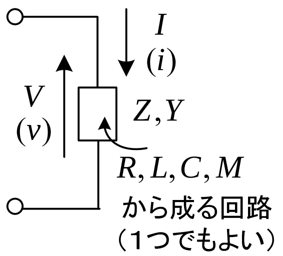
第7章　フェーザによる交流回路の計算Ⅱ

フェーザを使った交流回路の計算で，インピーダンスやアドミタンスの計算，分圧と分流，瞬時値とフェーザの関係，誘導性負荷と容量性負荷を中心に述べる。

○　インピーダンスとアドミタンスの定義



R, L, C, M から成る回路（電源はなし）があって，交流電圧と電流の瞬時値をそれぞれ $v(t),\ i(t)$ とする。v, i のフェーザ表示をそれぞれ V, I とするとき，**インピーダンス**(impedance) Z ，**アドミタンス**(admittance) Y は次式で定義される。

$$Z \equiv \frac{V}{I} \quad , \quad Y \equiv \frac{I}{V} \tag{7-1}$$

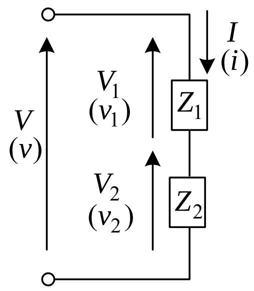
Z, Y は，V, I を逆方向の矢印として定義していることに注意せよ。向きが図と逆だと，その分マイナスがつく。定義式より，$Z = 1/Y$ である。また，インピーダンスはフェーザ V, I に対して定義されており, 瞬時値 $v,\ i$ に対しては定義されていない。よって，$v(t) = Z\,i(t)$ とか，$Z = v(t)/i(t)$ のような式を書いてはいけない。アドミタンスも同じこと。更に，Z や Y は一般にフェーザ（複素数）であるが，これの瞬時値表示というものはない。

インピーダンス Z の実部を R_e，虚部を X_e で表わし，それぞれ**抵抗分**，**リアクタンス（分）**(reactance)と呼ぶ。アドミタンス Y も同様に**コンダクタンス**(conductance) G ，**サセプタンス**(susceptance) B と呼ぶ。R_e, X_e の単位は Ω，G, B の単位は S (siemens ジーメンス)である。

$$Z = R_e + jX_e \tag{7-2}$$
$$Y = G + jB \tag{7-3}$$

$R_e \geqq 0,\ G \geqq 0$ であるが，X_e, B は素子によって正，負がある。

○ 直列接続



瞬時値について，$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$ が成立する。これをフェーザ表示すると, (6-20)より加算の場合はそのままフェーザ表示できるから,

$$V = V_1 + V_2 \tag{7-4}$$

である。インピーダンスの定義より,

$$V_1 = Z_1 I \quad V_2 = Z_2 I \tag{7-5}$$

(7-4), (7-5)より

$$V = (Z_1 + Z_2)I \tag{7-6}$$

従って，**合成インピーダンス**は，

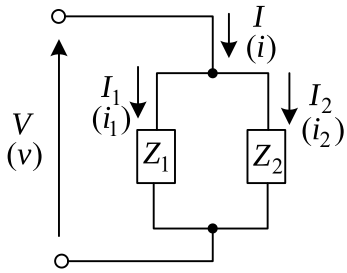
$$Z = Z_1 + Z_2 \qquad \text{(3 つ直列}\quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3\text{)} \tag{7-7}$$

また，(7-5)，(7-6)より

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}V \quad , \quad V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}V \tag{7-8}$$

となる。これは，V_1, V_2 がインピーダンスの比に**分圧**されることを意味する。

○ 並列接続



瞬時値について，$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ が成立する。これをフェーザ表示すると，(6-20)より

$$I = I_1 + I_2 \tag{7-9}$$

であり，インピーダンスの定義より，

$$V = Z_1 I_1 \quad , \quad V = Z_2 I_2 \tag{7-10}$$

(7-9)，(7-10)より

$$I = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)V \tag{7-11}$$

よって**合成インピーダンス** Z は，

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{または，} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{(3 つ並列}\quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}\text{)} \tag{7-12}$$

となる。また，(7-10)，(7-11)より

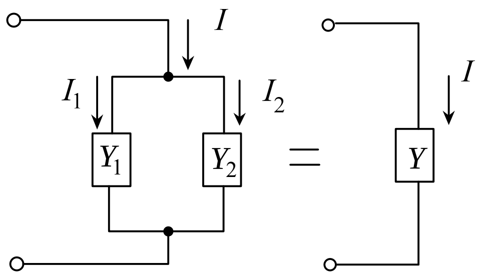
$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}I \quad , \quad I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}I \tag{7-13}$$

これは，I_1, I_2 が，インピーダンスの逆数比に**分流**されることを意味する。アドミタンス $Y = 1/Z,\ Y_1 = 1/Z_1,\ Y_2 = 1/Z_2$ を用いると(7-12)，(7-13)は次のように表現できる。**並列回路のアドミタンスは各素子のアドミタンスの和**である（この関係は，3 つ以上の素子にも拡張できる）。

$$Y = Y_1 + Y_2 \tag{7-14}$$

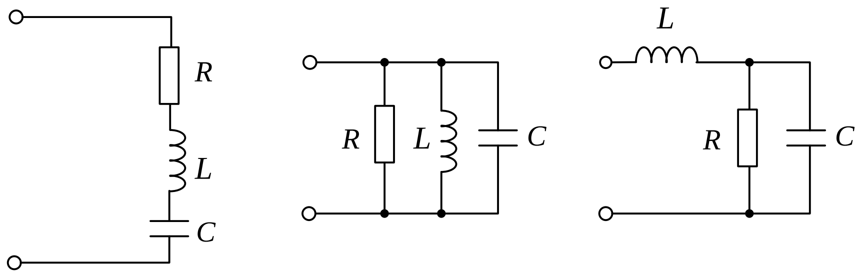
(3 つ並列なら　$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$)

