

第9章 三相交流

120度ずつ位相がずれた a, b, c 相の3つの電源に負荷をつないだ三相回路の解析を学ぶ。フェーザ図を書いて大きさや位相を考えると計算が楽である。三相回路は電力の供給やモータの運転などで用いられ、また交流理論の演習としても大変役に立つ。

○ 三相起電力(three-phase electromotive force)の発生

固定した三相コイル a, b, c の中で磁石を回転させると実効値が等しく 120度ずつ位相のずれた図の三相交流起電力 e_a, e_b, e_c が発生する (対称電源という)。磁極 N, S がコイル片を通過するとき最も高い電圧が出る*。 ω [rad/s] は磁石の角速度で $\omega t = 2\pi$ で1回転する。

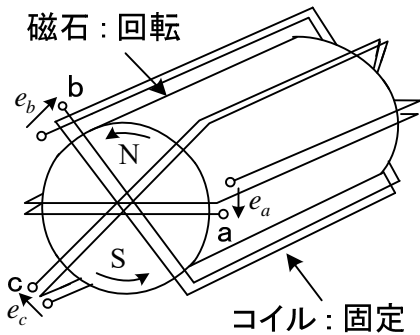


図 9-1 $\omega t = 0$ での磁極の位置

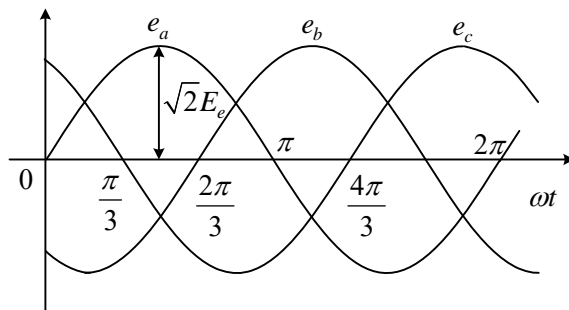


図 9-2 磁石の回転でコイルに生じる起電力 (電圧)

三相起電力 (瞬時値) は次式で表わせる。このとき、相順は a, b, c の順であるという。

$$\left\{ \begin{array}{l} e_a = \sqrt{2}E_e \sin \omega t \\ e_b = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_c = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{array} \right. \quad (9-1)$$

起電力の最大値を見ると、時間の経過とともに、 e_a, e_b, e_c の順になっている。

$\leftarrow \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$ と同じ。

↓ 各電圧をフェーザ表示すると

$$\left\{ \begin{array}{l} E_a = E_e \\ E_b = E_e e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ E_c = E_e e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{array} \right. \quad (9-2)$$

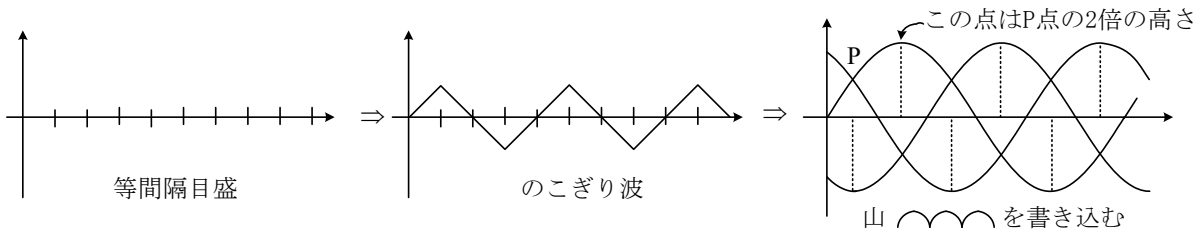
$e^{j\frac{2\pi}{3}}$ を掛けると $\frac{2}{3}\pi$ 回転。

ここで、

$$e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9-3)$$

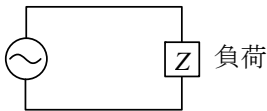
* 電源の内部抵抗を無視するので、起電力は電源の電圧に等しい。

☆ 三相交流の書き方



○ 三相起電力の結線

単相の場合



三相の場合

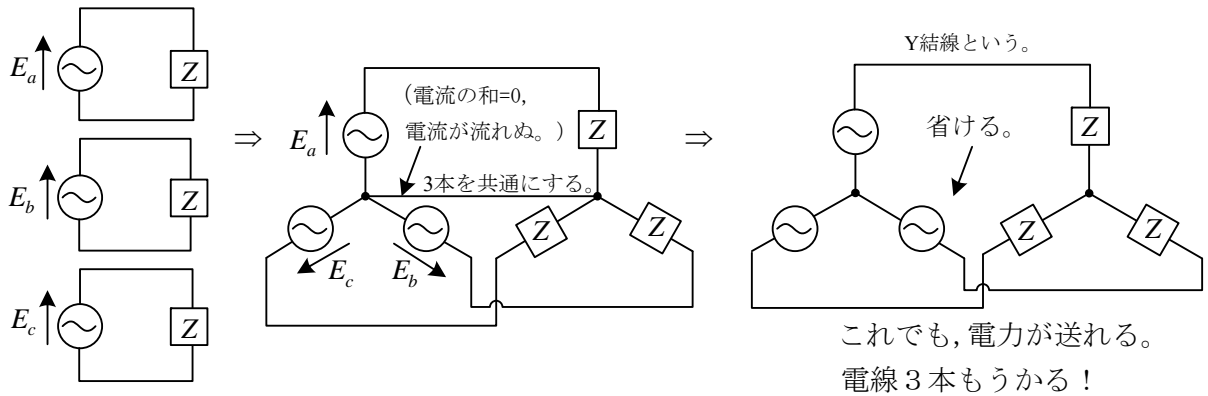


図 9-3 三相電源と負荷の結線

Y 結線の電源（Y 形電源）の相電圧(phase voltage)と線間電圧(line voltage)

E_a, E_b, E_c を相電圧, E_{ab}, E_{bc}, E_{ca} を線間電圧と呼ぶ。電力を送る場合, a, b, c の端子に電線が接続され, 負荷に供給される。線間電圧には電線の間の電圧という意味がある。また, 線間電圧は直接測定が可能で, 普通“三相電圧 200V”と言うと, 線間電圧の実効値が 200V ということの意味する。図の相電圧と線間電圧のフェーザ図は必ず書けるようになる。

