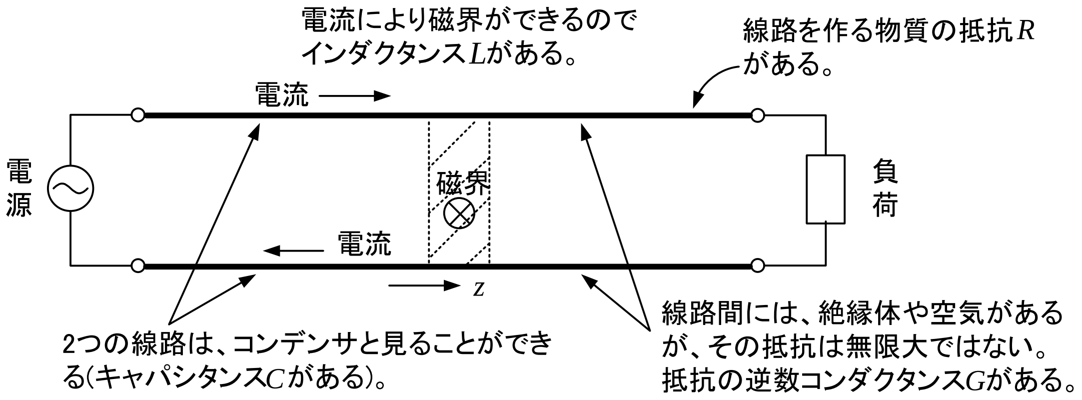


図 17-1　電線やケーブルはどんな素子で表せるか？

これまでの電線では，上記のR，L，C，G　は全て無視し，0 と考えていた。電源からの座標をxとし，短い区間Δxをとると，その間の等価回路は図のように考えられる。

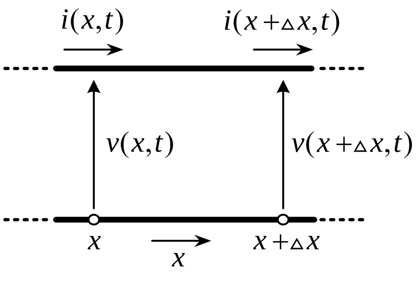


図 17-2　微小区間の電圧，電流

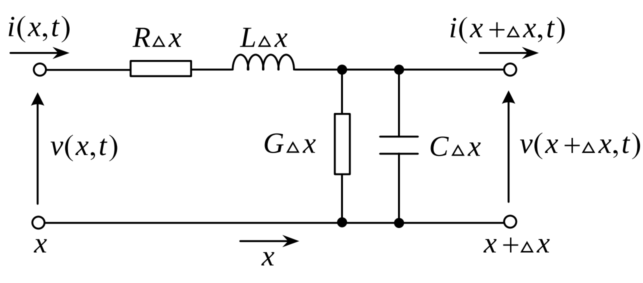


図 17-3　等価回路

抵抗は線路の長さに比例するが，1m 当りの抵抗を（往復分）$R\,[\Omega/\mathrm{m}]$とすると，微小区間Δxでは，$R\Delta x$となる。インダクタンスも長さに比例し，1m 当りのインダクタンス（往復分）$L\,[\mathrm{H/m}]$とすると，Δx間では$L\Delta x$となる。静電容量も長さに比例し，1m 当り $C\,[\mathrm{F/m}]$とすると，Δx間では$C\Delta x$となる。線路間の絶縁抵抗は長さに反比例するが，その逆数であるコンダクタンスは長さに比例し，1m 当り $G\,[\mathrm{S/m}]$とすると，Δx間では$G\Delta x$となる。これにより，図の等価回路が書

ける。微小区間であるから，4 つの素子の順番はどれでもよい。電圧や電流が時間 t だけの関数ではなく位置 x の関数にもなっているのは，等価回路から判るように場所によって値が異なるからである。このような回路は**分布定数回路**(distributed constant circuit)と呼ばれる。

テイラーの定理より

$$f(x+\vartriangle x, y+\vartriangle y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\vartriangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\vartriangle y$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\vartriangle x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\vartriangle y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\vartriangle x \vartriangle y\right) \quad + \cdots$$

