第４章　コイル

電線をぐるぐる巻いたものがコイル(coil)である。コイルの電流が変化すると磁束が変化し，起電力を発生する。本章では，コイルの基本的性質とコイルを含む直流回路を考える。

○　右ねじの法則

図 4-1 の様に電流を流すとその周りに磁気の場（磁界，磁場）ができる。電磁石はこれを利用している。**磁界***を**磁束密度 $\boldsymbol{B}$** [T]で表す。回路では $\boldsymbol{B}$ を集めた**磁束 ϕ** が電圧に直接関係してくる。図は**磁束密度 $\boldsymbol{B}$** の力線である**磁束線****(lines of magnetic flux)を用いて磁界の様子を示している。**磁束密度 $\boldsymbol{B}$** の磁束線は常に閉曲線となり，接線がその点の $\boldsymbol{B}$ の方向，密度が大きさを表す。

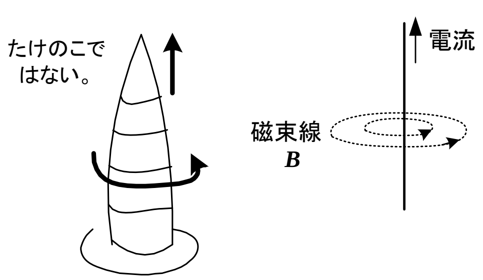


図 4-1　アンペアの右ねじの法則

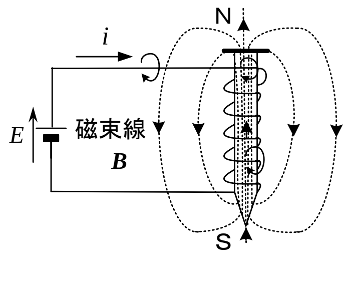


図 4-2　電磁石

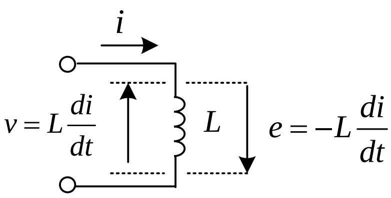
*磁界（磁場）は磁気の場としての広い意味で使う場合と**磁界の強さ $\boldsymbol{H}$** を指す場合がある。

**磁束線を単に磁束(flux)と呼ぶこともある（山田直平：電気磁気学，電気学会）。

コイルの性質

1. コイルの電圧 v と電流 i の関係は

$$v = L\,\frac{d\,i}{d\,t} \qquad (4\text{-}1)$$

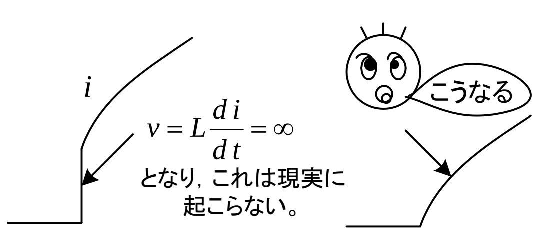


v と i の矢印を逆向きに選ぶと，マイナスがつかない。e は i と同方向に選んでいるのでマイナスがつく。この e は**誘導起電力**を表わす。L は**自己インダクタンス**(self-inductance)[H]（henry ヘンリー）と呼ばれ，常に正である。コイルは**インダクタ**とも言われる。$\psi = N\phi = L\,i$ （ﾌﾟｻｲ)は**鎖交磁束**(linkage flux)と呼ばれ，これにより自己インダクタンスが定義される。なお，N ：**コイルの巻数**，ϕ ：**磁束**[Wb]である。(4-1)は，**ファラデーの電磁誘導の法則**から導かれ，コイルの巻き方に関係しない。付録を是非一読して欲しい。

2. コイルの電流は急に変化しない。

すなわち連続的に変化し，ジャンプしない。

電圧は急に変化することがある。



3．コイルに現時刻tで電流iが流れているとき，蓄えられているエネルギーWは，

$$W = \frac{1}{2} L\, i^2 \qquad \text{[J]} \tag{4-2}$$

導出は $i(0)=0$ として，$W = \int_0^t v\, i\, dt = \int_0^t L\, i \frac{d\, i}{d\, t} dt = \int_0^t \frac{d}{d\, t}(\frac{1}{2} L\, i^2)\, dt = \left[\frac{1}{2} L i^2(t)\right]_0^t = \frac{1}{2} L i^2(t)$