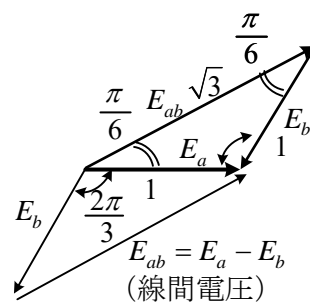
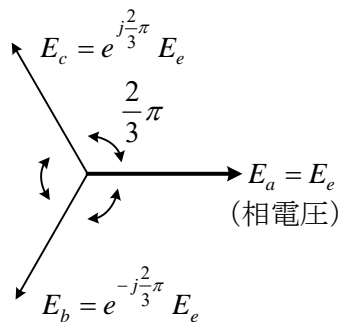
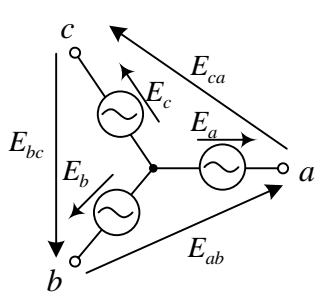


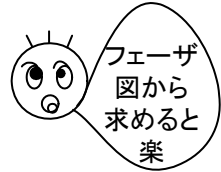
図 9-4 相電圧と線間電圧

図 9-5 相電圧のフェーザ図

図 9-6 相電圧と線間電圧のフェーザ図

対称電源の性質 1. $E_a + E_b + E_c = 0$ $e_a + e_b + e_c = 0$ (9-4)

2. 線間電圧 = $\sqrt{3}$ × 相電圧 (9-5)
 (実効値) (実効値)



(9-4)は、44 ページの問題 2 を参照のこと。(9-5)については、図 9-6 より 30 度、30 度、120 度の二等辺三角形なので、辺の長さの比は $1:1:\sqrt{3}$ で、 E_{ab} は E_a より $\pi/6$ 回転しているから

$$E_{ab} = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (9-6)$$

となる (覚えるのではなく理解する)。直接(9-2),(9-3)で $E_a - E_b$ を計算し確かめよ。

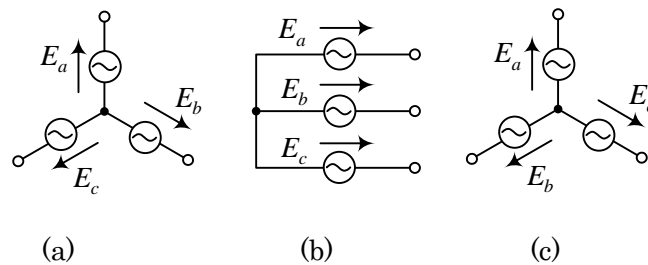
$$\therefore |E_{ab}| = \sqrt{3}|E_a| |e^{j\pi/6}| = \sqrt{3}|E_a| = \sqrt{3}E_e \quad (\text{フェーザの絶対値=実効値})$$

同様に、相電圧のフェーザ図に E_{bc}, E_{ca} のフェーザを書き込むことで次式が得られる。

$$E_{bc} = \sqrt{3}E_a e^{-j\frac{\pi}{2}} (= E_{ab} e^{-j\frac{2\pi}{3}}) \quad (9-7)$$

$$E_{ca} = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{5\pi}{6}} (= E_{ab} e^{j\frac{2\pi}{3}}) \quad (9-8)$$

☆ 質問 何故、三相電源は下の図(a)の様に書くのか？



(答) どの様に書いてもよい。例えば、右図(b),(c)。図(a)はフェーザ図が、 $2\pi/3$ ずつずれるのが視覚的にはつきし、フェーザ図とも対応している (本テキストではこれを主に使用する)。図(c)は、発電機やモータの解析で良く用いられる。理由は、一般に角度の正方向は反時計方向であり、起電力の発生で示したコイルの空間的配置をそのまま図示した場合に対応するからである。

☆ 線間電圧の瞬時値はどんな波形になるのですか？

(答) 例えば、線間電圧 $e_{ab} = e_a - e_b$ は右図のようになります。大きさは相電圧 e_a の $\sqrt{3}$ 倍で位相は e_a より $\pi/6$ 進みます。 e_{bc}, e_{ca} はそれぞれ e_{ab} より $2\pi/3, 4\pi/3$ 遅れた波形になります。フェーザ図と比べよ。

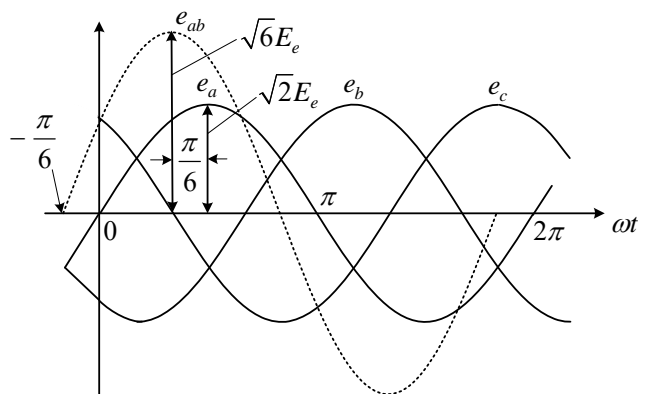
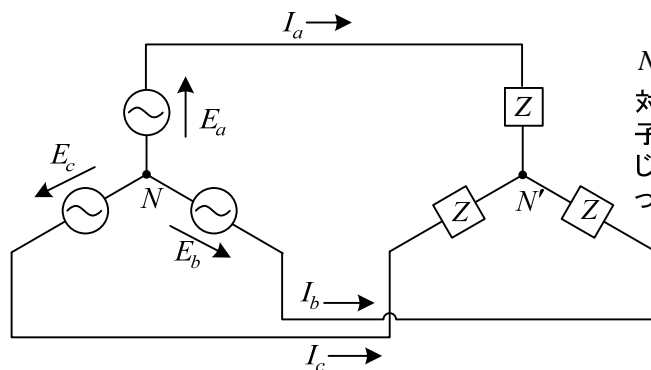


