第8章　フェーザによる交流回路の計算Ⅲ

フェーザを使った交流回路の計算で，位相，フェーザ図，共振現象，電力と力率について詳しく学ぶ。

○ 位相

定常状態の電圧や電流を扱う交流理論では，時間の原点 $(t=0)$ は自由に決めてよい。この結果，回路が与えられると，電圧または電流のどれか１つの初期位相を０に選ぶことが可能であり，そのフェーザは正の数となる。この正の数のフェーザを**基準フェーザ**と呼ぶ。

例えば，『100V の交流電源がある。・・・・・　』という場合，電源電圧の瞬時値は，一般に

$$e = 100\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{8-1}$$

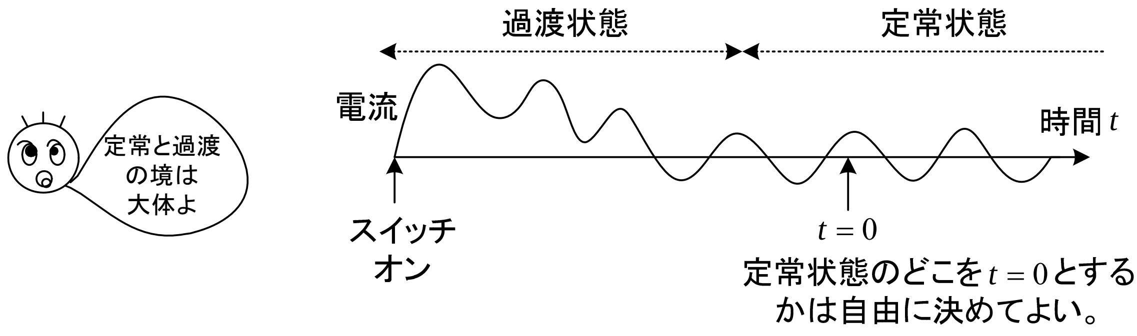
と書ける。φ（ﾌｧｲ）は初期位相で一定値である。瞬時値 e のフェーザ E は定義により

$$E = 100 e^{j\varphi} \tag{8-2}$$

である。ところが，$e = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ と書けるように時間の原点を選ぶと（$e=0$ の瞬間を $t=0$ に），

$$E = 100 \tag{8-3}$$

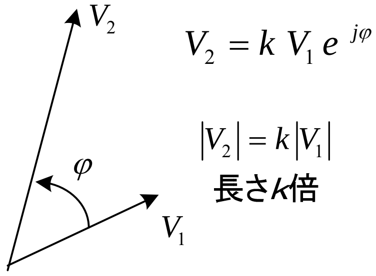
となり，フェーザ表示が正の実数となる。但し，試験問題に(8-1)のように明記してあれば，出題者がそのように時間の原点を決めたのであるから，$E = 100e^{j\varphi}$ とする必要がある。



一般に，電圧 V_2 が電圧 V_1 に対し $k\ (>0)$ 倍の大きさで，位相が $\varphi\ (>0)\,[\mathrm{rad}]$ 進む（電圧 V_2 が進む）とき，

$$V_2 = k V_1 e^{j\varphi} \tag{8-4}$$

と書ける（これは，電流間，電圧と電流間でも成立する）。何故なら，(8-4)より

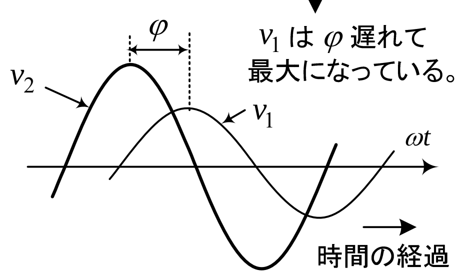


フェーザ図

$$\left|V_2\right| = \left|kV_1 e^{j\phi}\right| = \left|k\right|\left|V_1\right|\left|e^{j\varphi}\right| = k\left|V_1\right| \qquad (k > 0) \qquad \because \left|e^{j\varphi}\right| = 1$$

$$\arg V_2 = \arg k + \arg V_1 + \arg e^{j\varphi} = \arg V_1 + \varphi \qquad \because \arg k = 0 \quad , \arg e^{j\varphi} = \varphi$$

$v_1 = 100\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ であれば，(8-4)より　$v_2 = 100k\sin(\omega t + \frac{\pi}{3} + \varphi)$ となる。



電圧 V_2 が電圧 V_1 の k 倍の大きさで，位相が φ 遅れる（電圧 V_2 が遅れる）ときは，

$$V_2 = kV_1 e^{-j\varphi} \qquad (8\text{-}5)$$

と書ける。

○　フェーザ図の描き方

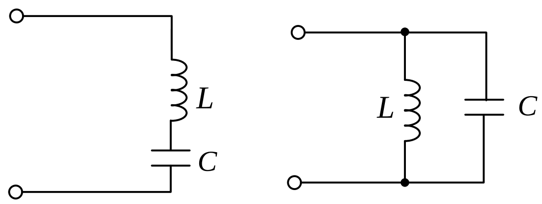
与えられた交流回路で，各部の電圧や電流のフェーザを複素平面上に関連づけて描いたものを**フェーザ図**という。数学のベクトルと同じ考え方で描けるので，ベクトル図とも呼ばれる。回路の電源電圧，抵抗やインダクタンスの値等が決まらないとフェーザ図も決まらないが，大体の図は描ける。この際，フェーザが直交するとか，同方向とか，２つのフェーザの和があるフェーザになるとか，決まっていることは正確に書く必要がある。また，フェーザは大きさ（長さ）と向きを変えなければ自由に移動して書いてもよい。フェーザの大きさは，電流は電流同士，電圧は電圧同士で比べることに意味があり，電流と電圧の大きさを比べても意味がない(もともと単位が違う)。ただし，電流と電圧の位相差（角度）は重要である。