○　コイルの基本特性

次に，$R\,L$回路に直流電源を加えたとき，コイルに流れる電流や電圧を求めよう。

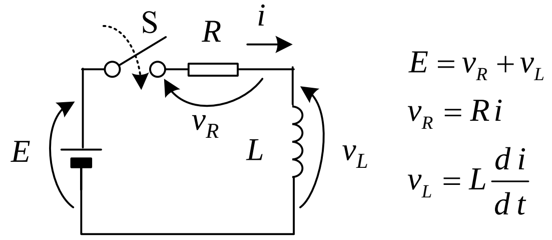


図 4-3　*RL* 回路

図 4-3 の回路で，$t=0$ でスイッチＳをオンした後，成り立つ微分方程式は，

$$E = R\, i + L \frac{d\, i}{d\, t} \tag{4-3}$$

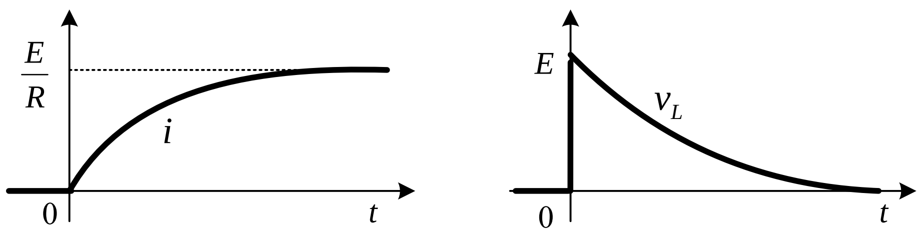
となる。よって公式（コンデンサの基本特性参照）より

$$i = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t} \tag{4-4}$$

スイッチＳを入れる直前$(t=-0)$に電流は０で，スイッチをオンしても，コイルの電流は急に変化しないので，$t=+0$（直後）で，$i=0$ より，$A=-E/R$　となる。故に

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \tag{4-5}$$

よって，　$v_L = L \frac{di}{dt} = E\ e^{-\frac{R}{L}t}$ (4-6)

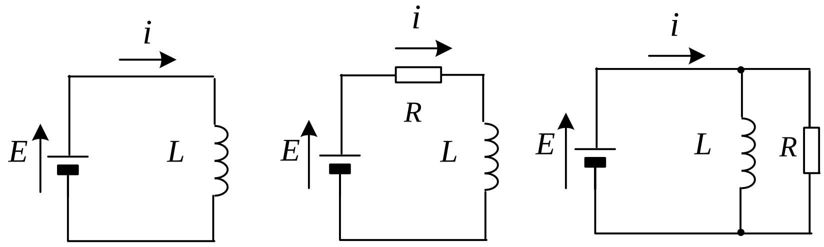


電流波形　　　　　　コイルの電圧波形

図 4-4　*RL* 回路の過渡応答波形

コイルには，電流の急な変化を抑える働きがある。最初電流が流れていなければ，スイッチをオンした直後，コイルは電流を流さない。時間が十分経過すると，コイルの電圧は 0 となり，コイルを導線と考えて電流が求まる。これは，あくまで直流に対しての話である。

問題１　図の回路で，直流電圧を加え，時間が十分経過したときの電流を求めよ。



(a)　　(b)　　(c)

（解）(a)　$E = L\dfrac{di}{dt}$ を解いて，$i = i(0) + \dfrac{E}{L}t$　となり，$i(\infty) = \infty$　この回路は実際には使えない。

実際のコイルには，電線の小さな抵抗があり，また電池の内部抵抗もあって(b)と等価になる。

(b)　$i(\infty) = E/R$ となる。　(c)　$i = i(0) + \dfrac{E}{L}t + \dfrac{E}{R}$　この回路も実際には使えない。