図 9-7 相電圧と線間電圧の波形

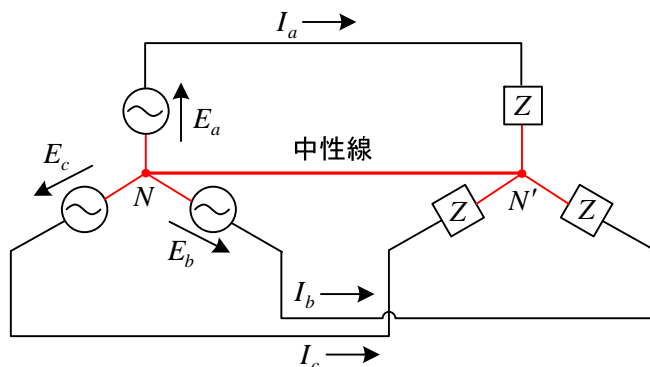
○ 対称 Y-Y 回路 対称 Y 形電源に対称 Y 形負荷を接続した回路



N, N' を中性点という。
対称負荷とは、三つの端子の間に区別がなく、同じインピーダンスがつながっている負荷のこと。

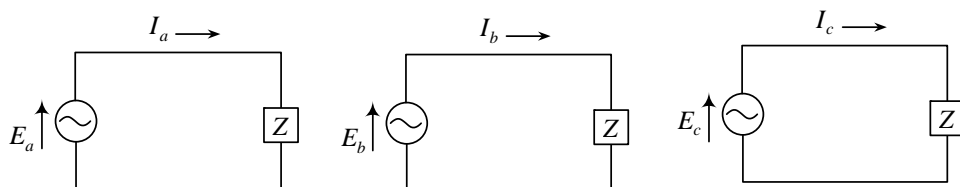
図 9-8 対称 Y-Y 回路

まず、中性点 $N-N'$ を導線で結んだ図の回路を考えてみよう。



各相に流れる電流を相電流、線路に流れる電流を線電流と呼ぶ。
Y形電源では、両者は等しい。

$N-N'$ が接続されているので、回路は各相に分離して解くことができる。すなわち、



$$\left\{ \begin{array}{l} e_a = \sqrt{2}E_e \sin \omega t \\ e_b = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_c = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right. \text{ のフェーザは, } \left\{ \begin{array}{l} E_a = E_e \\ E_b = E_e e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ E_c = E_e e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{array} \right. \text{ であるから,}$$

$$\text{電流のフェーザは, } \left\{ \begin{array}{l} I_a = E_a / Z = I_e e^{-j\theta} \\ I_b = E_b / Z = I_e e^{-j(\theta + \frac{2}{3}\pi)} \\ I_c = E_c / Z = I_e e^{-j(\theta - \frac{2}{3}\pi)} \end{array} \right. \text{ ただし, } I_e = \frac{E_e}{|Z|} \quad (9-9)$$

$$\theta = \arg Z$$

となる。よって、電流の瞬時値は次式となる。

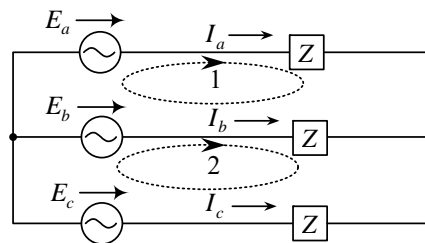
$$\begin{aligned}
i_a &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta) \\
i_b &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta - \frac{2\pi}{3}) \\
i_c &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta + \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}
\tag{9-10}$$

電圧が $2\pi/3$ ずつずれて、負荷は同じなので、当然の結果である。この結果、 $i_a + i_b + i_c = 0$ （または、 $I_a + I_b + I_c = 0$ ）だから、 $N-N'$ 間には電流は流れない。よって、 $N-N'$ の導線を取り除いても回路の電流は変化しない。以上により、 $N-N'$ を導線で結んだ回路と結ばない回路は等価であると考えられる。従って対称Y-Y回路では、 $N-N'$ 間は導線で結ばれていないが、これを結んで考えることにより簡単に電流を求めることができる。

注意事項： $N-N'$ を結んで考えて良いのは、対称Y-Y回路だけで、三相交流で各相電圧の実効値が等しく、位相が $2\pi/3$ ずつずれていること、負荷のインピーダンスが各相とも同じである場合に限る。例えば、 $N-N'$ を結んでいない最初の回路で仮に $e_a = e_b = e_c$ の場合は、対称性から $i_a = i_b = i_c$ で、電流則より $i_a + i_b + i_c = 0$ だから $i_a = i_b = i_c = 0$ となる。この場合、 $N-N'$ を結ぶと電流が流れるから、結ぶと等価でなくなる。

対称Y-Y回路をキルヒホッフの法則を使った方法で解いてみる。

図の回路で、 $E_a = E_e$, $E_b = e^{-j\frac{2}{3}\pi} E_e$, $E_c = e^{j\frac{2}{3}\pi} E_e$ のとき、 I_a, I_b, I_c を求める。



図より、

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{閉路 1 : } E_a - E_b = ZI_a - ZI_b \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{閉路 2 : } E_b - E_c = ZI_b - ZI_c \quad \dots \textcircled{3}$$

I_a, I_b, I_c が未知数で、独立な式が3つあるので解ける。

$$\textcircled{2} \text{より, } I_a = \frac{E_a - E_b + ZI_b}{Z}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } I_c = \frac{-E_b + E_c + ZI_b}{Z}$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して, } \frac{E_a - E_b + ZI_b}{Z} + I_b + \frac{-E_b + E_c + ZI_b}{Z} = 0$$

$$\therefore 3ZI_b + E_a - 2E_b + E_c = 0$$

$$\therefore I_b = \frac{2E_b - E_a - E_c}{3Z} \quad (E_a + E_b + E_c = 0 \text{ より})$$

$$= \frac{E_b}{Z} \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{を} \textcircled{2} \text{に代入して, } I_a = \frac{E_a}{Z}$$

$$\textcircled{4} \text{を} \textcircled{3} \text{に代入して, } I_c = \frac{E_c}{Z}$$

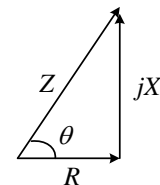
このように、三相回路の知識が無くても解くことができる。しかし、 $N-N'$ を結ぶと、3つの回路に分離できて簡単に答えが求まる。三相回路で新しく勉強した重要なポイントだ。