フェーザ図は，位相の基準となる**基準フェーザ**（実数）を実軸にして描くことになる。この基準フェーザは回路に対し１つだけ自由に選ぶことができる。フェーザ図を描くときは，最も電源から遠い電流を基準フェーザに選び，電源電圧を最後に書くようにすれば描きやすいだろう。

フェーザ図により，回路の電圧や電流の大きさと位相がどのような関係になっているか，視覚的に把握でき，図形の公式より計算が容易になることがある。

○　共振現象

ある周波数において回路のインピーダンスあるいはアドミタンスの絶対値が極値をとることを**共振**（きょうしん）(resonance)といい，図(a)の場合を狭義の共振あるいは**直列共振**，図(b)の場合を**反**（はん）**共振**(antiresonance)あるいは**並列共振**という。



(a)　　　　(b)

インピーダンスを計算すると，

(a) の場合 $$Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \tag{8-6}$$

(b) の場合 $$Z = \frac{j\omega L \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \tag{8-7}$$

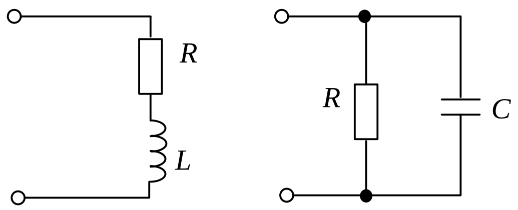
ω を変数として考えたとき，$\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ のとき，(a)の $|Z|$ は極小値 0，(b)の $|Z|$ は極大値∞となる。多くの場合，<u>**インピーダンスの虚部を 0 か∞とおけば**</u> ω_0 が得られる。

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{8-8}$$

は**共振周波数**と呼ばれる。なお，(b)の場合は，アドミタンスを計算すると

$$Y = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \tag{8-9}$$

となり，$|Y|$ の極小値から共振周波数を求める方が簡単である。直列共振の場合には，大きな電流が流れる（理想素子なら∞）ので注意が必要である。並列共振の場合には，電源から流れる電流は，非常に小さくなる（理想素子なら 0)。現実のコイルやコンデンサには損失があり，これを図のようにコイルでは直列抵抗，コンデンサでは並列抵抗として表すことが多い。



(a) (b)

どちらの回路についても，<u>コイルまたはコンデンサ単体の</u>**良さ**を表す**素子の** Q (quality factor)が次式で定義される。(a)の抵抗は小さい程，(b)の抵抗は大きい程良い素子である。

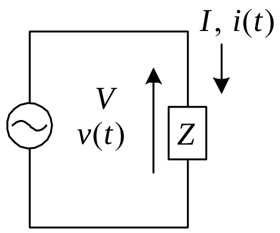
$$Q = \frac{|リアクタンス分|}{抵抗分} = \frac{|サセプタンス分|}{コンダクタンス分} \tag{8-10}$$

(a) の場合 $$Q_L = \frac{\omega L}{R} \tag{8-11}$$

(b) の場合 $$Z = \frac{R\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega CR + 1} = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} \qquad \therefore\ Q_C = \omega CR \tag{8-12}$$

(b)の場合には，コンダクタンスとサセプタンスより簡単に求まるが，どちらでも求まることを示すため，あえてインピーダンスから求めてみた。Q_L, Q_C とも ω とともに増大しそうであるが，実際には抵抗が ω と共に変化するので単調増加ではない。

○ 電力と力率



図で，電圧　$v(t)=\sqrt{2}V_e\sin(\omega t+\varphi)$ (8-13)

電流　$i(t)=\sqrt{2}\,I_e\sin(\omega t+\varphi-\theta)$ (8-14)

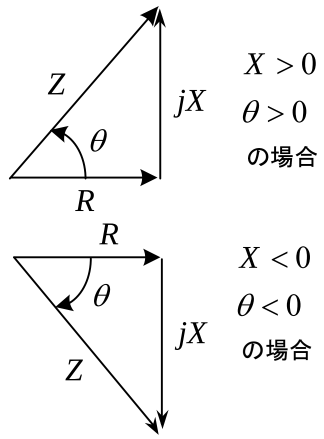
負荷のインピーダンスZを

$$Z=R+jX \quad (8\text{-}15)$$

とすると，

$$\theta=\arg Z \quad (8\text{-}16)$$

である。φ,θは定数です。



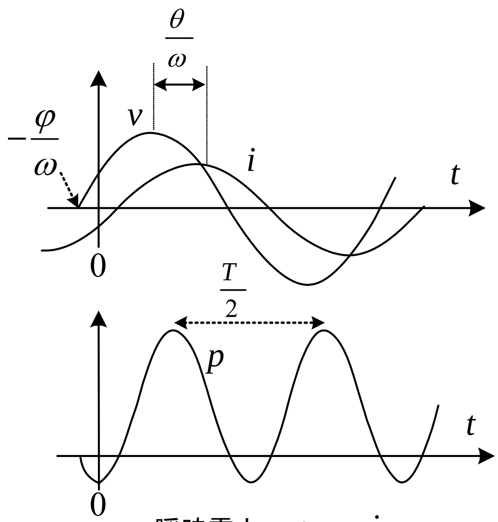
このとき負荷のインピーダンスZ（実質R）で消費される**平均電力**(average power)（または**有効電力**(active power)あるいは単に**電力**ともいう）をPとすると，