○　コイルを含む直流回路

以下のことを知っていれば，コイルを含む直流回路で，スイッチを入れた直後 $(t = +0)$ とスイッチを入れて時間が十分に経過したときの，いろいろの値を求めることができる。

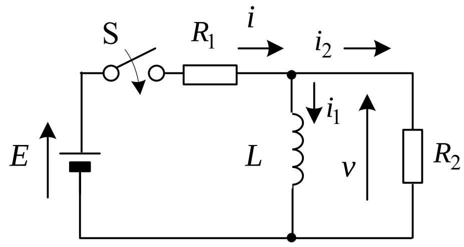
ここで初期電流とは，スイッチをオンする直前 $(t = -0)$ の電流のことである。

コイル

スイッチを入れた直後	：コイルの電流は急に変化しないので，初期電流が 0 の場合には電流は流れない（絶縁体のように)。初期電流が流れている場合には，その値から変化し始める。これは交流でも成立する。なお，コイルの電圧は急変することがある。
スイッチを入れて十分時間が経過したとき（定常状態という）	：コイルの電流は一定値になるので，コイルに生じる電圧は 0 となる。よってコイルを導線に置き換えて問題を解けるただし，電源（電圧源または電流源）が直流か，または電源がない場合で，回路に抵抗が含まれている場合*に限る。よって，交流では成立しない。

＊　たとえ直流電源がつないであっても，LC だけからなる回路では，いつまでも振動が続き一定にならない。また，例え抵抗があっても，問題 1 (c)の様な場合には成り立たない。

問題２　図の回路で，スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧，電流，及びコイルに蓄えられているエネルギーを求めよ。ただし，スイッチを入れる直前のコイルの電流は０とする。

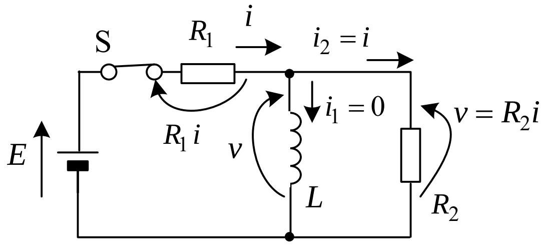


(解) スイッチを入れた直後, コイルの電流は急に変化しないので,

$i_1 = 0$ （電流が流れないから L 省ける）

$$i = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad v = R_2 i_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

コイルのエネルギー $W = \frac{1}{2} L i_1^2 = 0$

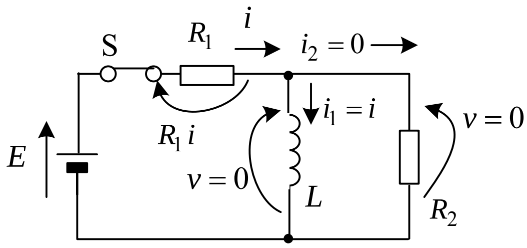


スイッチを入れて時間が十分経過してからは,
直流回路ではコイルの電圧は０となる。

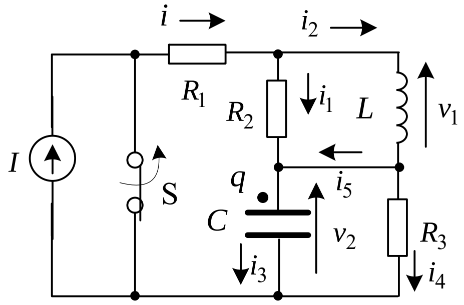
$$v = 0 \quad \therefore i_2 = \frac{v}{R_2} = 0$$

$$i = \frac{E - v}{R_1} = \frac{E}{R_1}, \quad i_1 = i = \frac{E}{R_1},$$

$$W = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R_1}\right)^2$$



問題３　　電流 I の直流電流源に接続された図の回路で，スイッチ S を開いた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧，電流，電荷を求めよ。ただし，スイッチを開く前，回路は定常状態であったとする。



（解）スイッチ S を開く前，電流源が短絡されているから電流 I はスイッチのみを通って流れ，回路が定常状態であるので，図中の電圧，電流，電荷は全て 0 である（電源からエネルギーが供給されないのでいずれ 0 となるから）。