電力の計算 (対称 Y-Y 回路)

$$P = |E_a||I_a|\cos\theta + |E_b||I_b|\cos\theta + |E_c||I_c|\cos\theta = 3|E_a||I_a|\cos\theta \quad (9-11)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because |E_a| = |E_b| = |E_c| = E_e \\ |I_a| = |I_b| = |I_c| = \frac{E_e}{|Z|} = I_e \end{array} \right)$$



$$Z = R + jX$$

ここで、 $\cos\theta$: 負荷の力率

実際にメータで測定できるのは、線間電圧だから、線間電圧を用いて P を求めておく。

$$|E_{ab}| = \sqrt{3}|E_a| \text{ より,}$$

$$P = \sqrt{3}|E_{ab}||I_a|\cos\theta = \sqrt{3} \times \text{線間電圧} \times \text{線電流} \times \text{力率} \quad (9-12)$$

P は三相電力計で測れる。よって、この式より力率を求めることができる。

次に、瞬時電力を求める。

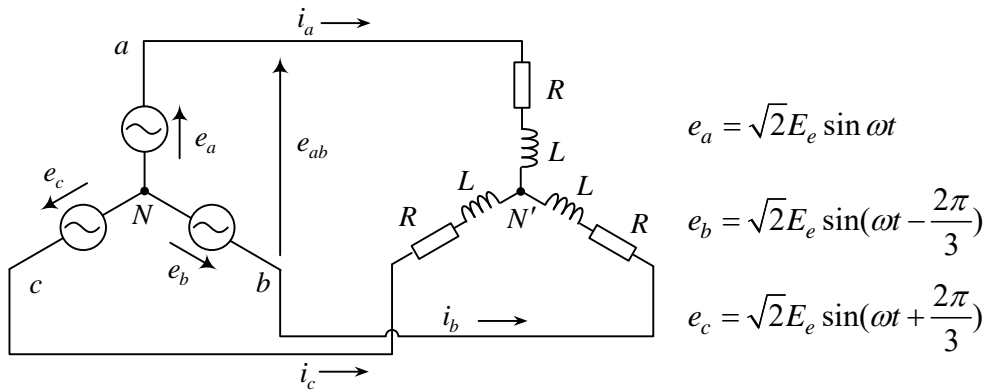
$$\begin{aligned} p &= e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c \\ &= 2E_e I_e \left\{ \sin\omega t \sin(\omega t - \theta) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} \\ &= E_e I_e \left\{ \cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) + \cos\theta - \cos\left(2\omega t - \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\theta - \cos\left(2\omega t - \theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right\} \\ &= 3E_e I_e \cos\theta \quad (9-13) \end{aligned}$$

瞬時電力は脈動せず、一定値である。 $p = P$ (平均値) が成立する。

(注) 電力の計算法は、いろいろある。抵抗分と電流が既知なら $P = 3R|I_a|^2$ が速い。三相電源が供給する電力は当然三相負荷で消費される電力と等しい。

例題1 図のような対称三相交流回路で相電圧の瞬時値が以下様に与えられている。

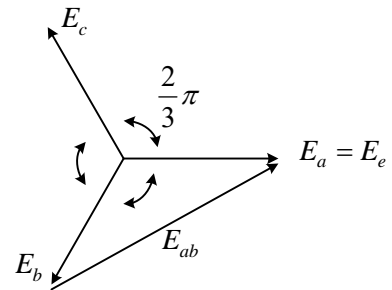
- (1) 線間電圧のフェーザ E_{ab} と瞬時値 e_{ab} を求めよ。
 (2) 線電流のフェーザ I_a, I_b, I_c と瞬時値 i_a, i_b, i_c を求めよ。



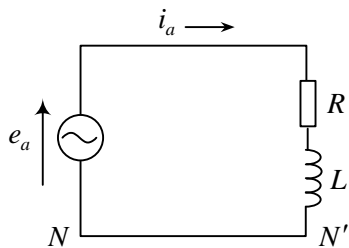
(解) (1) 相電圧 E_a, E_b, E_c と線間電圧 E_{ab} のフェーザ図を書くと図のようになる。図より、

$$E_{ab} = \sqrt{3} E_e e^{j\frac{\pi}{6}}$$

よって、瞬時値は $e_{ab} = \sqrt{6} E_e \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$



(2) 回路が対称なので、 N, N' を結んでも電流は流れず、そのように考える。このとき、各相は独立となる。フェーザで考えると、



$$I_a = \frac{E_a}{R + j\omega L} = \frac{E_e}{R + j\omega L} = I_e e^{-j\theta}$$

ただし、 $I_e = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$

従って、 $i_a = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \theta)$

b, c 相については、それぞれ a 相より $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 遅れるから*

$$I_b = I_e e^{-j(\frac{2}{3}\pi + \theta)}, \quad I_c = I_e e^{-j(\frac{4}{3}\pi + \theta)}$$

$$i_b = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \theta), \quad i_c = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \theta)$$

*c 相については、 $\frac{2}{3}\pi$ 進むとし、 $I_c = I_e e^{j(\frac{2}{3}\pi - \theta)}$, $i_c = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi - \theta)$ でも同じ。

○ 対称 $\Delta-\Delta$ 回路 対称 Δ 形電源に対称 Δ 形負荷を接続した回路

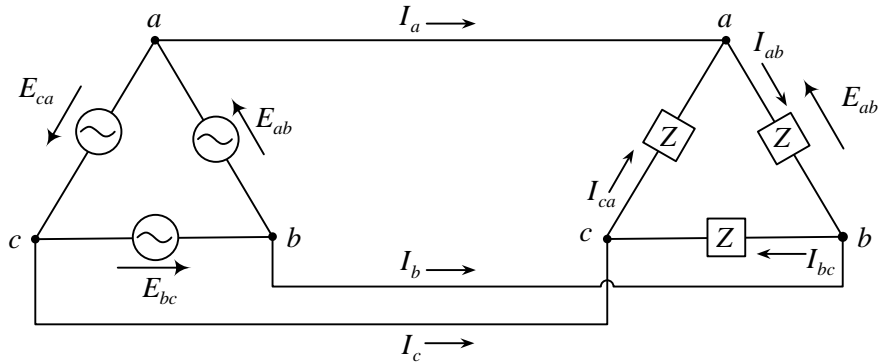
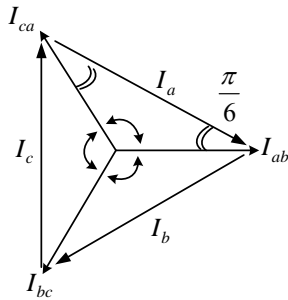