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}I \quad , \quad I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2}I \tag{7-15}$$



以上の式は形の上では抵抗だけの直流回路の式と全く同じである。もちろん矢印についても。従って，覚えるのに苦労はしない。しかし，抵抗だけの直流回路が実際の瞬時電圧や瞬時電流の関係であるのに対し，交流回路では，フェーザ表示された電圧や電流の関係であることを忘れないでもらいたい。フェーザを使う利点は，交流回路が直流回路のように計算できる点にある。

例題 1　図の回路のインピーダンス(抵抗分 R_e とリアクタンス分 X_e)とアドミタンス（コンダクタンス G とサセプタンス B）を求めよ。ただし，電源の角周波数を ω とする。



(a)　(b)　(c)

(a) 直列回路の合成インピーダンス Z は各素子のインピーダンスの和だから

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \qquad \therefore \quad R_e = R,\ X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

アドミタンス Y はインピーダンス Z の逆数なので

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_e + jX_e} = \frac{R_e - jX_e}{(R_e + jX_e)(R_e - jX_e)} = \frac{R_e - jX_e}{R_e^2 + X_e^2} \quad \text{より}$$

$$G = \frac{R_e}{R_e^2 + X_e^2},\ B = \frac{-X_e}{R_e^2 + X_e^2}$$

$$\frac{c + jd}{a + jb} = \frac{(c + jd)(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + j\frac{da - cb}{a^2 + b^2}$$

(b) 並列回路の合成アドミタンス Y は各素子のアドミタンスの和だから

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\therefore \quad G = \frac{1}{R} \quad , \quad B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

インピーダンス Z

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} \quad \text{より}$$

$$R_e = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X_e = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

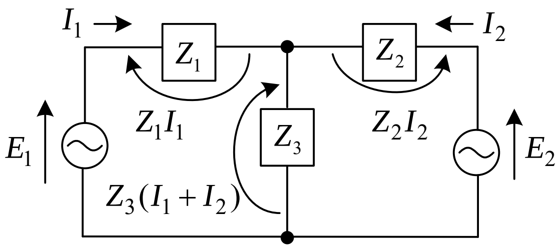
(c) RC 並列回路に L が直列につながっているから，合成インピーダンス Z は

$$Z = j\omega L + \frac{R\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2})$$

$$\therefore \quad R_e = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2},\ X_e = \omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}$$

アドミタンス（コンダクタンス G とサセプタンス B）は，インピーダンス $Z = R_e + jX_e$ を用いて，(a)と同様に求まる。

例題 2　図の回路で，電源電圧のフェーザとインピーダンス Z_1, Z_2, Z_3 が与えられている。電流のフェーザ I_1, I_2 を求めよ。



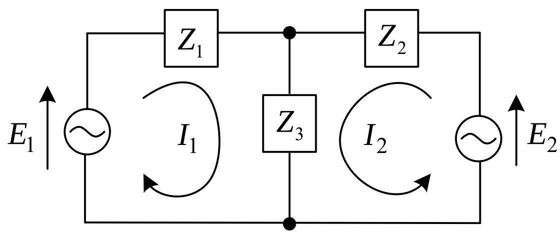
I_1, I_2 は**枝電流**と呼ばれる。

（解）キルヒホッフの電圧則より

$$E_1 = (Z_1+Z_3)I_1 + Z_3 I_2 \qquad ① \qquad\qquad E_2 = Z_3 I_1 + (Z_2+Z_3)I_2 \qquad ②$$

行列表示して，

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1+Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2+Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



こう書くと I_1 ，I_2 は閉路電流と呼ばれる。

クラメルの公式より

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & Z_3 \\ E_2 & Z_2+Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1+Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2+Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_2+Z_3)E_1 - Z_3E_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_3Z_2}$$

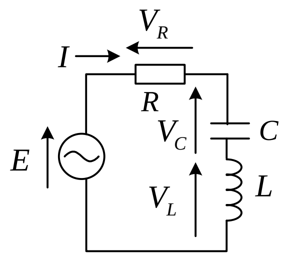
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1+Z_3 & E_1 \\ Z_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1+Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2+Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_1+Z_3)E_2 - Z_3E_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_3Z_2}$$

（注１）この問題には前提条件がある。それは，交流電源 E_1, E_2 の角周波数 ω は両者で等しいということである。周波数が異なるとフェーザ表示が違う意味になり，チャンポンにして演算はできない（そのような場合は第 14 章で解く）。また，具体的な抵抗，キャパシタンス，インダクタンスが与えられたら， $Z = R, 1/j\omega C, j\omega L$ などとすればよい。

（注 2） **閉路電流**を用いるとキルヒホッフの電流則が自動的に入るので①，②をすぐ書ける。**枝電流**を用いると Z_3 の枝電流が $I_1 + I_2$ であることを使って，①，②が導ける。この場合はたまたま Z_1, Z_2 に流れる枝電流 I_1, I_2 と閉路電流が等しい。閉路電流は，一巡する電流なので Z_3 に流れる電流も含んでおり，これで電流則が不要となる。