が成立し，$\vartriangle x$，$\vartriangle y$ が小さいときには 2 次以上の項は無視できて

$$f(x+\vartriangle x, y+\vartriangle y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\vartriangle x + \frac{\partial f}{\partial y}\vartriangle y$$

と近似できる。変数が２つ以上のとき，偏微分となる。

これを利用して，

$$i(x+\vartriangle x, t) = i(x,t) + \frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\vartriangle x \tag{17-1}$$

$$v(x+\vartriangle x, t) = v(x,t) + \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\vartriangle x \tag{17-2}$$

となる。

等価回路より，

$$v(x,t) = R\vartriangle x\, i(x,t) + L\vartriangle x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + v(x+\vartriangle x, t) \tag{17-3}$$

(17-2)を用いて，

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\vartriangle x = R\vartriangle x\; i(x,t) + L\vartriangle x \frac{\partial i(x,\,t)}{\partial t}$$

$\vartriangle x$ で割り，$v(x,t)$，$i(x,t)$　を v，i と書くと

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \tag{17-4}$$

電流については，

$$i(x+\vartriangle x, t) = i(x,t) - G\vartriangle x\, v(x+\vartriangle x, t) - C\vartriangle x \frac{\partial v(x+\vartriangle x, t)}{\partial t}$$

(17-1)，(17-2)を用いて，$\vartriangle x^2$ の項は無視すると

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}\vartriangle x = -G\vartriangle x\; v(x,\,t) - C\vartriangle x\; \frac{\partial v(x,\,t)}{\partial t}$$

$\vartriangle x$ で割り，$v(x,t)$，$i(x,t)$ を v，i と書くと

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G v + C\frac{\partial v}{\partial t} \tag{17-5}$$

(17-4)，(17-5)は，分布定数回路の出発点となる。

○ 交流電源に対する定常状態の基本式

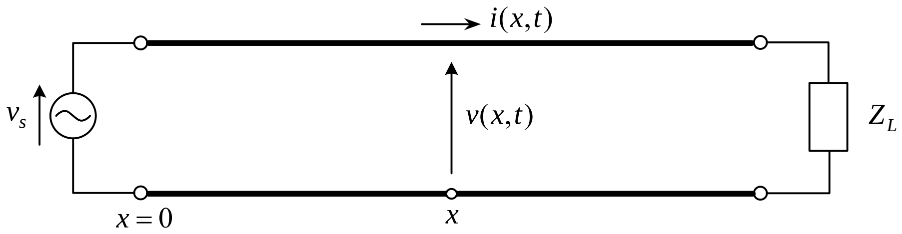


図 17-4　分布定数回路（線路）に交流電源を接続

図 17-4 の電源電圧を $v_s(t)=V_s\sin\omega t$ とすると，電源から x[m] 離れた点の電圧 $v(x,t)$，電流 $i(x,t)$ は，定常状態では次式で表される。すなわち，場所によって振幅や位相は異なるが，電源と同じ周波数の正弦波である。分布定数回路も一定の R,L,C,G が集まってできた回路であるから，交流電源がつながった定常状態では一般の交流回路と同様と考えてよいであろう。

$$v(x,t)=V_m(x)\sin\left(\omega t+\theta_v(x)\right) \tag{17-6}$$

$$i(x,t)=I_m(x)\sin\left(\omega t+\theta_i(x)\right) \tag{17-7}$$

これらに対するフェーザを

$$V(x)\equiv V_m(x)e^{j\theta_v(x)} \tag{17-8}$$

$$I(x)\equiv I_m(x)e^{j\theta_i(x)} \tag{17-9}$$

と定義する。通信関係では $\sqrt{2}$ で割らない形で定義するので，ここではそれに従う。フェーザから瞬時値を求めるには，

$$v(x,t)=\mathrm{I_m}\left(V(x)e^{j\omega t}\right) \tag{17-10}$$

$$i(x,t)=\mathrm{I_m}\left(I(x)e^{j\omega t}\right) \tag{17-11}$$

ここで，$\mathrm{I_m}(\,)$ は虚部を意味する。

(17-10), (17-11)を(17-4), (17-5)に代入すると，次式のフェーザ表示式が得られる。このとき，$\partial/\partial x$ はフェーザが x のみの関数だから d/dx，$\partial/\partial t$ は時間に関しての偏微分なので $j\omega$ が掛けられる。