図 9-8 対称 $\Delta-\Delta$ 回路

負荷について、図の回路より（同電位の線を色で塗ってみよう）、

$$I_{ab} = \frac{E_{ab}}{Z}, \quad I_{bc} = \frac{E_{bc}}{Z} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} I_{ab}, \quad I_{ca} = \frac{E_{ca}}{Z} = e^{j\frac{2}{3}\pi} I_{ab} \quad (9-14)$$



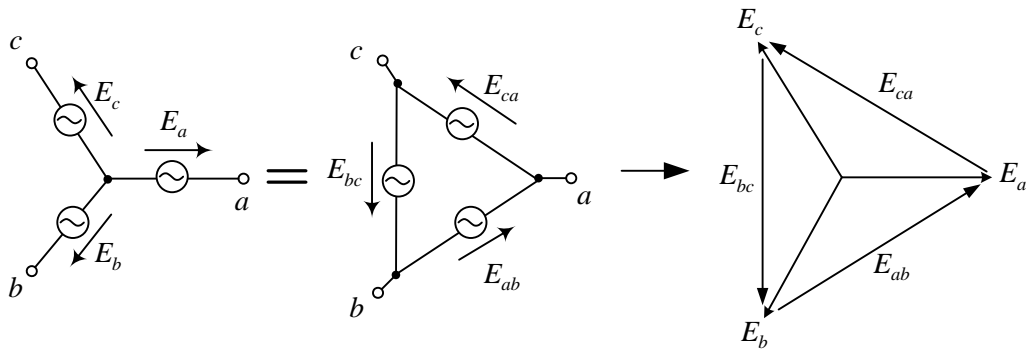
左図より, $I_a = I_{ab} - I_{ca} = \sqrt{3} I_{ab} e^{-j\frac{\pi}{6}}$ (9-15)

また, $|I_a| = \sqrt{3} |I_{ab}|$ (9-16)

線電流 = $\sqrt{3}$ × Δ 電流



対称 Y 形電源は等価な対称 Δ 形電源に書き換えることができる。

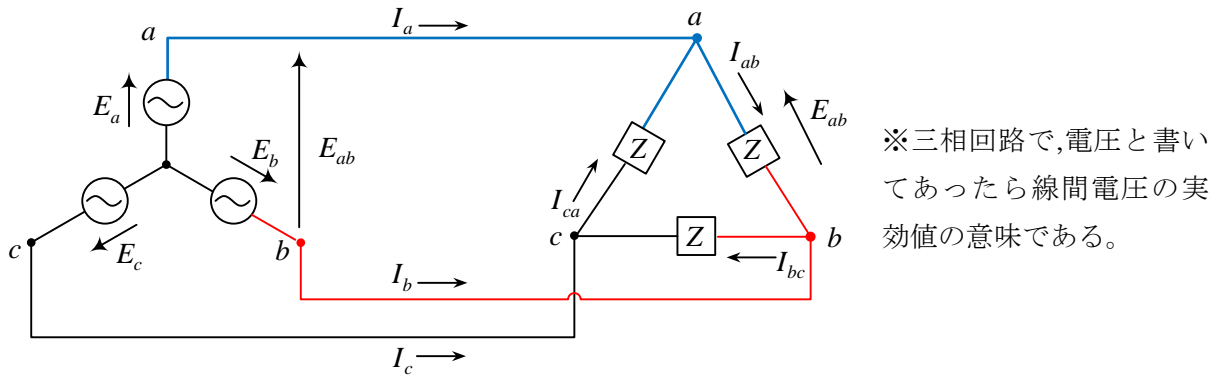


すなわち, $E_{ab} = E_a - E_b = \sqrt{3} E_a e^{j\frac{\pi}{6}}$, $E_{bc} = E_b - E_c = \sqrt{3} E_b e^{-j\frac{2}{3}\pi}$, $E_{ca} = E_c - E_a = \sqrt{3} E_c e^{j\frac{2}{3}\pi}$

のとき a,b,c の端子に関して等価となる。もちろん, E_a と E_{ab} を流れる電流は異なる。

対称 Δ 形電源では, E_{ab}, E_{bc}, E_{ca} の中の 1 つの電源が無くても負荷にかかる電圧は変わらず流れる電流 I_a, I_b, I_c に変化は無い。V 結線と呼ばれ, 電源が 1 つ故障した場合でも電力を送ることができる。対称 Y- Δ 回路では, Y- Δ 変換を用いて対称 Δ 形負荷を対称 Y 形負荷に変換すると計算が簡単になる。対称 $\Delta-\Delta$ 回路ではすぐに電流を計算できるから Y- Δ 変換の必要性はない。なお, 負荷に Δ 形と Y 形が混在している場合にはどちらかの形の負荷に統一すると計算しやすい。Y- Δ 変換については第 13 章例題 3 を参照のこと。

例題2 電源がY結線で、負荷がΔ結線なるY-Δ対称回路がある。線電流 I_a, I_b, I_c 及び負荷側相電流 I_{ab}, I_{bc}, I_{ca} を求めよ。ただし、電圧200Vで、 $Z = 36 + j27 \Omega$ とする。



(解) E_{ab} を基準フェーザと考えると、次式のようにおける。

$$E_{ab} = 200 \quad , \quad E_{bc} = 200e^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad , \quad E_{ca} = 200e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

負荷側の相電流は、

$$I_{ab} = \frac{E_{ab}}{Z} = \frac{200}{36 + j27} = \frac{40}{9}e^{-j\theta} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

I_{bc}, I_{ca} は位相がそれぞれ $\frac{2}{3}\pi$ 遅れ、 $\frac{2}{3}\pi$ 進みであるから、

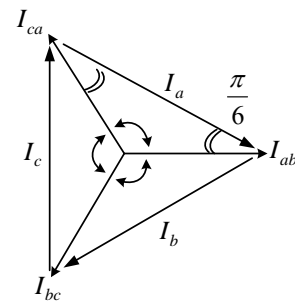
$$I_{bc} = I_{ab}e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40}{9}e^{-j(\theta + \frac{2}{3}\pi)} \quad , \quad I_{ca} = I_{ab}e^{j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40}{9}e^{-j(\theta - \frac{2}{3}\pi)}$$

