

# 電気回路 講義ノ一ト

令和2年  
辻 峰男

# 電気回路講義ノート 目次

	ページ
第 1 章 電圧, 電流, 抵抗とオームの法則	1
第 2 章 キルヒホッフの法則	9
第 3 章 コンデンサ	19
第 4 章 コイル	25
第 5 章 交流回路	31
第 6 章 フェーザによる交流回路の計算 I	38
第 7 章 フェーザによる交流回路の計算 II	47
第 8 章 フェーザによる交流回路の計算 III	61
第 9 章 三相交流	75
第 10 章 変成器 (変圧器)	89
第 11 章 回路網方程式	104
第 12 章 回路の諸定理	111
第 13 章 二端子対網	123
第 14 章 フーリエ級数によるひずみ波の解析	137
第 15 章 過渡現象解析 I	150
第 16 章 過渡現象解析 II	168
第 17 章 分布定数回路	180
付録 ○ あとがき	191
○ 電磁気学と電気回路の関連	194
○ コンデンサの話	196
○ コイルの話	198
○ 数学公式	202
索引	204

## 留 意 事 項

### ○ 10<sup>n</sup> を表す記号

記号	T	G	M	k	m	$\mu$	n	p
	10 <sup>12</sup>	10 <sup>9</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-12</sup>
名称	テラ	ギガ	メガ	キロ	ミリ	マイクロ	ナノ	ピコ

### ○ 国際単位系 (SI 単位系) : この単位系に直して計算すること

単位は記号 (物理量) のときは[ ]を付け, 数値のときはつけない。数値と単位で

1 つの物理量だから。 例  $R [\Omega], 20 \Omega, R = 20 \Omega, R = 2r - 3 [\Omega]$

日本工業規格 規格番号 JISZ8203 参照

距離	メートル	m	電圧, 電位	ボルト	V
質量	キログラム	kg	磁束	ウェーバー	Wb
時間	セカンド (秒)	s	磁束密度	テスラ	T
電流	アンペア	A	抵抗	オーム	$\Omega$
周波数	ヘルツ	Hz	コンダクタンス	ジーメンズ	S
力	ニュートン	N	静電容量	ファラド	F
エネルギー	ジュール	J	インダクタンス	ヘンリー	H
電力	ワット	W	電気量	クーロン	C

### ○ ギリシャ文字

大文字	小文字	読み方	<i>H</i>	<i>η</i>	イータ	<i>Π</i>	<i>π</i>	パイ
<i>A</i>	<i>α</i>	アルファ	<i>Θ</i>	<i>θ</i>	シータ	<i>P</i>	<i>ρ</i>	ロー
<i>B</i>	<i>β</i>	ベータ	<i>K</i>	<i>κ</i>	カッパ	<i>Σ</i>	<i>σ</i>	シグマ
<i>Γ</i>	<i>γ</i>	ガンマ	<i>Λ</i>	<i>λ</i>	ラムダ	<i>T</i>	<i>τ</i>	タウ
<i>Δ</i>	<i>δ</i>	デルタ	<i>M</i>	<i>μ</i>	ミュー	<i>Φ</i>	<i>φ, ϕ</i>	ファイ
<i>E</i>	<i>ε</i>	イプシロン	<i>N</i>	<i>ν</i>	ニュー	<i>Ψ</i>	<i>ψ</i>	プサイ
<i>Z</i>	<i>ζ</i>	ゼータ	<i>Ξ</i>	<i>ξ</i>	グサイ	<i>Ω</i>	<i>ω</i>	オメガ

使用頻度の高い文字のみ, 斜体表示

### ○ 立体, 斜体, 大文字, 小文字の区別

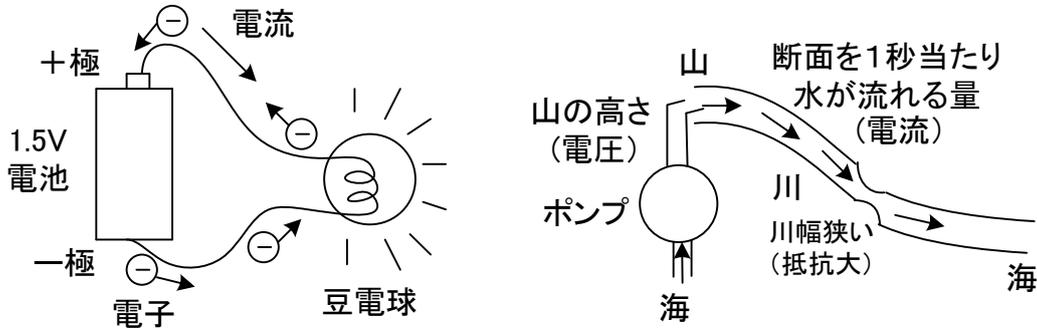
- ・ 単位や 10<sup>n</sup> を表す文字には立体(V), 電圧や抵抗など量を表す文字には斜体(V)を使う。
- ・ 交流回路では, 瞬時値に小文字 (例  $v, i$ ), フェーズに大文字 ( $V, I$ ) を使う。

### ○ 電圧と電流の矢印

- ・ 回路図に書き込む矢印は特に明記しない限り全て測定の向き (基準の向き, 正の向き, 正方向ともいう) を表す。自分の好きな向きに選んでよい。
- ・ 矢印を書かないと式が決まらない。特に電圧では両端に矢を書かない。
- ・ 矢印のことは, 第 1 章で詳しく説明する。

# 第1章 電圧, 電流, 抵抗とオームの法則

## ○ 電圧, 電流, 抵抗とは何か?



(a) 電池に豆電球をつなぐ!