$$-\frac{dV(x)}{dx}=RI(x)+j\omega LI(x) \tag{17-12}$$

$$-\frac{dI(x)}{dx}=GV(x)+j\omega CV(x) \tag{17-13}$$

一方の式を x で微分し，他方の式を代入すれば

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2}=\gamma^2V(x) \tag{17-14}$$

$$\frac{d^2 I(x)}{d x^2} = \gamma^2 I(x) \tag{17-15}$$

ただし，γ（ガンマ）は，

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \tag{17-16}$$

(17-14)を解くと，特性方程式は　$p^2 = \gamma^2$　　$\therefore p = \pm\gamma$　　だから

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \tag{17-17}$$

(17-17)を(17-12)に代入して，

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \tag{17-18}$$

となる。A, B は線路両端の条件による決る定数（一般に複素数）である。ここで，

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \tag{17-19}$$

Z_0 は**特性インピーダンス**(characteristic impedance)，γ は**伝搬（でんぱん）定数**(propagation constant)と呼ばれる。

$$\gamma = \alpha + j\beta \qquad \alpha \geqq 0 \tag{17-20}$$

とおいて，α を**減衰定数**(attenuation constant)，β を**位相定数**(phase constant)と呼ぶ。(17-16)=(17-20)の両辺を２乗して，実部と虚部を等しいとおくことにより

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG)\right\}} \tag{17-21}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG)\right\}} \tag{17-22}$$

(17-17)，(17-18)は，分布定数回路の基本となる重要な公式であるから，是非記憶してほしい。実際の瞬時値は，(17-10)，(17-11)に代入して求まる。

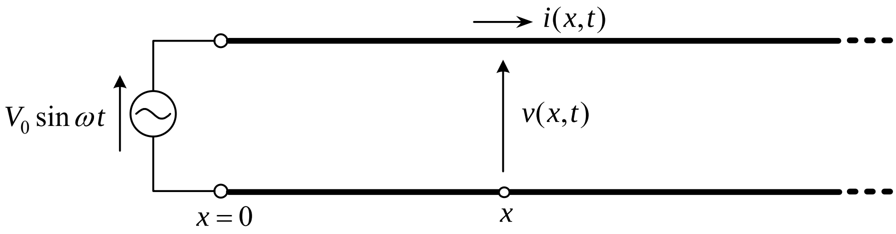
$$\begin{aligned} v(x,t) &= \mathrm{I_m}(V(x)e^{j\omega t}) \\ &= \mathrm{I_m}((Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x})e^{j\omega t}) \\ &= \mathrm{I_m}(Ae^{-\alpha x}e^{j(\omega t - \beta x)}) + \mathrm{I_m}(Be^{\alpha x}e^{j(\omega t + \beta x)}) \end{aligned} \tag{17-23}$$

第１項は x が増加する方向に進む波，第２項は逆に x が減少する方向に進む波を表し，一般にはこれらの波を加え合わせたものとなる。一般に，A, B は複素数なので，注意すること。

電流については，第１項，第２項とも特性インピーダンス Z_0 で割ることで得られる。第２項のマイナスついては，第２項が電流の矢印の方向と逆方向に進むことに対応している。

例題１　図の半無限長線路で，x 点の電圧と電流を求めよ。

但し，特性インピーダンス Z_0，伝搬定数 $\gamma = \alpha + j\beta \quad (\alpha > 0)$ とする。



（解）$v(x,t)$ のフェーザ $V(x)$ は次式で与えられる。

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} = Ae^{-\alpha x}e^{-j\beta x} + Be^{\alpha x}e^{j\beta x} \qquad ①$$

境界条件として，

（ｉ）$x = 0$　で，$V(0) = V_0$（実数）

（ⅱ）$x = \infty$　で，$V = 0$，$I = 0$

従って，（ⅱ）を適用すると，$B = 0$　でなくてはならない。

よって，①より，

$$V(x) = Ae^{-\gamma x}$$

（ｉ）を適用して，$A = V_0$

$$\therefore V(x) = V_0 e^{-\gamma x} = V_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \qquad ②$$