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,i(t)\,dt \qquad T=2\pi/\omega\ \text{：周期}$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T 2V_eI_e\sin(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi-\theta)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T V_eI_e(\cos\theta-\cos(2\omega t+2\varphi-\theta))dt$$

$$=V_eI_e\cos\theta \quad (8\text{-}17)$$



瞬時電力：$p=v\,i$

となる。ここで，$\cos\theta$は負荷の力率（りきりつ）(power factor)と呼ばれている。Pはいろんな式で表せる。

$$P=V_eI_e\cos\theta=|V||I|\cos\theta \quad (8\text{-}18)$$

$$=RI_e^{\ 2}=R|I|^2 \quad (8\text{-}19)$$

$$=\frac{R|V|^2}{R^2+X^2}=G|V|^2 \quad (8\text{-}20)$$

これらの式は，フェーザに関する以下の式から導出できるが，覚えておこう。

(8-13)より電圧のフェーザ：$V=V_e\,e^{j\varphi}$　$\therefore$　電圧の実効値 $V_e=|V|$

(8-14)より電流のフェーザ：$I=I_e\,e^{j(\varphi-\theta)}$　$\therefore$　電流の実効値 $I_e=|I|$

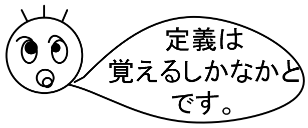
力率　$\cos\theta=\dfrac{R}{|Z|}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}$　（$X=0$で抵抗分だけなら力率1，$R=0$なら力率0）

$V=ZI,\ |V|=|Z||I|$　$\therefore$　$|V|\cos\theta=|Z||I|\cos\theta=|I|R$　また，　$|I|=\dfrac{|V|}{|Z|}=\dfrac{|V|}{\sqrt{R^2+X^2}}$

アドミタンス　$Y=G+jB=\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{R+jX}=\dfrac{R}{R^2+X^2}-j\dfrac{X}{R^2+X^2}$

ところで，電圧と電流のフェーザが求まっている場合，電圧の共役複素数と電流の積である**複素電力**と呼ばれる量を計算すると，有効電力や無効電力が簡単に求められる。

複素電力(complex electric power)は，次式で定義される。



$$P_c \equiv \overline{V}\ I \tag{8-21}$$

(8-13) の電圧と(8-14)の電流をフェーザ表示して代入すると複素電力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_c &= V_e e^{-j\varphi} I_e e^{j(\varphi-\theta)} = V_e I_e e^{-j\theta} \\ &= V_e I_e \cos\theta - jV_e I_e \sin\theta \\ &= |V||I|(\cos\theta - j\sin\theta) \\ &\equiv P + jP_r \end{aligned} \tag{8-22}$$

実部　$P = V_e I_e \cos\theta$　：**平均電力（有効電力あるいは単に電力）**である。 単位 W（ワット）

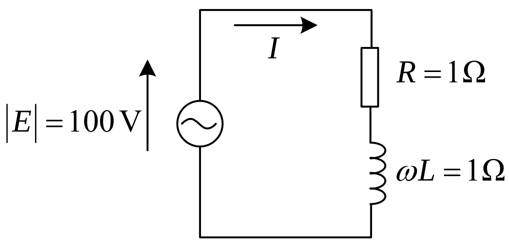
虚部　$P_r = -V_e I_e \sin\theta$　：**無効電力**(reactive power)という。　単位 Var（バール）

誘導性負荷なら $\theta > 0$ ，$P_r < 0$，　　容量性負荷なら $\theta < 0$ ，$P_r > 0$

絶対値　$P_a = V_e I_e = |P_c| = \sqrt{P^2 + P_r^2}$　：**皮相電力**(apparent power)**または容量**という。 単位は VA（ボルトアンペア）を用いる。

複素電力の実部と虚部はそれぞれ有効電力と無効電力である。無効電力はコイルやコンデンサと電源の間でやりとりされる(消費されない)エネルギーの目安になる。なお，瞬時電力のフェーザが複素電力ではない。もともと瞬時電力は電圧と電流の積だからフェーザを定義できない。

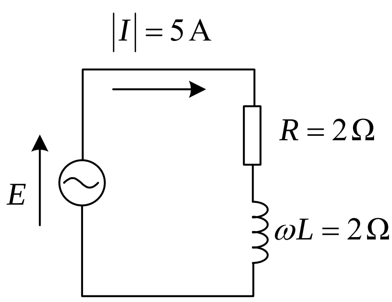
<u>電力の計算例</u>



E を基準にとると，$E = 100$ とおける。複素電力 P_c は

$$\begin{aligned} P_c &= \overline{E}I = 100 \cdot \frac{100}{R + j\omega L} \\ &= \frac{10000}{1+j} = \frac{10000(1-j)}{(1+j)(1-j)} \\ &= 5000 - j5000 \end{aligned}$$

$$\therefore P = 5000\,\mathrm{W} \quad , \quad P_r = -5000\,\mathrm{Var}$$



I を基準フェーザにとると，$I = 5$ と書ける。

$$E = (R + j\omega L)I = (2 + j2) \times 5 = 10 + j10[\mathrm{V}]$$

$$P_c = \overline{E} \cdot I = (10 - j10) \times 5 = 50 - j50$$

$$\therefore P = 50\,\mathrm{W} \quad , \quad P_r = -50\,\mathrm{Var}$$

有効電力だけを計算する場合，　$P = R|I|^2 = 2 \times 5^2 = 50\,\mathrm{W}$ として求めた方が簡単だ。$\theta = \tan^{-1} 2/2 = \pi/4$ だから，負荷の力率は $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ である。