○ フェーザ図

電源電圧の瞬時値が $e(t) = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$ (7-16)



ここで，E_e：実効値（正），φ：初期位相（定数）
のとき，$e(t)$ のフェーザ E は

$$E = E_e e^{j\varphi} \quad （E は \varphi の向き） \qquad (7\text{-}17)$$

電流のフェーザ I は，インピーダンスに(6-4)を用いて指数関数形式に直すと

$$I = \frac{E_e e^{j\varphi}}{R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})} = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}} e^{j(\varphi - \theta)} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \qquad (7\text{-}18)$$

（I は E を時計方向に θ だけ回転した向き。$\theta < 0$ なら $|\theta|$ だけ反時計方向に回す。）

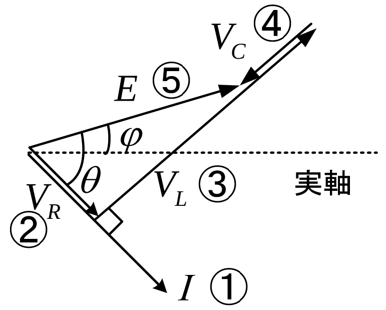
また，各素子の電圧のフェーザには次の関係がある。

抵抗：$V_R = RI$　（$R > 0$ だからフェーザ図では V_R は I と同じ向き，長さ $|V_R| = R|I|$）

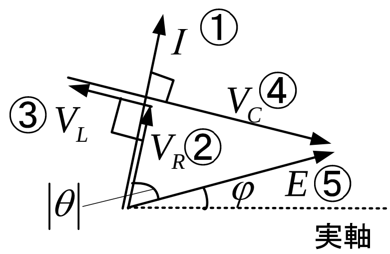
コイル：$V_L = j\omega L\, I$　（V_L は I を $\pi/2$ だけ反時計方向に回転，長さ $|V_L| = \omega L|I|$）

コンデンサ：$V_C = \dfrac{I}{j\omega C}$　（V_C は I を $\pi/2$ だけ時計方向に回転，長さ $|V_C| = \dfrac{1}{\omega C}|I|$）

電源電圧：$E = V_R + V_L + V_C$　（注意　長さ $|E| = |V_R| + |V_L| + |V_C|$ は成立しない。）
以上により，図のフェーザ図が得られる。向きと長さを変えなければフェーザは移動できる。



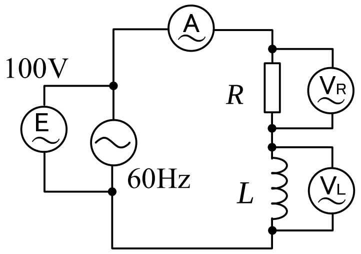
$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \quad \therefore |V_L| > |V_c|$$



$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \quad \therefore |V_L| < |V_c|$$

①②③④⑤の順に書いたら書きやすい。フェーザ図は，同じ向きとか，$\pi/2$ だけ回転するとか，和や差によるフェーザ間の関係とか決まっていることを正確に書けばよい。φ, θ も適当に書いている。I は E より遅れるか進むか考えて書き始める。時間の関係（時間 0 の定義）が何も与えられていない場合には，電圧や電流のどれかの初期位相を 0 に選ぶ（時間の原点を決める）ことで，そのフェーザを正の実数(実軸)にすることが出来る（これを**基準フェーザ**と呼ぶ)。電流 I を基準フェーザに選んで I を実軸に合わせると，フェーザ図が書きやすい。すると上記のフェーザ図で I を実軸に合わせるように全体を回転させたフェーザ図（全体の関係は同じ）が得られる。この例では(7-16)で時間 0 を定義しているので，電流を実軸に選ぶことは一般性を失う。

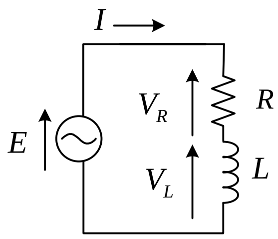
例題 2　図のように，60Hz，100V の電源に，1Ω の抵抗と 10mH のコイルが直列につないである。交流電流計 A の読みと交流電圧計 V_R ，V_L の読みを求めよ。



（注）電圧 100V と言うのは実効値のことで，電圧計の読みと等しい。このように実効値と書かないことも多い。実効値はフェーザの絶対値である。一般に単位は全て SI 単位系に直して計算する（留意事項を参照）。

この問題では，電源電圧の大きさは 100 だが，初期位相が与えられていないので，電源電圧のフェーザは 1 つに決まらない。よって，電流の初期位相を 0（基準フェーザ）と考えても問題ない。

（解）電流計は導線，電圧計は抵抗の十分大きな絶縁物と考えてよいから次の回路で考える。



図より，電圧，電流のフェーザに対し次式が成立する。

$$E = V_R + V_L \quad \cdots\cdots ①$$

$$V_R = RI \quad \cdots\cdots ②$$

$$V_L = j\omega LI \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③より

$$I = \frac{E}{R + j\omega L} \quad \cdots\cdots ④$$

④の絶対値をとり，電流の実効値を求める。商は別々に絶対値を計算できるから

$$|I| = \frac{|E|}{|R + j\omega L|} = \frac{|E|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{1 + (2\times 3.14\times 60\times 0.01)^2}} = 25.7\mathrm{A}$$

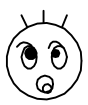
従って，A の読みは，25.7A である。

②と③の絶対値をとり，電圧の実効値を求める。積は別々に絶対値を計算できるから

$$|V_R| = |RI| = |R||I| = R|I| = 1\times 25.7 = 25.7\mathrm{V}$$

$$|V_L| = |j\omega LI| = |j||\omega||L||I| = \omega L|I| = 2\times 3.14\times 60\times 0.01\times 25.7 = 96.8\mathrm{V}$$