電流は，

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) = \frac{V_0}{Z_0}e^{-\gamma x} = \frac{V_0}{Z_0}e^{-\alpha x}e^{-j\beta x} \qquad ③$$

②より，

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \mathrm{I_m}(V(x)e^{j\omega t}) \\ &= \mathrm{I_m}(V_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}) \qquad ④ \\ &= V_0 e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x) \end{aligned}$$

③より，

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \mathrm{I_m}\left(I(x)e^{j\omega t}\right) \\ &= \frac{V_0}{|Z_o|}e^{-\alpha x}\sin(\omega t - \beta x - \arg Z_0) \qquad \because Z_0 = |Z_o|e^{j\arg Z_0} \end{aligned} \qquad ⑤$$

$t = 0$ のとき，$v = -V_0 e^{-\alpha x}\sin\beta x$

$t = \dfrac{T}{4}$ のとき，$v = V_0 e^{-\alpha x}\sin(\dfrac{\pi}{2} - \beta x) = V_0 e^{-\alpha x}\cos\beta x$

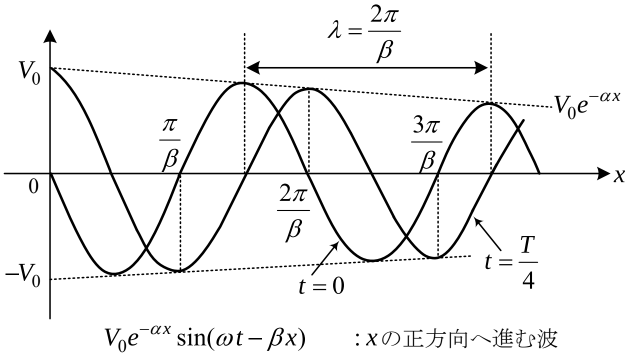


図 17-5　**進行波**(travelling wave)

$\sin(\omega t - \beta x)$　について

・　ある点 $x = x_0$ では，　$\sin(\omega t - \overbrace{\beta x_0}^{一定})$　∴周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$　（時間について, 正弦波）

・　ある時間 $t = t_0$ では，　$\sin(\underbrace{\omega t_0}_{一定} - \beta x)$　∴波長 $\lambda = \dfrac{2\pi}{\beta}$　（場所について, 正弦波）

・　図より，時間が $T/4$ 変わると，波は x 方向に $\lambda/4$ 進んでいる。

よって，波の速度 v_p は**位相速度**(phase velocity)と呼ばれ，

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta}$$

となる。$\omega t - \beta x =$ 一定　なら sin の値が変化しないから, 両辺を t で微分して求めても良い。

無損失線路　　$R = G = 0$　の場合，損失が無いので無損失線路と呼ばれる。

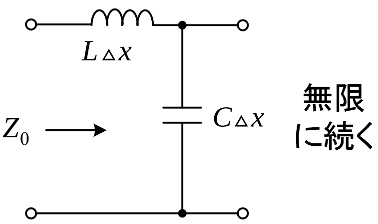
伝搬定数　$\gamma = \sqrt{j\omega C \cdot j\omega L} = j\omega\sqrt{LC}$　　$\therefore \alpha = 0$，$\beta = \omega\sqrt{LC}$

特性インピーダンス　$Z_0 = \sqrt{L/C}$

従って，④，⑤より

$$v(x,t) = V_0 \sin\left\{\omega(t - \sqrt{LC}x)\right\}$$

$$i(x,t) = V_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left\{\omega(t - \sqrt{LC}x)\right\}$$