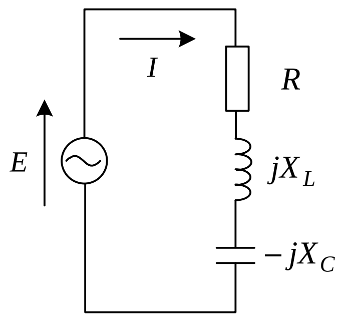
例題1　図の回路で，電源電圧Eと電流Iの位相が下記の条件を満たすときR, X_L, X_Cの関係式を求めよ。

（1）Iの位相がEの位相よりθ_0(正)だけ遅れる。

（2）Iの位相がEの位相よりθ_0(正)だけ進む。

（3）E, Iが同相である。

（はじめにちょっと一言）コイルのjX_Lは$\omega L = X_L$の意味で，コンデンサの$-jX_C$は$\dfrac{1}{\omega C} = X_C$の意味で書いている。



（解）回路のインピーダンスをZとおくと，

$$Z = R + j(X_L - X_C) \qquad \cdots\cdots ①$$

電流Iは，次式で求まる。

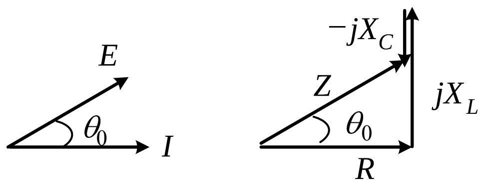
$$Z = \frac{E}{I} \qquad \cdots\cdots ②$$

②より，　$\arg Z = \arg E - \arg I \qquad \cdots\cdots ③$

（1）題意より，$\arg E - \arg I = \theta_0 \qquad \cdots\cdots ④$

③，④より，$\arg Z = \theta_0$

故に，$\tan\theta_0 = \dfrac{X_L - X_C}{R} \qquad (X_L > X_C)$

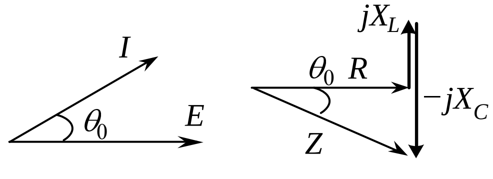


＊　誘導性負荷に相当する。

（2）題意より，$\arg I - \arg E = \theta_0 \qquad \cdots\cdots ⑤$

③，⑤より，$\arg Z = -\theta_0 \qquad (\arg Z < 0)$

故に，$\tan\theta_0 = \dfrac{X_C - X_L}{R} \qquad (X_C > X_L)$



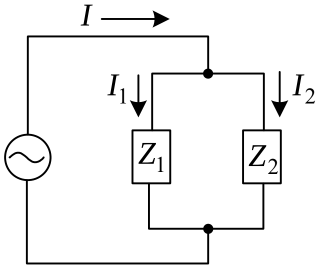
＊　容量性負荷に相当する。

（3）同相なので$\arg E = \arg I$だから　③より　$\arg Z = 0$　よって，①より$X_L = X_C$

＊共振している。純抵抗負荷に相当する。

例題 2　図の回路で，$|I_1| = 5\,\mathrm{A}$，$|I_2| = 10\,\mathrm{A}$ で，I_2 が I_1 より $30°$ 進んでいるという。

$|I|$ は何 A か。また，I，I_1，I_2 の関係をフェーザ図に書け。



交流電流計で測ると，I_1，I_2 は
それぞれ 5 A, 10A を表示する。
電流計は線を切って入れる。

（解）I_1 を基準フェーザ（実数）にとると，

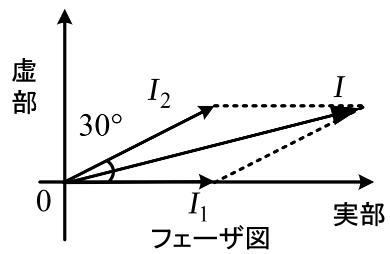
$$I_1 = 5 \quad , \quad I_2 = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$$

とおける。故に，

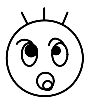
$$I = I_1 + I_2 = 5 + 10(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= 5 + 5\sqrt{3} + j5$$

$$\therefore |I| = 5\sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + 1} = 14.5 \ \ \mathrm{A}$$

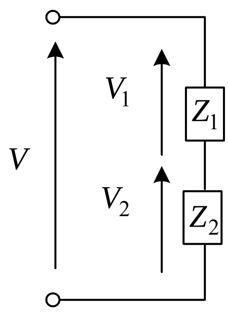


I を求めるには平行四辺形を作る。



$I = I_1 + I_2$ は成立するけど，$|I| = |I_1| + |I_2|$ は成立しません。だから，I を電流計で測っても，15A でなく，14.5A が表示されます。交流電流計や交流電圧計は，実効値すなわちフェーザの絶対値を表示するように作られとるとです。

○　$|V_1| = 5\,\mathrm{V}$，$|V_2| = 10\,\mathrm{V}$ で，V_2 が V_1 より $30°$ 進んでいるという。