線電流 I_a は、フェーザ図より I_{ab} の $\sqrt{3}$ 倍で、位相は $\frac{\pi}{6}$ 遅れる。よって、

$$I_a = \sqrt{3}I_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta + \frac{\pi}{6})}$$

$$I_b = I_a e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta + \frac{5\pi}{6})}$$

$$I_c = I_a e^{j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta - \frac{\pi}{2})}$$



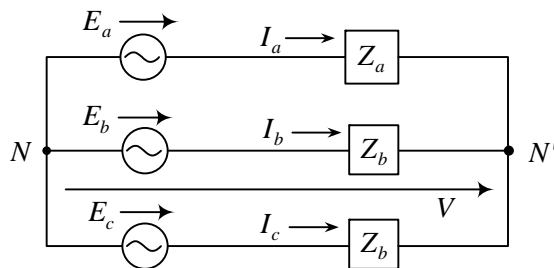
(検討) フェーザ図が書けると大きさと位相の関係がすぐわかるので、楽に答えを出すことができる。問題が“線電流と負荷電流を求めよ。”の場合には答えは以下のように簡単になる。

$$|I_{ab}| = \left| \frac{E_{ab}}{Z} \right| = \frac{|E_{ab}|}{|Z|} = \frac{200}{|36 + j27|} = \frac{40}{9} \text{ A}$$

線電流 I_a の大きさは、 I_{ab} の $\sqrt{3}$ 倍だから、 $|I_a| = \sqrt{3}|I_{ab}| = \frac{40}{9}\sqrt{3} \text{ A}$

メータの読み=実効値=フェーザの絶対値 を忘れるな！

○ 非対称三相回路



N, N' : 中性点

図 9-9 非対称三相回路

非対称回路では、 E_a, E_b, E_c 及び Z_a, Z_b, Z_c が任意の値をもつ。この場合には、3つの回路には分離できず、

$$I_a = \frac{E_a}{Z_a} \quad \longleftarrow \quad \text{成立せず!!}$$

として計算することはできない。従って、キルヒホッフの法則より求めるしかない。閉路方程式を立てて解くこともできるが、一番うまい方法は中性点間の電圧 V を用いる方法で、これを紹介しよう。

$$\text{図より, } I_a = \frac{E_a - V}{Z_a}, \quad I_b = \frac{E_b - V}{Z_b}, \quad I_c = \frac{E_c - V}{Z_c} \quad (9-17)$$

N 点において、 $I_a + I_b + I_c = 0$ だから

$$\frac{E_a - V}{Z_a} + \frac{E_b - V}{Z_b} + \frac{E_c - V}{Z_c} = 0 \quad (9-18)$$

$$Y_a(E_a - V) + Y_b(E_b - V) + Y_c(E_c - V) = 0 \quad (9-19)$$

$$\text{但し, } Y_a = \frac{1}{Z_a}, \quad Y_b = \frac{1}{Z_b}, \quad Y_c = \frac{1}{Z_c} \quad : \text{アドミタンス} \quad (9-20)$$

$$\therefore V = \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \quad (9-21)$$

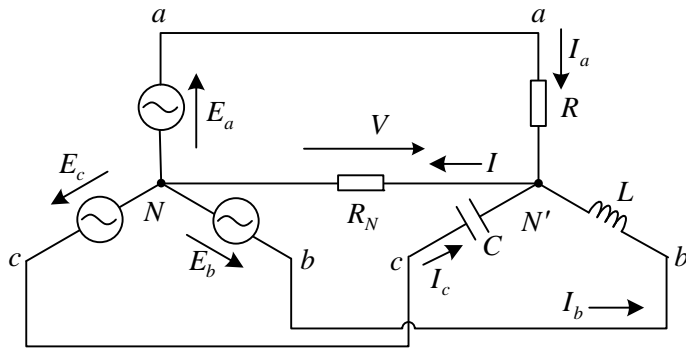
従って、

$$\begin{aligned} I_a &= Y_a(E_a - V) \\ &= Y_a \cdot \frac{Y_b(E_a - E_b) + Y_c(E_a - E_c)}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned} \quad (9-22)$$

I_b, I_c も同様に求まる。

(注意) 非対称といっても、電源電圧の周波数は三相とも同じである。これが違うと、各フェーズ同士の演算が意味をなさない。非対称電源は、各相電圧の実効値と初期位相が違う。対称電源、対称負荷では $Y_a = Y_b = Y_c$, $E_a + E_b + E_c = 0$ だから $V = 0$ となる (N, N' が結べる)。

例題3 非対称電源に非対称負荷が図のように接続されている。また、中性点 N, N' は抵抗 R_N の中性線をつないでいる。線電流 I_a, I_b, I_c 及び、中性線を通る電流 I を求めよ。



$$\begin{aligned} e_a &= E_1 \sin(\omega t - \theta_1) \\ e_b &= E_2 \sin(\omega t - \theta_2) \\ e_c &= E_3 \sin(\omega t - \theta_3) \end{aligned}$$

とする。

(解) e_a, e_b, e_c のフェーズを E_a, E_b, E_c とすると、

$$E_a = \frac{E_1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1}, \quad E_b = \frac{E_2}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2}, \quad E_c = \frac{E_3}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_3} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

各相及び中性線のアドミタンスをそれぞれ Y_a, Y_b, Y_c, Y_N とおくと、

$$Y_a = \frac{1}{R}, \quad Y_b = \frac{1}{j\omega L}, \quad Y_c = j\omega C, \quad Y_N = \frac{1}{R_N} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

N から見た N' 点の電圧を V とおくと、

$$\begin{aligned} I_a &= Y_a(E_a - V), \quad I_b = Y_b(E_b - V), \quad I_c = Y_c(E_c - V) \\ I &= Y_N V \end{aligned} \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

N 点では、キルヒホッフの法則より、

$$I_a + I_b + I_c = I \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

③を④に代入して、

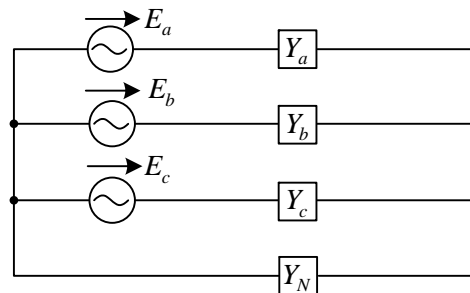
$$\begin{aligned} Y_a(E_a - V) + Y_b(E_b - V) + Y_c(E_c - V) &= Y_N V \\ \therefore V &= \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N} \end{aligned}$$