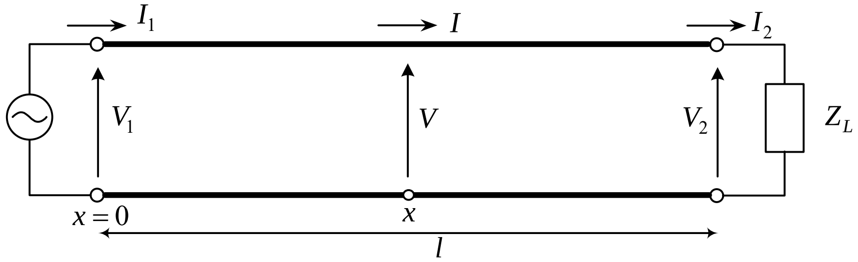


このことから，どの点においても，それから右側に純抵抗 $\sqrt{L/C}$ があるとした電流が流れる。実際には抵抗は無いが，L と C が無限につながっているので，そこにエネルギーが蓄えられていくと考えられる。図に示す L と C の無限に続く回路の反復インピーダンスについて考えよう。この回路の K 行列を求め，$A = 1 - \omega^2 LC\Delta x^2, B = j\omega L\Delta x, C = j\omega C\Delta x, D = 1$　を得る。(13-19)より反復インピーダンスは次式のように求まる。

$$Z_{K1} = \frac{j\omega L\Delta x}{2} \pm \frac{1}{j}\sqrt{\frac{(\omega L\Delta x)^2}{4} - \frac{L}{C}} \qquad \text{（+を採用）}$$

$\omega\Delta x$ の項を無視すると，Z_{K1} の実部正より, 特性インピーダンスは反復インピーダンスに等しい。

例題２　長さlの線路で，$x=0$の点の電圧V_1，電流I_1と$x=l$の点での電圧V_2，電流I_2（いずれもフェーザ）の関係を求めよ。また，任意の点xでの電圧V，電流IとV_2，I_2の関係を求めよ。



（解）一般に，　$V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$　①

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \qquad ②$$

$x=l$のとき，$V=V_2$，$I=I_2$　だから

$$V_2 = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} \qquad ③$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}) \qquad \therefore I_2 Z_0 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} \qquad ④$$

③＋④より，$A = \dfrac{V_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l}$　⑤

③－④より，$B = \dfrac{V_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l}$　⑥

$x=0$のとき，$V=V_1$，$I=I_1$　だから ①，②より

$$V_1 = A + B = V_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + Z_0 I_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0}(A - B) = \frac{V_2}{Z_0} \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + I_2 \cdot \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}$$

ここで，$\sinh rl \equiv \dfrac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$　，　$\cosh rl \equiv \dfrac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}$　　とおくと

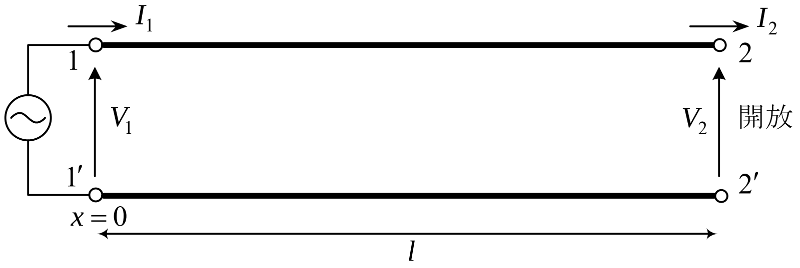
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \dfrac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad ⑦$$

任意の点xについては，⑤式でlのかわりに両者間の距離$l-x$を用いればよく，

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(l-x) & Z_0 \sinh \gamma(l-x) \\ \dfrac{1}{Z_0} \sinh \gamma(l-x) & \cosh \gamma(l-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad ⑧$$

（注）　⑦式より，縦続行列 Kが得られている（対称回路である）。第 13 章例題 7 より，反復パラメータは，$Z_{K1} = Z_{K2} = \sqrt{B/C} = Z_0$，$\theta_K = \gamma l$ となる。

例題３　長さlの無損失線路の片方が開放されているとき，もう片方の端子からみたインピーダンスZを求めよ。



（解）一般に

$$V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad ①$$

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad ②$$

$x = l$ のとき，$V = V_2$，$I = I_2 = 0$ より

$$V_2 = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}, \qquad 0 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} \qquad \therefore A = \frac{V_2}{2}e^{\gamma l} \quad , \quad B = \frac{V_2}{2}e^{-\gamma l}$$

$x = 0$ で，$V = V_1$，$I = I_1$ より

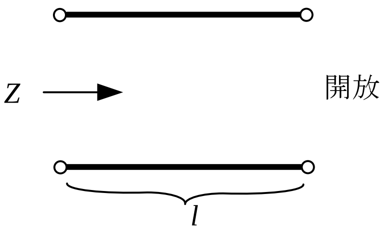
$$V_1 = A + B = V_2\frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = V_2\frac{e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}}{2} = V_2\cos\beta l$$