$|V|$ は何 V か。

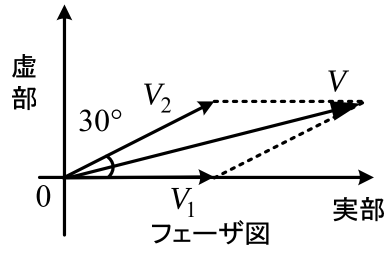
この問題も全く同様に考えることができる。

$|V| = 14.5\,\mathrm{V}$ となる。絶対値が電圧計の読み。

やはり，$V = V_1 + V_2$ は成立するが，$|V| = |V_1| + |V_2|$

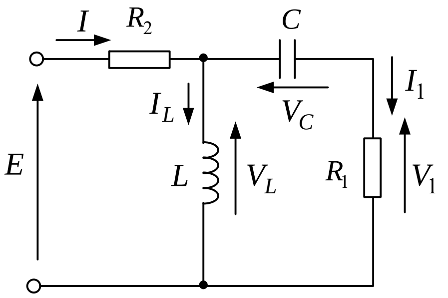
は成立しない。

＊フェーザ図を基に，実際の電圧がどうなるか正弦波を書いてみよう。フェーザ図の有難さが理解できよう。



例題 3　図の回路のフェーザ図を書け。書いた順番に番号を記せ。

（解）



(a)

$V_1 = R_1 I_1$ 　・・・①（V_1 と I_1 は同相）

$V_C = \dfrac{I_1}{j\omega C}$ 　・・・②（V_C は I_1 より $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れる）

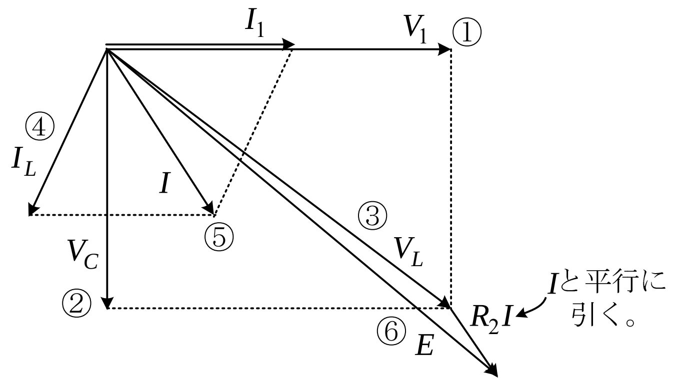
$V_L = V_1 + V_C$ 　・・・③

$I_L = \dfrac{V_L}{j\omega L}$ 　・・・④（I_L は V_L より $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れる）

$I = I_1 + I_L$ 　・・・⑤

$E = R_2 I + V_L$ 　・・・⑥

I_1 を基準フェーザ（実数）としてフェーザ図を書く。

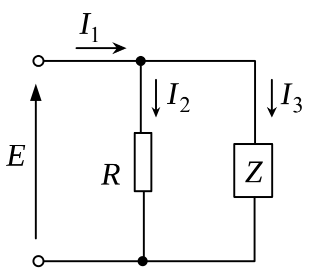


R_1, R_2, ω, C, L はいずれも正である。
j を掛けると反時計回り 90° 回転
j で割ると時計回り 90° 回転

＊　回路図内の V_1 と I_1 の矢印は逆だがフェーザ図では同じ向き。
回路図の矢印は測定の向き。

※　長さは定数 R , L, C でいろいろ変化するから，自分で適当に書く部分もある。

（解）



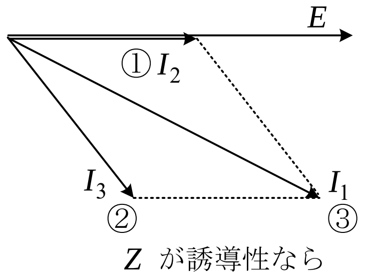
（b）

$I_2 = \dfrac{E}{R}$ 　・・・①

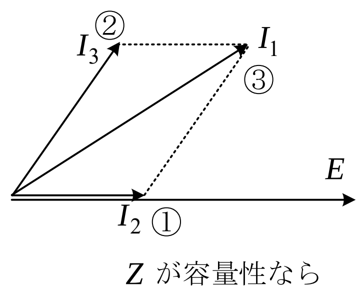
$I_3 = \dfrac{E}{Z}$ 　・・・②

$I_1 = I_2 + I_3$ 　・・・③

E を基準フェーザとする。

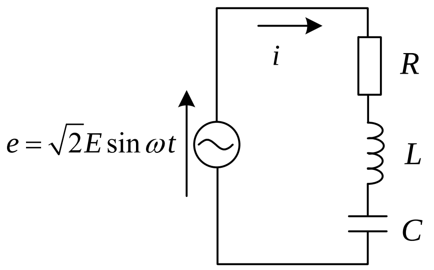


Z が誘導性なら



Z が容量性なら

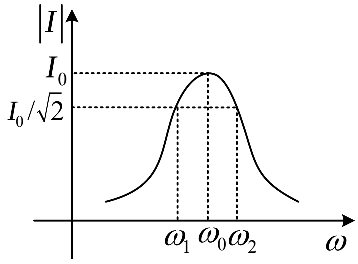
例題 4　図の直列共振回路で，共振角周波数を ω_0，電流の大きさが共振時の $1/\sqrt{2}$ になるときの角周波数を ω_1，ω_2 とする。R がコイルとコンデンサ両方の損失を表す抵抗のとき，**直列共振回路の** Q は次式で定義される*。



$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}$$

Q を ω_0，ω_1，ω_2 で表せ。但し，$\omega_1<\omega_2$ とする。

　　＊ $Q=1/(\omega_0 CR)$ に等しい。R は小さいほど良い。



(解)　合成インピーダンス Z は，$Z=R+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})$

　　となり共振角周波数は，Z の虚部を 0 とおき

$$\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}\qquad \therefore\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\qquad ①$$

である。電流の大きさは，電圧の大きさ E（実効値）を用いて次式で与えられる。

$$|I|=\frac{E}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}\qquad ②,\qquad I_0=\frac{E}{R}\quad (共振時)\quad ③$$