V が求まると、③式より I_a, I_b, I_c, I が求まる。

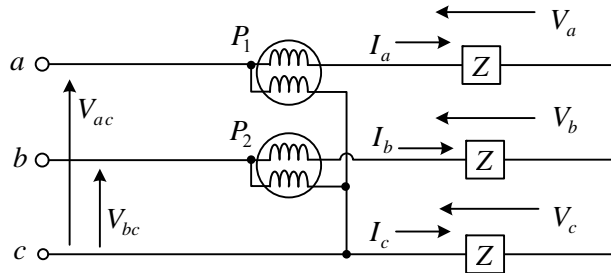
$$I_a = \frac{Y_a Y_b (E_a - E_b) + Y_a Y_c (E_a - E_c) + Y_a Y_N E_a}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N}$$

図の回路は、次のように書ける。

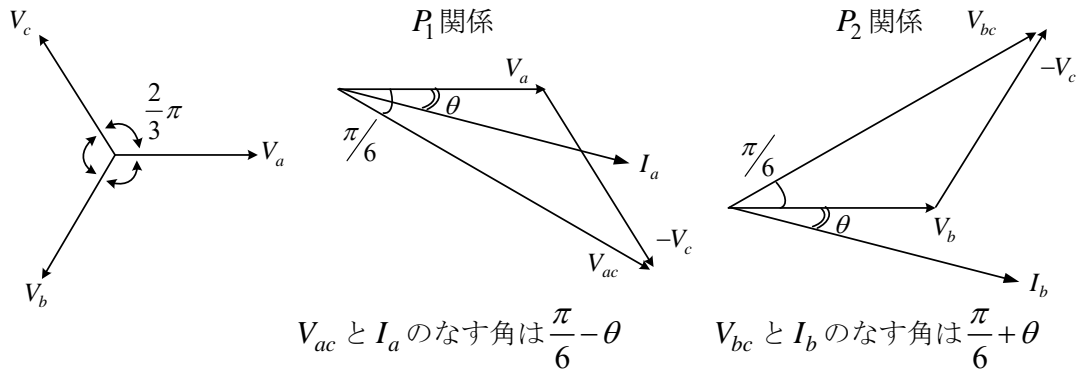
計算に使うなら、この方が見やすい。



例題 4 対称三相電源に対称な負荷が接続されており、電力計 P_1, P_2 を図のように接続して電力を測定した。 $|V_a|, |I_a|, \theta (= \arg Z)$ を用いて P_1 を、 $|V_b|, |I_b|, \theta (= \arg Z)$ を用いて P_2 を表せ。また負荷全体で消費される全電力を P_1, P_2 で示せ。



(解) フェーザ図を考える。 Z は誘導性負荷とし、 I_a が V_a より遅れるとして書いた。



電力計は、電流×電圧× $\cos \varphi$ (φ は電流と電圧の位相差) を表示するので、

$$P_1 = |V_{ac}| |I_a| \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \sqrt{3} |V_a| |I_a| \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P_2 = |V_{bc}| |I_b| \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \sqrt{3} |V_b| |I_b| \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$|V_a| = |V_b|$, $|I_a| = |I_b|$ であるから、①, ②より、

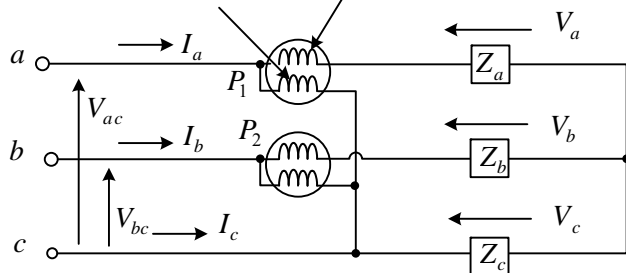
$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \sqrt{3} |V_a| |I_a| \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \right\} \\ &= \sqrt{3} |V_a| |I_a| \cdot 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta = 3 |V_a| |I_a| \cos \theta = P \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

よって、三相負荷で消費される電力は $P_1 + P_2$ で求まる。

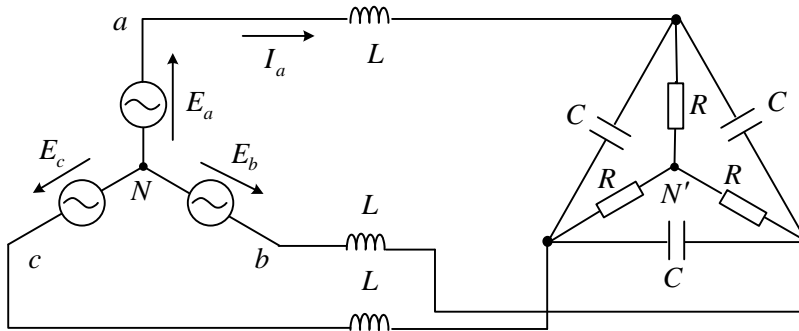
$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\bar{V}_a I_a + \bar{V}_b I_b + \bar{V}_c I_c) \\ &= \text{Re}(\bar{V}_a I_a + \bar{V}_b I_b - \bar{V}_c (I_a + I_b)) \\ &= \text{Re}((\bar{V}_a - \bar{V}_c) I_a + (\bar{V}_b - \bar{V}_c) I_b) \\ &= \text{Re}(\bar{V}_{ac} I_a + \bar{V}_{bc} I_b) \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$$