　スイッチ S を開いた直後，コンデンサの電荷とコイルの電流は急変しないから

$$q = 0, v_2 = 0 \quad \therefore i_4 = \frac{v_2}{R_3} = 0$$

$$i_2 = 0, i_5 = i_2 - i_4 = 0, i = i_1 = i_3 = I, \quad v_1 = R_2 i_1 = R_2 I$$

（$v_1 = L \dfrac{di_2}{dt}$ は常に成立し，$i_2 = 0$　だから $v_1 = 0$ としてはいけない。$i_2 = 0$ は瞬間的）

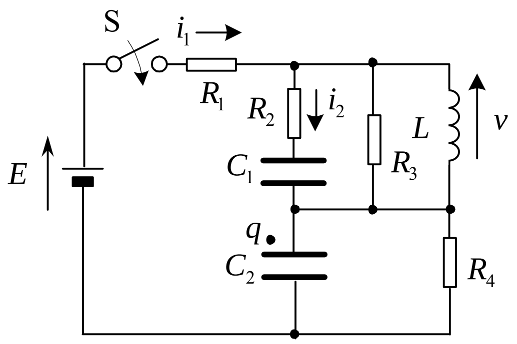
スイッチを開いて時間が十分経過してからは，並列に抵抗 R_3 があるので，コンデンサに電流は流れず，回路から除いて考える。また，コイルの電圧は 0 である。

$$v_1 = 0 \quad \therefore i_1 = \frac{v_1}{R_2} = 0$$

$$i_3 = 0,\ i_5 = i_3 - i_1 = 0,\ i = i_2 = i_4 = I$$

$$v_2 = R_3 i_4 = R_3 I,\ q = C v_2 = C R_3 I$$

問題４　図の回路で，スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの，図中に定義された電圧v，電流i_1，i_2，電荷qを求めよ。ただし，スイッチを入れる前のコンデンサの電荷とコイルの電流は 0 とする。



(解)スイッチを入れた直後，コイルの電流は 0，コンデンサの電圧は 0 である。よって，R_4の電圧は 0 で電流は流れない。

$$q = 0 \ ,\ i_1 = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1},\quad i_2 = i_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$v = R_2 i_2 = \frac{R_2 R_3 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

スイッチを入れて時間が十分経過した後，コンデンサの電流とコイルの電圧は 0 となる。

$$i_2 = 0,\quad v = 0,\quad i_1 = \frac{E}{R_1 + R_4} \quad ,\quad q = C_2 R_4 i_1 = \frac{C_2 R_4 E}{R_1 + R_4}$$

○　相互誘導（そうごゆうどう）

図 4-5 の様に，鉄心（てっしん）に２つのコイルを巻いた変成器（変圧器）を考える。電流i_1が流れると，巻数N_1のコイル１（**一次巻線**）によって磁束ϕ_1ができる。磁束ϕ_1は，鉄心を通って，巻数N_2のコイル２　(**二次巻線**)の中を通る。電源電圧を変化させて電流i_1を変化させると，電流i_1が作る磁束が変化し，電磁誘導の法則によって，コイル２にも誘導起電力が生じる。これを，**相互誘導**(mutual induction)と呼ぶ。相互誘導による図の電圧v_2　は，次式で与えられる。