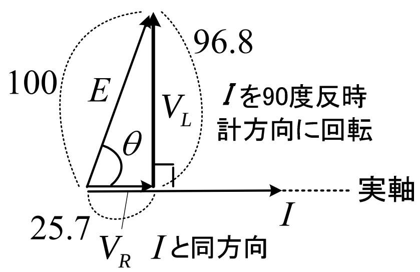
よって，V_R の読みは 25.7V，V_L の読みは 96.8V である。



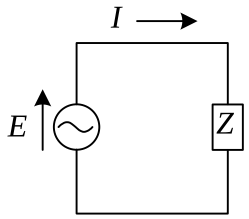
V_R の読みと V_L の読みの和は 100V になっていないよ。これは，①より $|E| = |V_R + V_L| \neq |V_R| + |V_L|$ であるから当然さ。

$$|E| = 100,\ |V_R| = 25.7,\ |V_L| = 96.8$$

（各フェーザの大きさ）は直角三角形の各辺の長さに対応する。右図では問題に時間軸の定義がないので電流を**基準フェーザ**（実軸）に選んだ。



○ 誘導性負荷と容量性負荷



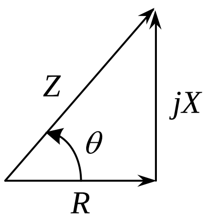
図の交流回路で，インピーダンス Z は一般に

$$Z = R + jX \qquad (7\text{-}19)$$

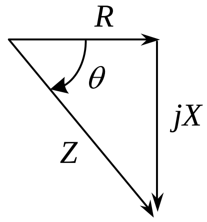
と書くことができる。ここで抵抗分 R は常に正である。
Z の偏角を θ とおくと，

$$\theta = \arg Z = \tan^{-1}\frac{X}{R} \qquad (7\text{-}20)$$

である。θ はリアクタンス分 X の正負により



$X > 0$
$\theta > 0$
の場合



$X < 0$
$\theta < 0$
の場合

$X>0$ のとき $\theta>0$ 　であり，このときの Z を**誘導性負荷**（ゆうどうせいふか）(inductive load)という。
$X=0$ のとき $\theta=0$ 　であり，このときの Z を**純抵抗負荷**（じゅんていこう）という。
$X<0$ のとき $\theta<0$ 　であり，このときの Z を**容量性負荷**（ようりょうせい）(capacitive load)という。

インピーダンスの定義より，$Z = \dfrac{E}{I}$ である。両辺の偏角をとると

$$\arg Z = \theta = \arg E - \arg I \qquad (7\text{-}21)$$

となる。これは，**電圧と電流の位相差が，インピーダンスの偏角と等しい**ことを示している。インピーダンスの偏角 θ が正のとき， I の偏角は E の偏角より小さく，I は E より θ **遅れる**という。逆に，インピーダンスの偏角 θ が負のとき，I の偏角は E の偏角より大きく，I は E より $|\theta|$ **進む**という。つまり**偏角の大きい方が進んでいる**という。

詳しく述べよう。電源電圧の瞬時値が $e = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$ 　①　のとき，e のフェーザ E は

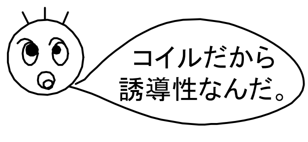
$E = E_e e^{j\varphi}$ 　　ここで，$E_e = |E|$ ：実効値，$\varphi = \arg E$ ：初期位相（定数）

電流のフェーザ I は，インピーダンスに(6-4)を用いて指数関数形式に直すと

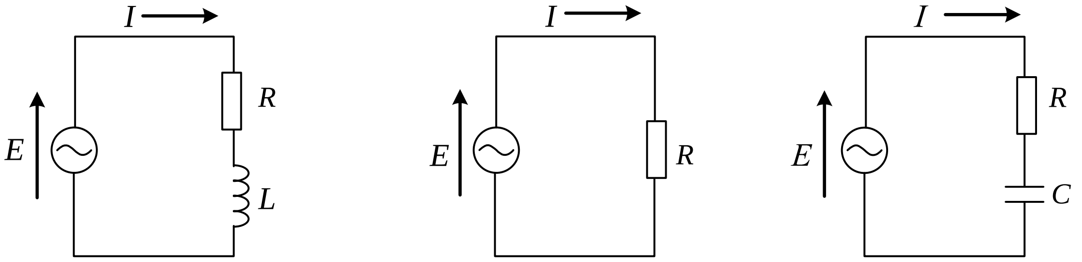
$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E_e e^{j\varphi}}{R + jX} = \frac{E_e\, e^{j\varphi}}{\sqrt{R^2 + X^2}\, e^{j\theta}} = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j(\varphi - \theta)} \qquad \text{ただし，}\quad \theta = \tan^{-1}\frac{X}{R}$$

フェーザ I を瞬時値 i に直して，

$$i = \frac{\sqrt{2}E_e}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta) \qquad ②$$