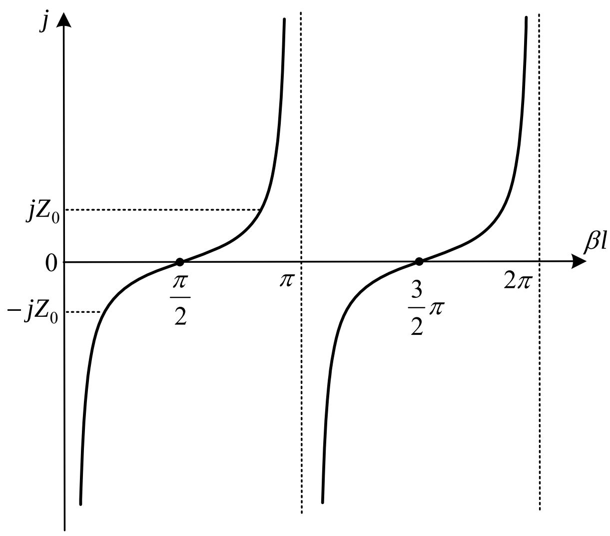
$$I_1 = \frac{1}{Z_0}(A - B) = \frac{V_2}{Z_0}\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \frac{V_2}{Z_0}\frac{e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}}{2} = \frac{V_2}{Z_0}j\sin\beta l$$

$\because$ 無損失線路であるから，$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$，$Z_0 = \sqrt{L/C} > 0$

従って，

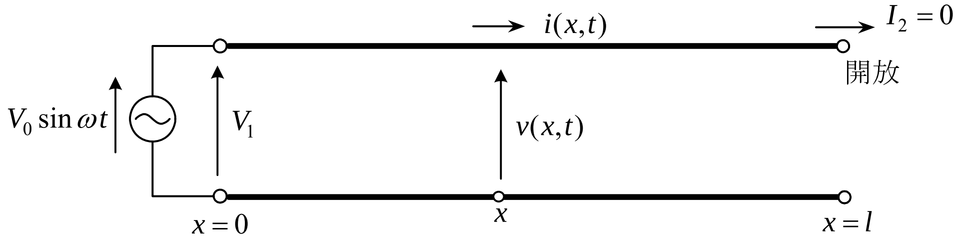
$$Z = \frac{V_1}{I_1} = -jZ_0\frac{\cos\beta l}{\sin\beta l}$$





βlが0から2πになるような長さに線路を切断すると，Zは$-j\infty$から$j\infty$の範囲で図のように変化する（CからLに変化)。L，C　が決まっている線路の長さを変えるといろんなインピーダンスが作れるということが判る。

例題４　図の長さ l の無損失線路の片方が開放されている。$l=\pi/\beta$（β：位相定数）のとき，任意の点 x における電圧と電流の瞬時値 $v(x,t)$，$i(x,t)$ を求めよ。



（解）一般に，

$$V=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x} \quad ① \qquad I=\frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x}-Be^{\gamma x}) \quad ②$$

$x=l$ のとき，$I=I_2=0$　であるから②より

$$0=Ae^{-\gamma l}-Be^{\gamma l} \qquad \therefore A=Be^{2\gamma l}$$

ここで，$\gamma=j\beta$　であるから，$2\gamma l=2j\beta\cdot\dfrac{\pi}{\beta}=j2\pi$　　$\therefore A=Be^{j2\pi}=B$　　③