②，③より

$$\frac{|I|}{I_0}=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega CR})^2}}\qquad ④$$

題意より　ω_1，ω_2 で　$\dfrac{|I|}{I_0}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑤　　となる。④，⑤より

$$\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega CR}=\pm 1$$　（この式を満足する正の ω が ω_1，ω_2 になる）

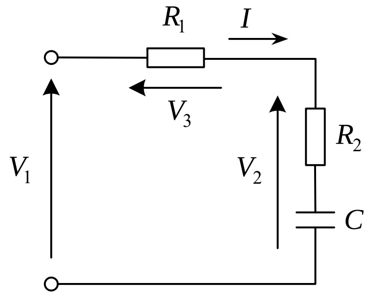
(1)　$\dfrac{\omega L}{R}-\dfrac{1}{\omega CR}=1$ のとき，$\omega^2-\dfrac{R}{L}\omega-\dfrac{1}{LC}=0$　$\omega>0$ より　$\omega_2=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{R}{L}+\sqrt{(\dfrac{R}{L})^2+\dfrac{4}{LC}}\right\}$

(2)　$\dfrac{\omega L}{R}-\dfrac{1}{\omega CR}=-1$ のとき，$\omega^2+\dfrac{R}{L}\omega-\dfrac{1}{LC}=0$　$\omega>0$ より　$\omega_1=\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{R}{L}+\sqrt{(\dfrac{R}{L})^2+\dfrac{4}{LC}}\right\}$

よって，(1),(2)より　$\omega_2-\omega_1=\dfrac{R}{L}$　　故に，$Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$

＊　Q が大きいほど損失が小さく理想的な共振特性に近い。つまり図の電流特性が鋭い程良い。共振の利用として時計などに使われている水晶振動子の Q は 10^4～10^6 程度である。

例題 5　図の回路で，R_2 で消費される電力 P を $|V_1|, |V_2|, |V_3|, R_1$ で表せ。

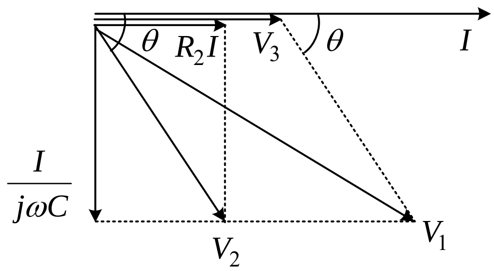


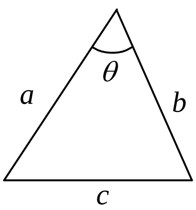
（解）図より，$V_2 = (R_2 + \dfrac{1}{j\omega C})I$　　・・・①

$V_3 = R_1 I$　　・・・②

$V_1 = V_2 + V_3$　　・・・③

I を基準フェーザとしてフェーザ図を書く。





$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$
余弦定理

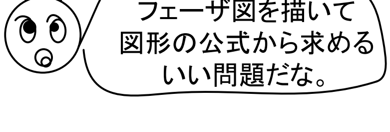
$P = |V_2||I|\cos\theta$　で与えられる。

図より，

$$|V_1|^2 = |V_2|^2 + |V_3|^2 - 2|V_2||V_3|\cos(\pi - \theta)$$

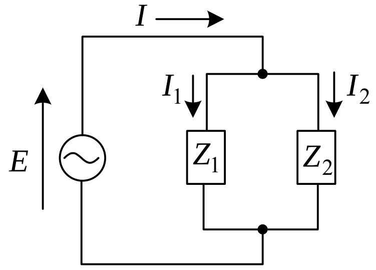
また，②より $|I| = \dfrac{|V_3|}{R_1}$　　$\therefore P = \dfrac{|V_2||V_3|}{R_1}\cos\theta$

故に，$P = \dfrac{|V_1|^2 - |V_2|^2 - |V_3|^2}{2R_1}$



例題 6　図に示すように，力率 80% の誘導性負荷 Z_1 と力率 60% の容量性負荷 Z_2 に電圧 $100\,\mathrm{V}$ を加えると，Z_1 に $10\,\mathrm{A}$，Z_2 に $5\,\mathrm{A}$ が流れた。この負荷全体の有効電力 P，無効電力 P_r，力率 $\cos\theta$ および全電流を求めよ。

（解）複素電力 P_c を計算する。((8-22)参照せよ。)



$$
\begin{aligned}
P_c &= \overline{E}I \\
&= \overline{E}(I_1 + I_2) \\
&= \overline{E}I_1 + \overline{E}I_2 \\
&= |E||I_1|(\cos\theta_1 - j\sin\theta_1) \\
&\quad + |E||I_2|(\cos\theta_2 - j\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

但し，$\theta_1 = \arg Z_1$　，　$\theta_2 = \arg Z_2$

題意より，

$$|E| = 100 \quad , \quad |I_1| = 10 \quad , \quad |I_2| = 5$$

Z_1 は誘導性負荷なので $\theta_1 > 0$　　$\cos\theta_1 = 0.8$　より　$\sin\theta_1 = 0.6$

Z_2 は容量性負荷なので $\theta_2 < 0$　　$\cos\theta_2 = 0.6$　より　$\sin\theta_2 = -0.8$

故に，

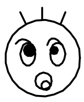
$$P_c = 100\times10\times(0.8 - j0.6) + 100\times5\times(0.6 + j0.8) = 1100 - j200$$