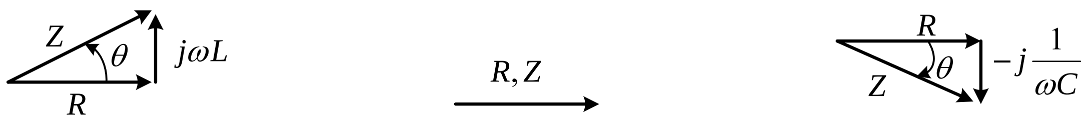
誘導性負荷　　　　純抵抗負荷　　　　容量性負荷



インピーダンス Z とリアクタンス分 X

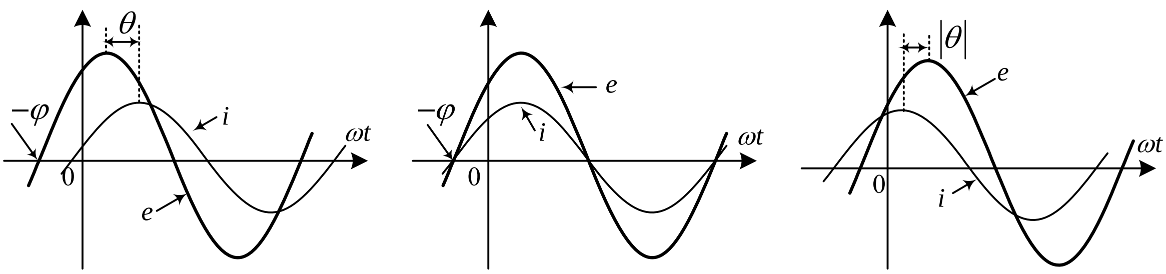
$$Z = R + j\omega L \qquad Z = R \qquad Z = R - j\frac{1}{\omega C}$$

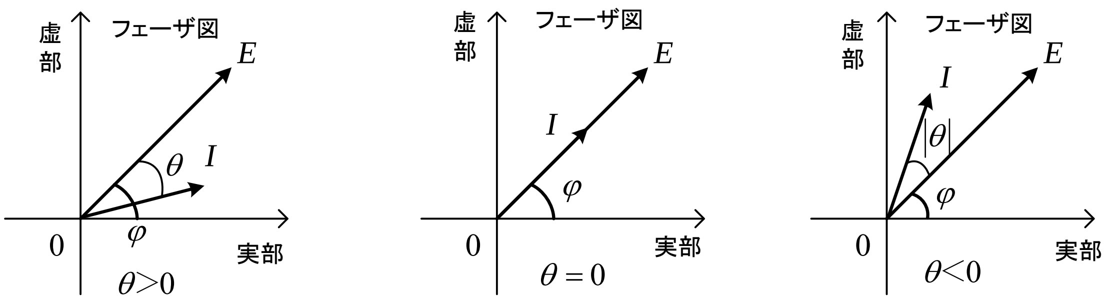
$$X = \omega L > 0 \qquad X = 0 \qquad X = -1/(\omega C) < 0$$



$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} > 0 \qquad \theta = 0 \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{-1/(\omega C)}{R} < 0$$

波形（①，②式より）



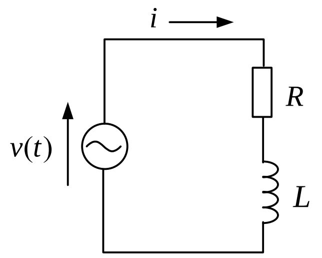


I は E より θ 遅れる。　　I と E は同相。　　I は E より $|\theta|$ 進む。

リアクタンス分 X の正負で θ の正負が決る。$\theta>0$ だと電流の位相は電圧に対して θ だけ遅れ，$\theta<0$ だと逆に $|\theta|$ だけ進む。図の RL 回路の波形を見ると，ωt（時間に比例）が 0 より少し経過してから e は最大となり，それよりさらに θ 経過して i が最大なる。よって i は e より θ 遅れている。普通，遅れや進みは，電圧を基準に電流が遅れるか，進むかを言う。遅れ負荷といえば，誘導性負荷のことである。フェーザ図を見ただけで波形が頭の中にイメージできないといけない。

例題４　図の回路で，電源電圧が，$v(t)=100\sqrt{2}\sin(120\pi t)$ [V] で与えられるとき，以下の問いに答えよ。ただし，$R=2\ \Omega,\ L=1/(60\pi)$ H とする。単位を明記せよ。

（１）$v(t)$ の実効値はいくらか。
（２）$v(t)$ の周波数はいくらか。
（３）$v(t)$ のフェーザ V を求めよ。
（４）R，L 回路のインピーダンス Z を求めよ。
（５）電流のフェーザ I を求めよ。
（６）電流の瞬時値 $i(t)$ を求めよ。
（７）$v(t), i(t)$ の略図を書け。



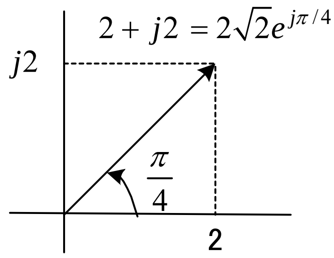
（解）（１）最大値の $1/\sqrt{2}$ だから 100 V

（２）$\omega=120\pi=2\pi f$ より，$f=60\,\mathrm{Hz}$

（３）$V=\dfrac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j0}=100$ V　（実数なので V は基準フェーザである。）

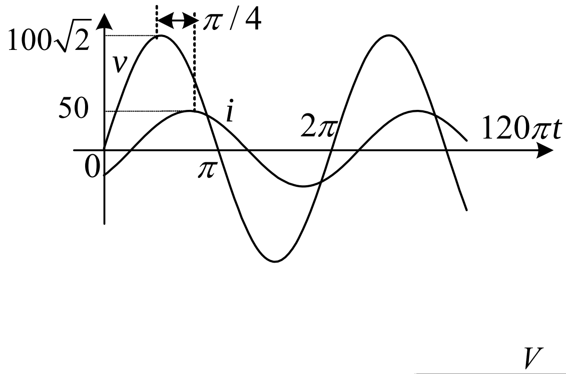
（４）$Z=R+j\omega L=2+j120\pi\dfrac{1}{60\pi}=2+j2$ [Ω]