$x=0$ で，フェーザ表示で振幅を用いているから　$V=V_0$　なので，①より，

$$V_0=A+B=2A \qquad \therefore A=V_0/2 \quad ④$$

③，④を①，②へ代入して，$\gamma=j\beta$ とおくと

$$V=\frac{V_0}{2}(e^{-j\beta x}+e^{j\beta x})=V_0\cos\beta x$$

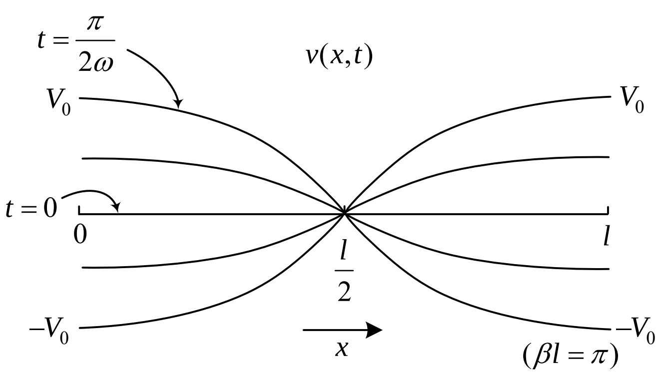
$$I=\frac{V_0}{2Z_0}(e^{-j\beta x}-e^{j\beta x})=-j\frac{V_0}{Z_0}\sin\beta x$$

求める瞬時値は，$Ve^{j\omega t}$，$Ie^{j\omega t}$ の虚部であるから

$$v(x,t)=\frac{V_0}{2}\left\{\sin(\omega t-\beta x)+\sin(\omega t+\beta x)\right\}=V_0\cos\beta x\sin\omega t$$

$$i(x,t)=\frac{V_0}{2Z_0}\left\{\sin(\omega t-\beta x)-\sin(\omega t+\beta x)\right\}=-\frac{V_0}{Z_0}\sin\beta x\cos\omega t$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}>0$$

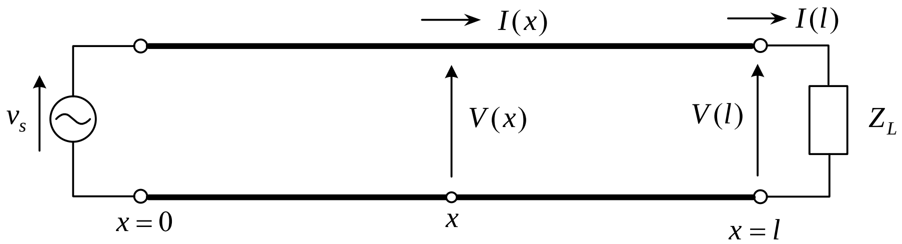


$x=0$ のところでは，電圧は時間の変化により $-V_0\sim V_0$ の範囲で正弦波として変化する。$x=l/2$ のところでは常に $v=0$ で節となる。**定在波**(standing wave)と呼ばれる。線路の長さが特殊なとき起こる。

例題５　長さlの線路で，$x=l$の点にインピーダンスZ_Lが接続されている。電圧$V(l)$，電流$I(l)$（いずれもフェーザ）を**入射波**(incident wave)$V_i(l)$, $I_i(l)$と**反射波**(reflected wave)$V_r(l), I_r(l)$に分けて，

$$V(l)=V_i(l)+V_r(l)$$
$$I(l)=I_i(l)-I_r(l)$$

とおくとき，$V_i(l), V_r(l), I_i(l), I_r(l)$を書け。また，反射波/入射波をインピーダンスで表せ。



（解）一般式で，$x=l$とおいて

$$V(l)=Ae^{-\gamma l}+Be^{\gamma l} \qquad I(l)=\frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma l}-Be^{\gamma l}) \qquad ①$$

入射波はxが増える方向に進む波，反射波はxの減少する方向に進む波と考えて

$$V_i(l)=Ae^{-\gamma l},\quad V_r(l)=Be^{\gamma l}$$

$$I_i(l)=Ae^{-\gamma l}/Z_0,\quad I_r(l)=Be^{\gamma l}/Z_0$$

反射波/入射波をρ（ロー）とおくと，

$$\rho=\frac{V_r(l)}{V_i(l)}=\frac{I_r(l)}{I_i(l)}=\frac{B}{A}e^{2\gamma l} \qquad ②$$