有効電力　$P = 1100\,\mathrm{W}$，　無効電力　$P_r = -200\,\mathrm{Var}$

皮相電力（容量）　$P_a = |E||I| = |P_c| = \sqrt{1100^2 + 200^2} = 1118\ \mathrm{VA}$

全電流　$|I| = \dfrac{P_a}{|E|} = \dfrac{1118}{100} = 11.18\,\mathrm{A}$

力率 $= \dfrac{P}{P_a} = \dfrac{1100}{1118} = 0.98$



E を基準フェーザに選ぶと $E = 100$ と書けます。I_1, I_2, I のフェーザを求める。

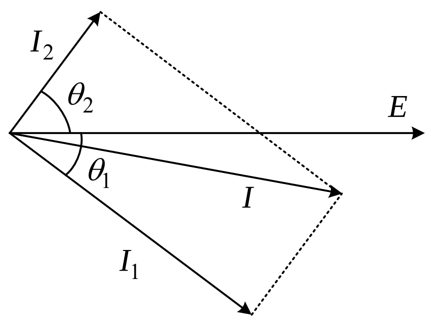
$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{100}{|Z_1|e^{j\theta_1}} = \frac{100}{|Z_1|}e^{-j\theta_1} = |I_1|(\cos\theta_1 - j\sin\theta_1) = 10\times(0.8 - j0.6) = 8 - j6$$

（sin の前のマイナスは，電流のフェーザ I がインピーダンス Z で割るから出てくる）

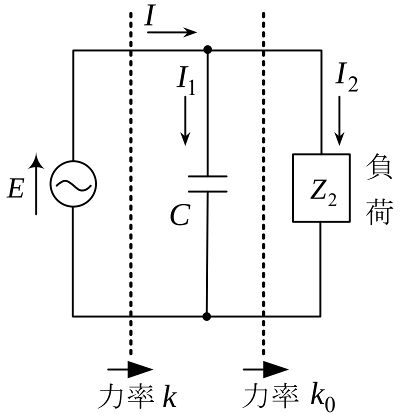
同様に

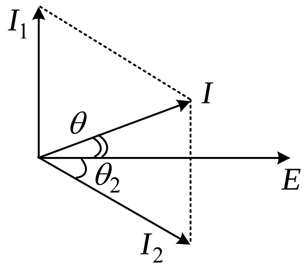
$$I_2 = 5\times(0.6 + j0.8) = 3 + j4$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = 11 - j2$$



例題 7　有効電力 P[kW]，力率 k_0 の誘導性負荷に並列に，容量（皮相電力）Q[kVA] のコンデンサを入れて，力率を k (＞k_0) にしたい。Q を求めよ。





力率改善

E と I の位相差 θ を小さくして，力率 $\cos\theta = k$ を 1 に近づける。これにより，出力は同じであるが，電源から流れる電流が減少し，電源の設備と電源（送電線）の内部抵抗の和 R で消費される電力を小さくできる。力率が悪いと，電力会社に割増料金を払う必要がある。

（解）図のように，E , I , I_1 , I_2 をとる。複素電力 P_C は，

$$P_C = \overline{E}I$$

$$= \overline{E}I_1 + \overline{E}I_2$$

$$= |E||I_1|(\cos\theta_1 - j\sin\theta_1) + |E||I_2|(\cos\theta_2 - j\sin\theta_2)$$

但し，$\theta_1 = \arg(\frac{1}{j\omega C}) = -\frac{\pi}{2}$　，$\theta_2 = \arg Z_2$

よって，$\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$　より，$\cos\theta_1 = 0$　，$\sin\theta_1 = -1$

題意より　$\cos\theta_2 = k_0$　，誘導性負荷だから $\theta_2 > 0$　$\therefore \sin\theta_2 = \sqrt{1-k_0^{\ 2}}$

また，題意より　$|E||I_2|\cos\theta_2 = P$ [kW]　，$|E||I_1| = Q$ [kVA]

故に，$P_C = P + j(Q - P\frac{\sqrt{1-k_0^{\ 2}}}{k_0})$　　　　公式として覚えておくと便利！

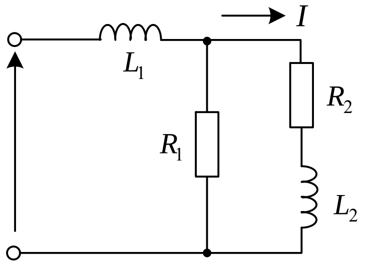
（有効電力は負荷分 P のみ，無効電力はコンデンサ分 Q と負荷分 $\sin\theta_2$）

従って，全体の力率 k は，

$$k = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{\mathrm{R_e}(P_C)}{|P_C|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - \frac{P}{k_0}\sqrt{1-k_0^{\ 2}})^2}}$$

これより，$Q = \frac{P\sqrt{1-k_0^{\ 2}}}{k_0} \pm \frac{P\sqrt{1-k^2}}{k}$　$[\mathrm{kVA}]$