（５）$I=\dfrac{V}{Z}=\dfrac{100}{2+j2}=\dfrac{100}{2\sqrt{2}e^{j\pi/4}}=\dfrac{50}{\sqrt{2}}e^{-j\pi/4}$ [A]



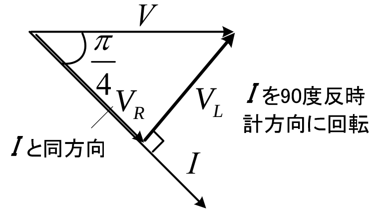
（６）$i(t)=50\sin(120\pi t-\dfrac{\pi}{4})$ [A]

（７）図のように表せる。電圧と電流は単位が違うので，大きさの比較はできない。



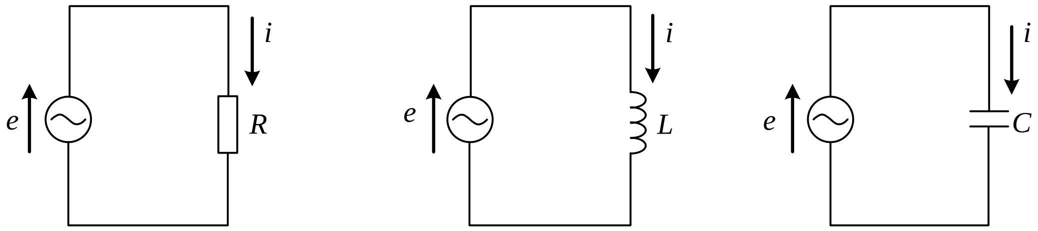
フェーザ図

電圧と電流の大きさ(フェーザの長さ)は単位が違うので、比べられない。
この場合 V が基準フェーザなので，横軸にとっている。



例題 5　図の回路で， $e=\sqrt{2}E_e\sin(\omega t+\varphi)$　φ：初期位相（定数）のとき，電流 i を求めよ。

また，瞬時値 e, i のグラフとそのフェーザ E, I のフェーザ図を書け。



(a)　　　(b)　　　(c)

（解）

瞬時値の式

$e=Ri$　　　$e=L\dfrac{di}{dt}$　　　$i=C\dfrac{de}{dt}$

フェーザの式（微分は $j\omega$ へ）

$E=RI$　　　$E=j\omega LI$　　　$I=j\omega CE$

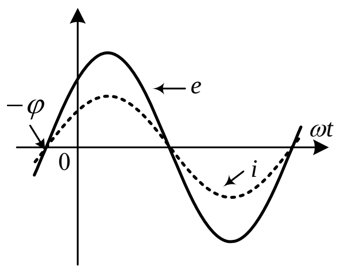
$\therefore I=\dfrac{E}{R}$　　　$\therefore I=\dfrac{E}{j\omega L}$　　　$\left(E=\dfrac{I}{j\omega C}\right)$

e のフェーザは $E=E_e e^{j\varphi}$ だから

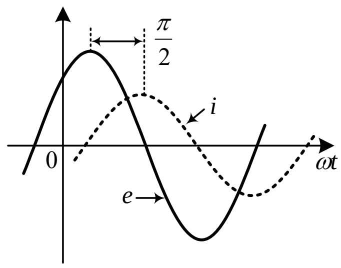
$I=\dfrac{E_e}{R}e^{j\varphi}$　　　$I=\dfrac{E_e}{\omega L}e^{j(\varphi-\frac{\pi}{2})}$　　　$I=\omega CEe^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}$

I を瞬時値 i にもどして

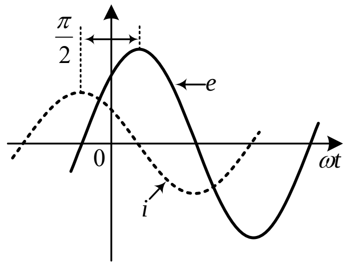
$i=\dfrac{\sqrt{2}E_e}{R}\sin(\omega t+\varphi)$　　　$i=\dfrac{\sqrt{2}E_e}{\omega L}\sin(\omega t+\varphi-\dfrac{\pi}{2})$　　　$i=\sqrt{2}\omega CE_e\sin(\omega t+\varphi+\dfrac{\pi}{2})$



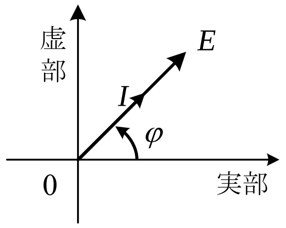
e と i は同相



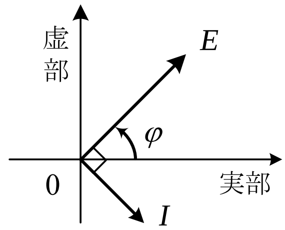
i は e より $\pi/2$ 遅れる。



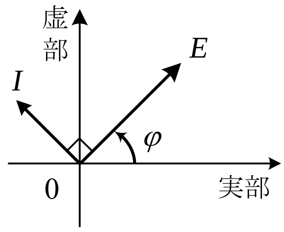
i は e より $\pi/2$ 進む。



フェーザ図



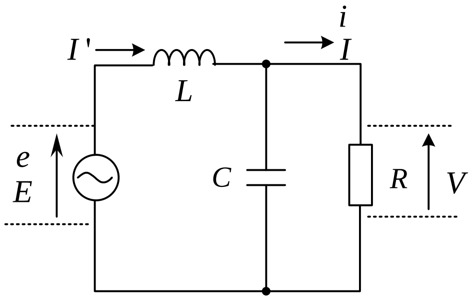
フェーザ図



フェーザ図

例題 6　図の回路で，R に流れる電流のフェーザを求めよ。次に，R に流れる電流の瞬時値を求めよ。また，この電流の実効値が R に無関係となるにはどのような条件が必要か。

$$e=\sqrt{2}E_e\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\downarrow$$
フェーザ $E=E_e e^{j\varphi}$