負荷Z_Lについて，

$$V(l)=Z_L\,I(l) \qquad ③$$

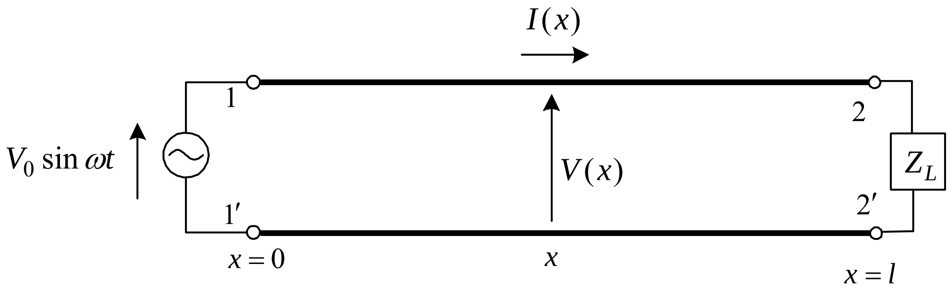
①，②，③より

$$Z_L=Z_0\frac{1+\rho}{1-\rho} \qquad \therefore\quad \rho=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}$$

ρは**反射係数**(reflection coefficient)と呼ばれている。$Z_L=Z_0$すなわち特性インピーダンスと負荷のインピーダンスが等しいとき反射係数は 0 で，反射は生じない（$B=0$で反射波も 0)。これは無限長線路と同じである。通信分野で信号を送る場合には，一般に反射を避けなくてはいけないので，線路の接続点で左右を見たインピーダンスを等しくすることが行われる。これを**インピーダンス整合（インピーダンスマッチング）**という。逆に，反射波を利用したものにレーダ（電波探知器）がある。音では，魚群探知器，超音波診断などがある。

なお，音楽を建物の中で聞くときも，反射の問題は重要である。反射によって定在波が起こると，あるところの席では音が大きく聞こえ，あるところの席ではほとんど聞こえなくなる。人の声には 20～5kHz の帯域（いろんな周波数の波が集まっている）があり，結果としてくずれた音が聞こえる。

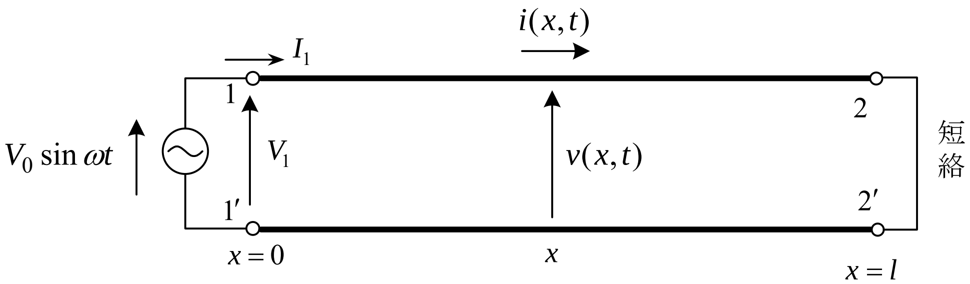
問題１　長さlの線路で，図のように電源電圧と右端のインピーダンスが与えられている。x点での電圧$V(x)$，電流$I(x)$（いずれもフェーザ）を求めよ。



（解）$V(x)=Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}$　，　$I(x)=\dfrac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x}-Be^{\gamma x})$

ただし，$A=\dfrac{V_0\,e^{2\gamma l}}{\rho+e^{2\gamma l}}$，$B=\dfrac{\rho V_0}{\rho+e^{2\gamma l}}$　反射係数　$\rho=\dfrac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}$

問題２　長さlの無損失線路の片方が短絡されているとき，もう片方の端子からみたインピーダンスZを求めよ。また，$l=3\pi/(2\beta)$（β：位相定数）のとき，任意の点xにおける電圧と電流の瞬時値$v(x,t)$，$i(x,t)$を求め，それらの最大値を横軸xに対し図示せよ。



(解)　$Z = jZ_0 \tan \beta l$

ここで，$Z_0=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

$$v(x,t)=\frac{V_0}{2}\left\{\sin(\omega t-\beta x)+\sin(\omega t+\beta x)\right\}$$
$$=V_0\cos\beta x\sin\omega t$$

$$i(x,t)=\frac{V_0}{2Z_0}\left\{\sin(\omega t-\beta x)-\sin(\omega t+\beta x)\right\}$$
$$=-\frac{V_0}{Z_0}\sin\beta x\cos\omega t$$