この様に③の結果は当然で、対称三相負荷でなくても成り立つ。

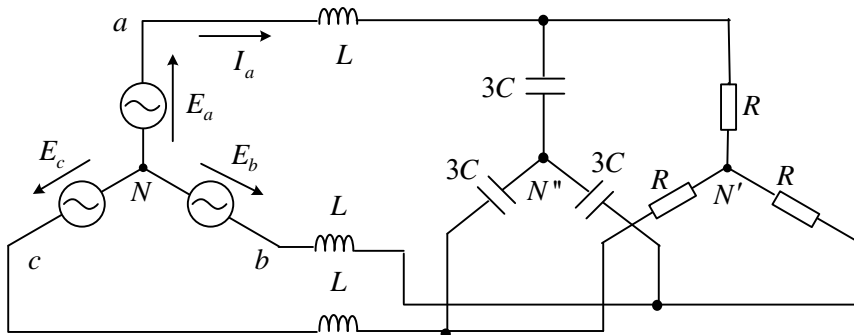
端子間の電圧を測る。電流を測る。抵抗0
抵抗無限大で電流は0 と考える。



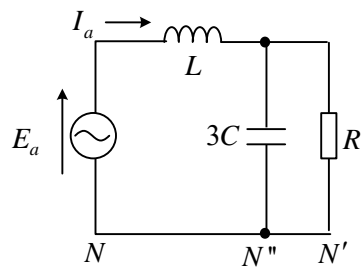
例題 5 対称三相電源に図の回路が接続されている。a 相に流れる電流 I_a を求めよ。



(解) コンデンサ C で構成される Δ 回路を Y 結線に変換すると図の回路が得られる。



いま中性点 N, N', N'' を導線で接続する。このとき a, b, c 相の電源に対して、 $L, 3C, R$ のつながり方は各相とも同じ条件である。つまりどこかの相の電流が流れ易くなるといったことは考えられない。 a, b, c 相の電源電圧は大きさが等しく位相が $2\pi/3$ ずつずれているだけなので、 $L, 3C, R$ に流れる電流も各相につながる順に位相が $2\pi/3$ ずれると考えられる。 $2\pi/3$ 位相のずれた電流の和は常に 0 である。よって N, N', N'' を結んだ導線には電流が流れず、この導線は省いても電流の変化は無い。以上のことから図の N, N', N'' は同電位で、これを導線で結んで考えても良いことが判った。導線で結ぶと回路は相ごとに分離でき以下の回路で電流が求められる。



図より、

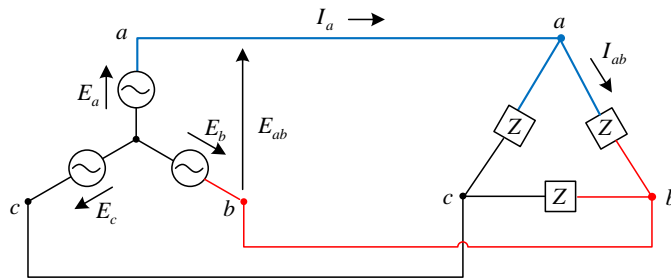
$$I_a = \frac{E_a}{j\omega L + \frac{R/(j3\omega C)}{R+1/(j3\omega C)}} = \frac{E_a}{j\omega L + \frac{R}{j3\omega CR+1}} = \frac{(j3\omega CR+1)E_a}{R-3\omega^2 LCR+j\omega L}$$

(注)非対称電源の場合も N', N'' だけは導線で結ぶことが可能である。問題の回路で R を Δ 回路に変換して C とインピーダンス合成し、その後 Y 回路に変換すればよい (これは電源に無関係)。

問題 1. 各相のインピーダンスが、 $6 + j8 \Omega$ である星形負荷(Y)を $200V$ の対称三相電源に接続する。線電流の実効値及び全消費電力を求めよ。(注) $200V$ は線間電圧の実効値を意味する。

(答) 線電流の実効値 $= \frac{200/\sqrt{3}}{|6 + j8|} = \frac{20}{\sqrt{3}} A$, 電力 $= 3 \times \frac{200}{\sqrt{3}} \times |I| \cos \theta = 2400 W$

問題 2. 電源電圧のフェーザが、 $E_a = 100 V, E_b = 100 e^{-j\frac{2}{3}\pi} V, E_c = 100 e^{j\frac{2}{3}\pi} V$, 負荷のインピーダンスが、 $Z = 1 + j \Omega$ である図の三相回路について、電圧 E_{ab} , 電流 I_{ab} , I_a を求めよ。答えは、指数関数形式 ($re^{j\theta}$) の形に整理せよ。



(答) $E_{ab} = 100\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} V$, $I_{ab} = 100\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-j\frac{\pi}{12}} A$, $I_a = \sqrt{3}I_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{300}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} A$

(注) I_a だけを求めるなら、負荷の Y- Δ 変換を利用すると簡単である。

問題 3. $200V$ の対称三相電源に、図に示す負荷が接続されている。線電流 $|I_a|$ を求めよ。

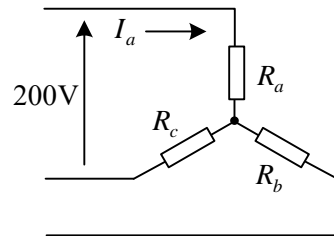
(答) $I_a = \frac{Y_a Y_b (E_a - E_b) + Y_a Y_c (E_a - E_c)}{Y_a + Y_b + Y_c}$ (9-22)

$Y_a = 1, Y_b = 2, Y_c = 4$

$E_a - E_b = 200$ (基準フェーザに選ぶ)

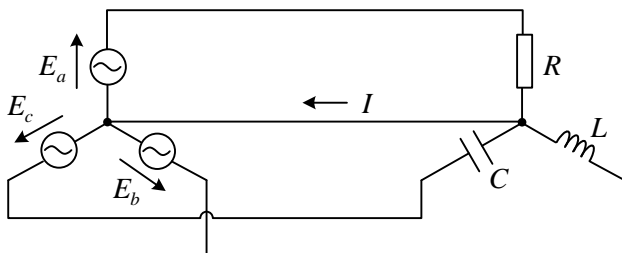
$E_a - E_c = 200e^{-j\frac{\pi}{3}}$ より

$|I_a| = \frac{400\sqrt{7}}{7} A$



$R_a = 1 \Omega \quad R_b = 0.5 \Omega \quad R_c = 0.25 \Omega$

問題 4. 図のように対称三相交流電圧 E_a, E_b, E_c を加えたとき、中性線電流 I が 0 となる条件を求めよ。(ヒント：各相の電流を求め、その和 I の実部と虚部を 0 とおく)



$I = \frac{E_e}{R} + \frac{E_e}{j\omega L} e^{-j\frac{2}{3}\pi} + j\omega C E_e e^{j\frac{2}{3}\pi}$

(答)

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, $R = \sqrt{\frac{L}{3C}}$