（解）　R に流れる電流のフェーザを I とすると，

$$I=\underbrace{\boxed{\frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L+\dfrac{R/j\omega C}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}}}}_{I'}\cdot\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

（分流の公式利用）

$$=\frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L+\dfrac{R}{j\omega CR+1}}\cdot\frac{1}{j\omega CR+1}$$

$j\omega C$ を分子分母に掛ける。

$$=\frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L(j\omega CR+1)+R}$$

$$=\frac{E_e e^{j\varphi}}{R(1-\omega^2 LC)+j\omega L}$$

$$|I|=\frac{E_e}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 L^2}}\quad,\quad \arg I=\varphi-\theta\quad,\quad \theta=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}$$

よって，　　$I=|I|e^{j\arg I}$

電流の瞬時値の定常解は

$$\therefore i=\sqrt{2}|I|\sin(\omega t+\arg I)$$

i の実効値 $|I|$ が R に無関係となるためには，R の係数が 0 となればよいから，

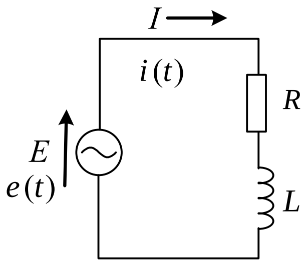
$$1-\omega^2 LC=0 \qquad \therefore \omega L=\frac{1}{\omega C}$$

このとき，$|I|=\dfrac{E_e}{\omega L}$　　となる。

＊　定常解とは，電源のスイッチを入れて時間が十分経過したあとの解のことである。もともとフェーザを使って求められるのは，定常解だけである。

＊　C と R の合成インピーダンスと $j\omega L$ の分圧より，V を求め R で割ると，I が求まる。I の最初の分流の式をよく見るとそうなっていることが判る。C の電圧も V である。

例題７　図の R, L 回路で，電流の定常解がフェーザ表示を用いて求まることを説明せよ。



但し，電源電圧は，$e(t)=\sqrt{2}E_e\sin(\omega t+\varphi)$，$\varphi$:初期位相（定数）とする。

（解）微分方程式を立てると，次式が得られる。

$$\sqrt{2}E_e\sin(\omega t+\varphi)=Ri+L\frac{di}{dt} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ①$$

①に対して，電源電圧が cos の場合には，i' を解とすると

$$\sqrt{2}E_e\cos(\omega t+\varphi)=Ri'+L\frac{di'}{dt} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ②$$

$i''=i'+ji$　とおき，②＋j①より

$$\sqrt{2}E_e\left\{\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)\right\}=R(i'+j\,i)+L\frac{d}{dt}(i'+j\,i)$$

$$\therefore \sqrt{2}E_e e^{j(\omega t+\varphi)}=Ri''+L\frac{di''}{dt} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ③$$

i'' の**定常解**を，

$$i''=\sqrt{2}I_e e^{j(\omega t+\theta)} \qquad （I_e,\theta\ ：定数で未知） \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ④$$

と仮定すると，④を③に代入して，

$$\sqrt{2}E_e e^{j(\omega t+\varphi)}=\sqrt{2}RI_e e^{j(\omega t+\theta)}+\sqrt{2}\,j\omega LI_e e^{j(\omega t+\theta)}$$

$$\therefore E_e e^{j\varphi}=RI_e e^{j\theta}+j\omega LI_e e^{j\theta} \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑤$$

$$=I_e e^{j\theta}(R+j\omega L)$$
$$=I_e\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,e^{j(\theta+\theta')} \qquad 但し，\theta'=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore I_e=\frac{E_e}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \quad , \quad \theta=\varphi-\theta' \qquad （未知数が決定） \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑥$$

④の虚部が求める電流なので，オイラーの公式より

$$i(t)=\mathrm{I_m}(i'')=\sqrt{2}I_e\sin(\omega t+\theta) \qquad （I_e,\theta\ は⑥で確定している。） \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑦$$

を得る。一方，フェーザ表示の交流理論では

$$E_e\,e^{j\varphi}=RI+j\omega LI \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot ⑧$$

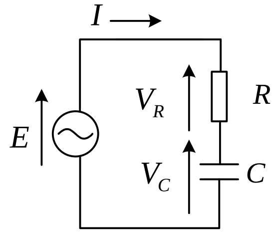
が成立する。これを⑤とくらべると $I=I_e e^{j\theta}$ に対応する。フェーザを用いると，①，②，③，④を省いて，⑧（⑤と等価）からスタートできる。

③の解は，一般には，**定常解（特殊解）＋過渡解（同次方程式の解）**で与えられるが，**スイッチを入れて時間が経つと過渡解は 0 になる**。第 15 章の過渡現象では，過渡解も求める。