問題 1　図の回路において，I を E より 90° 遅らせるための条件を求めよ。

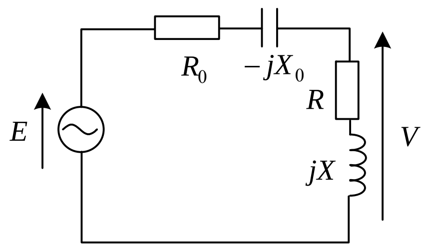


（答）$R_1 R_2 = \omega^2 L_1 L_2$

＊E を基準フェーザにとると，I の実部は 0

まず，フェーザ I を求めよ。57 ページ例題 6 参照

問題 2　図の回路で，V が E より 30° 進み，$|V| = |E|$ であるとき，R_0, X_0 を R, X で表せ。



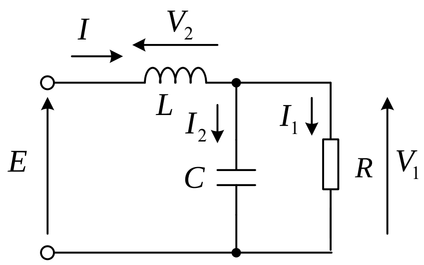
（答）$R_0 = R(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) + \frac{X}{2}$

$$X_0 = \frac{R}{2} + X(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

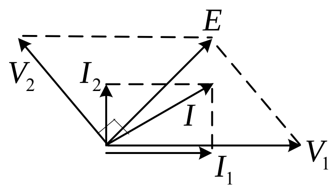
＊$V = e^{j\frac{\pi}{6}} E$ である。(8-4)参照

$V/E = (a + jb)/(c + jd)$　なら $a + jb = (c + jd)e^{j\pi/6}$ で実部，虚部比較

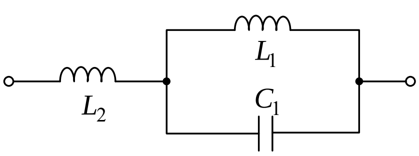
問題 3　図の回路のフェーザ図を書け。



(答)　I_1 を基準フェーザとして書き始める。

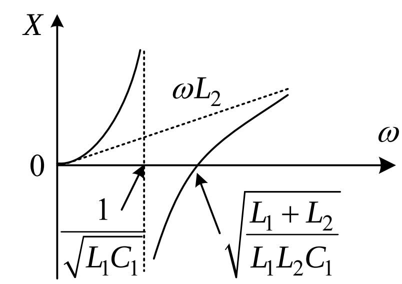


問題 4　横軸に ω をとり，図の回路のリアクタンス X のグラフを書け。また，$X = 0$ となる直列共振周波数と $X = \pm\infty$ となる並列共振周波数を求めよ。

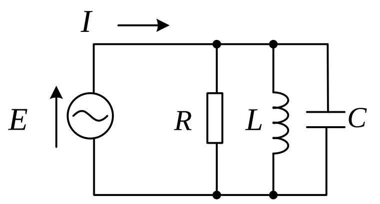


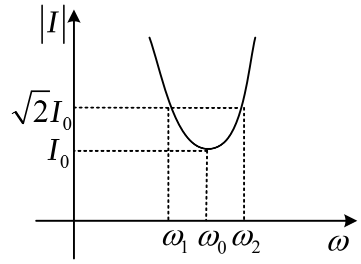
$$X = \omega L_2 + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}$$

（答）



問題 5　図の並列共振回路で，共振角周波数を ω_0，電流の大きさが共振時の $\sqrt{2}$ 倍になるときの角周波数を ω_1，ω_2 とする。R がコイルとコンデンサ両方の損失を表す抵抗のとき，**並列共振回路の** Q は $Q = R\omega_0 C$ で定義される。Q を ω_0，ω_1，ω_2 で表せ。



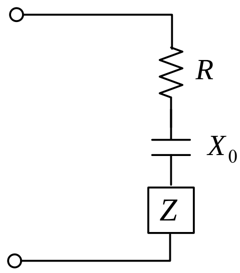


（答）共振時アドミタンスの虚部が 0 となることから $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ を得る。$I_0 = |E|/R$

$$\frac{|I|}{I_0} = \sqrt{1 + (\omega RC - \frac{R}{\omega L})^2} \quad \therefore \quad \omega RC - \frac{R}{\omega L} = \pm 1 \qquad Q = R\omega_0 C = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

＊ R は大きいほど良い。

問題 6　図のインピーダンス Z は力率 0.8 の容量性負荷である。これに，抵抗 $R_0 = 2\Omega$ と容量リアクタンス $X_0 = 5\Omega$ を直列に接続したところ，全体の力率は 0.6 になった。Z を求めよ。

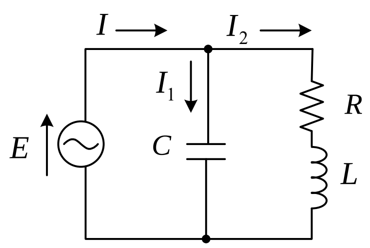


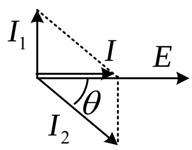
(答) 容量性なので $Z = R - jX$　(但し，$X > 0$) とおく。力率 $\cos\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 0.8$　だから

$$\sin\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta} = -0.6 \quad (\theta < 0\text{だから}) \quad \text{故に，} \tan\theta = \frac{-X}{R} = \frac{-0.6}{0.8} = \frac{-3}{4}$$

故に　$\dfrac{X}{R} = \dfrac{3}{4}$　同様に考えて　$\dfrac{-(X_0 + X)}{R_0 + R} = \dfrac{-0.8}{0.6} = \dfrac{-4}{3}$ より，$Z = 4 - j3[\Omega]$

問題 7　力率 80%，皮相電力（容量）5kVA の RL 負荷に並列にコンデンサを接続し，電源からみた力率を 100%にしたい。接続するコンデンサの静電容量 C を求めよ。ただし，電源は 60Hz，2kV とする。





(答)　回路図より　$|I_1| = \omega C|E|$

力率 1 (E, I が同じ向き)のフェーザ図より

$|I_1| = |I_2|\sin\theta$　　また，題意より

$$|E||I_2| = 5\times 10^3, \cos\theta = 0.8, |E| = 2\times 10^3$$

などから　$C = 2\mu\text{F}$