$$v_2 = M \frac{d i_1}{d t} \tag{4-7}$$

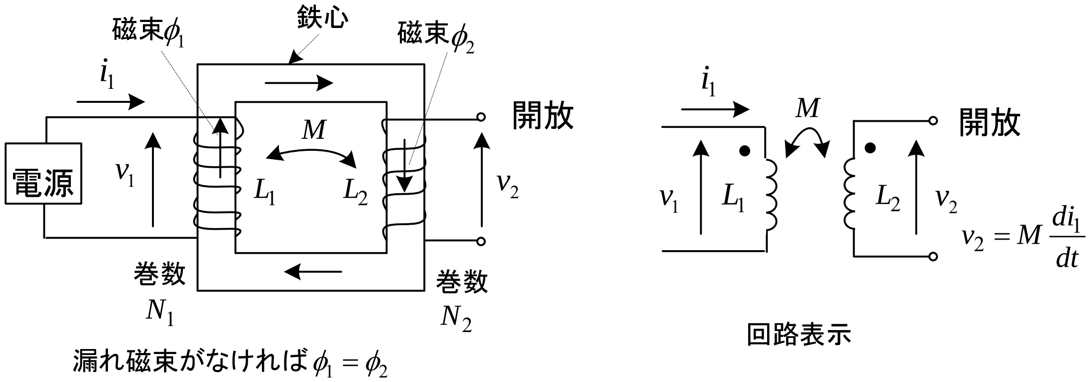


図 4-5　変成器とその回路表示（二次側開放の場合）

ここで，M を**相互インダクタンス**(mutual inductance)[H]と呼ぶ。

図中の ● 印は，相互インダクタンスM についての式を立てる場合に関係し，**自己インダクタンス**L_1, L_2 には関係しない。● 印からコイルに入る向きに電流i を定義すると，**相互誘導**によって相手方のコイルの ● 印に電圧の矢印の先端がある向きに$M(d\,i/dt)$　が生じるものと定義する。詳細は第 10 章で述べる。自己インダクタンスは常に正であるが，相互インダクタンスは正とは限らない。図 4-5 の場合は，相互インダクタンスは正である。

(4-7)が成り立つのは，コイル２に何もつないでいない場合(開放)で，図 4-6 のように抵抗などをつなぐと電流i_2 が流れ，コイル２に**自己誘導** L_2 による電圧が発生すると同時にコイル１にコイル２の電流i_2 による相互誘導の電圧が発生する。鉄心中の磁束は電流i_1 と電流i_2 で作られる。

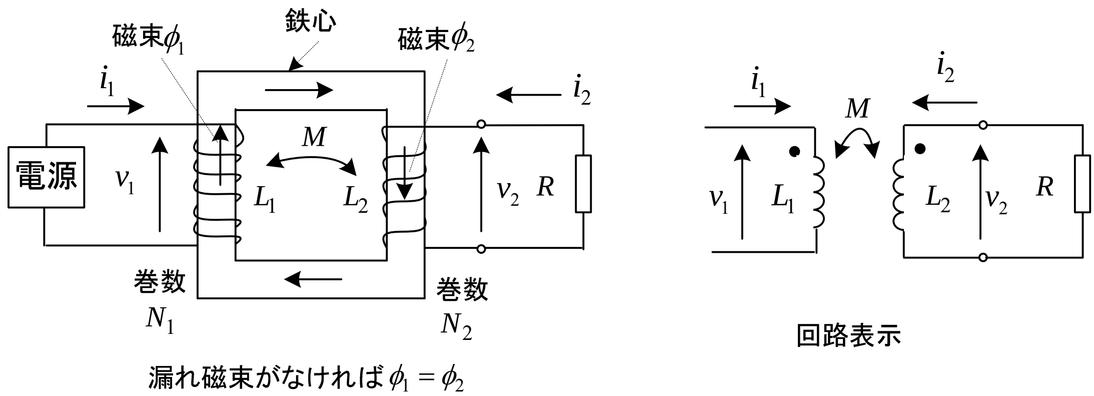


図 4-6　変成器とその回路表示（二次側に負荷を接続の場合）

この場合次式が成立する。i_2　は図と反対向きに定義してもよいが，その時はi_2　の項に－がつく。

$$v_1 = L_1\frac{d\,i_1}{d\,t} + M\frac{d\,i_2}{d\,t} = N_1\frac{d\phi_1}{dt},\quad N_1\,\phi_1 = L_1 i_1 + M\,i_2 \tag{4-8}$$

：コイル１の鎖交磁束

$$v_2 = M\frac{d\,i_1}{d\,t} + L_2\frac{d\,i_2}{d\,t} = N_2\frac{d\phi_2}{dt},\quad N_2\,\phi_2 = M\,i_1 + L_2\,i_2 \tag{4-9}$$

：コイル２の鎖交磁束

磁束が鉄心の中だけを通るなら$\phi_1 = \phi_2$　で $L_1 L_2 = M^2$ が成立する(第 10 章で詳しく学ぶ)。