問題１　自己インダクタンスが$10\,\mathrm{mH}$のコイルに交流電圧$30\mathrm{V}$（実効値）をかける。その周波数が，(1)$500\,\mathrm{Hz}$，(2)$5\,\mathrm{kHz}$のとき，流れる電流の実効値を求めよ。

（答）$(1) Z = j\omega L = j31.4\Omega,\quad |I| = \dfrac{|V|}{|Z|} = 0.955\mathrm{A},\quad (2) Z = j314\Omega,\quad |I| = 95.5\mathrm{mA}$

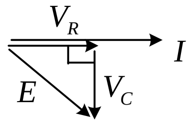
問題２　RとCの直列回路に$100\mathrm{V}$, $60\mathrm{Hz}$の電圧をかけたとき，Cにかかる電圧が$80\mathrm{V}$であった。Rにかかる電圧を求めよ。また，$R = 1\mathrm{k}\Omega$のとき，Cは何$\mu\mathrm{F}$か。



（答）題意より，実効値$|E| = 100$　，$|V_C| = 80$

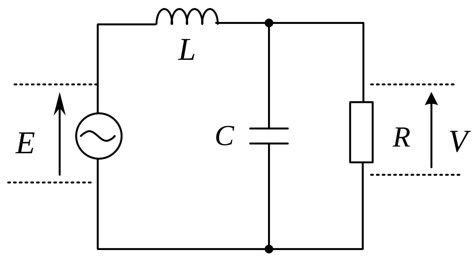
$E = V_R + V_C = RI + \dfrac{I}{j\omega C}$　より図のフェーザ図が得られる。

フェーザ図より$|V_R| = 60$　よって，Rにかかる電圧は$60\mathrm{V}$



$$V_R = RI,\ V_C = \frac{I}{j\omega C} \quad \therefore \quad \frac{|V_C|}{|V_R|} = \frac{1}{R\omega C} = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad C = 1.99\mu\mathrm{F}$$

問題３　図の回路で，$G = V/E$を求めよ。ただし，E, Vは電圧のフェーザ（一般に複素数）である。また，大きさ$|G|$，偏角（位相）$\arg G$を求めよ。電源の各周波数をωとする。



（答）LのインピーダンスをZ_1，C, R並列回路のインピーダンスをZ_2とすると分圧の公式より

$$G = \frac{V}{E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\dfrac{R}{j\omega CR + 1}}{j\omega L + \dfrac{R}{j\omega CR + 1}} = \frac{R}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

Cの電圧もV

$$|G| = \frac{|R|}{|R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 (1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\arg G = \arg R - \arg(R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L) = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$$

（絶対値と偏角の計算は複素数の重要公式を見よ。）

問題４　図の回路で$v = 200\sqrt{2}\sin(2t + \dfrac{\pi}{3})$ [V]のとき，各問いに答えよ.

ただし，$R = 2\ \Omega, C = 0.25\mathrm{F}$

（１）電源の周波数はいくらか.

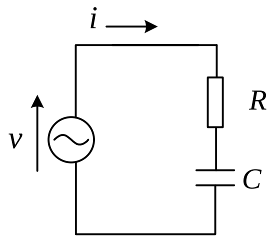
（２）電源電圧の実効値はいくらか.

（３）回路のインピーダンスを求めよ.

（４）電源電圧のフェーザを求めよ.

（５）電流のフェーザを求めよ.

（６）電流の瞬時値を求めよ.

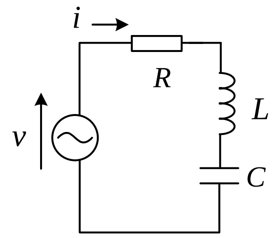


(答)　(1)　$f = 1/\pi$ Hz

(2) $|V| = 200$ V　　(3) $Z = 2 - j2\ \Omega$

(4) $V = 200e^{j\pi/3}$ V　　(5) $I = \dfrac{100e^{j\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$ A　　(6) $i = 100\sin(2t + \dfrac{7\pi}{12})$ [A]

問題５　フェーザを用いて, 図の RLC 回路の瞬時電流を求めよ。電源電圧は, $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ とする。ただし，ϕ（ファイ）は初期位相である。



（答）回路のインピーダンス

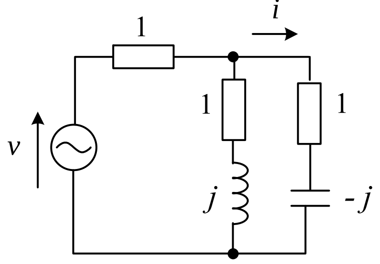
$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\, e^{j\theta} = |Z| e^{j\theta}$$

ここで，$\theta = \tan^{-1} \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_m e^{j\phi}}{\sqrt{2}|Z| e^{j\theta}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}|Z|} e^{j(\phi - \theta)}$$ より，$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \phi - \theta)$$

問題６　図の回路で，全体のインピーダンスを求め，誘導性，純抵抗，容量性のどれか答えよ。また，$v(t) = 100\sqrt{2}\sin 120\pi t$　[V]のとき，$i(t)$ を求め，$t = 0.1$ での電流 $i(0.1)$ を求めよ。図中の数値はインピーダンス[Ω]を表す。



（答）全インピーダンス $Z = 2\ \Omega$，純抵抗

$$I = \frac{100}{Z} \frac{1 + j}{1 + j + 1 - j}$$　分流公式

$$i(t) = 50\sin(120\pi t + \frac{\pi}{4})\ \text{[A]}$$

$$i(0.1) = 50/\sqrt{2}\ \text{A}$$