(b) 水流回路で考える!

図 1-1 電気回路のイメージ

電池に豆電球をつないで点燈させた経験は誰でもあろう。電池の 1.5V は**電圧(voltage)**を表し、V は単位でボルト(volt)と読む。豆電球が光るのは、小さな**電子(electron)**が一極から+極に動いていて、電子の通りにくい豆電球内で衝突が起こるためと考えるとよい。電子の通り道を**回路(circuit)**という。電子は負の**電荷**(単位 C クーロン)を持っているから、電子が一極から+極に動くということは、同じ大きさの正電荷が+極から一極に動くと考えてよい。回路のある点で、1秒間に移動した電荷の量を表すのが電流(current)である。電流の単位には A (ampere アンペア)を用いる。電子は電球の中を通っても消えたり増えたりしない。回路を構成する電線、豆電球には電子がぎっしりつまっていると考えよう(満員電車の様に)。電子自体の動く平均の速さは遅いが(秒速 0.1mm 程度)、一極から電子が 1 個出ると満員電車だからほぼ瞬間的に押されて+極の電池の中へ電子が 1 個入ることになる。従って、電気は瞬時(光速)に伝わる。正電荷の動く向きが電流の向きと決められている。抵抗回路では、電流は電池の+極から一極に向かって回路を流れ、電池の中では一極から+極に流れる(陽イオンが一極から+極に移動しそこで電子と結びつく)。

電気回路を水流回路で考えるとイメージが得やすいだろう。海から山の上にポンプで水をくみ上げ、それが川を流って海に戻るとしよう。水が漏れることはなく、川のどこで測っても 1 秒間の流量(電流に相当)は同じとする。山の高さが電池の電圧に相当し、これが水を流す(電流を流す)もとになっている。電線の部分で電圧(山の高さ)が変わることはなく、電球の部分で電圧が変化する。

図 1-1 を簡単な記号として、図 1-2 のように表す。豆電球は熱を発生するから**抵抗(器)**と呼ばれる素子に対応する。

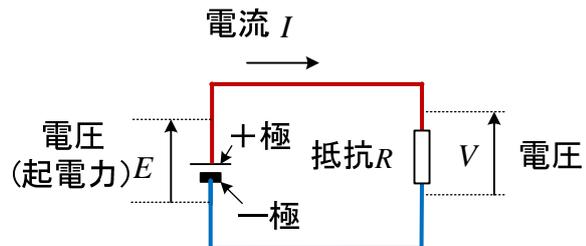


図 1-2 電気回路の表し方

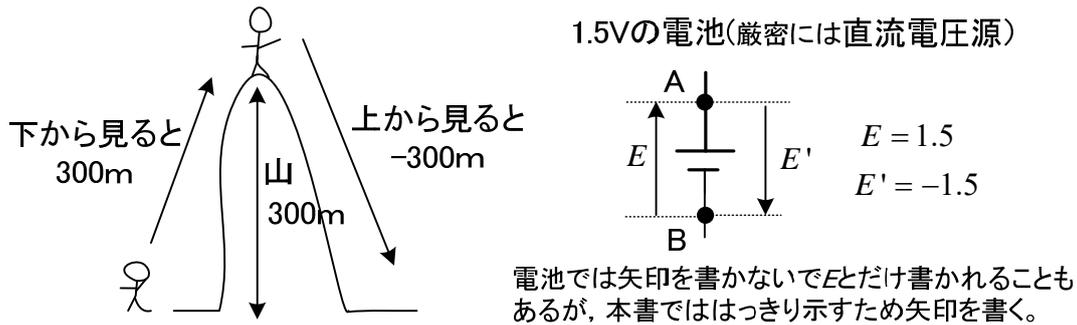


図 1-3 電圧の矢印

まず、電圧や電流に付けられている矢印の意味を説明する。図 1-3 で 300m の山を表すのに、回路ではどこを基準にするか（どこから見るか）厳密に表現する。山の高い所（電位の高い所、電池では+極）を低い所（電位の低い所、電池では-極）から見ると正の値、逆に見ると負の値とする。すなわち、電圧の矢印は、矢の先端の電位から矢の根の電位を引いた量と定義し、

$$E = A \text{ 点の電位} - B \text{ 点の電位} \quad (1-1)$$

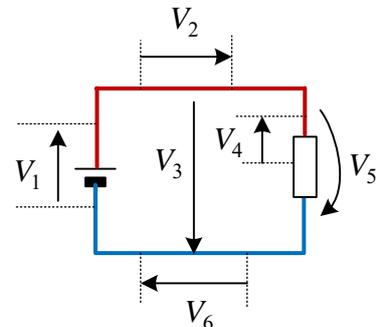
となる。**電位**は、基準点（大地または無限遠点）に対する電圧と言える。山で言うなら、海（基準点）からの高さが電位に相当し、ある地点とある地点の高さの差が**電圧(=電位差)**に相当する。**電線(厳密には導線)上では電位は変わらない**ので、図 1-2 で、 $E = V$  が成り立つ。山の高さに  $mg$  を掛けると位置エネルギーになり、電池の電圧に動いた電荷を掛けるとエネルギーになる。

**起電力は電圧**とは別のものであるが、電池の**内部抵抗**を無視すると同じ値になる(付録参照)。

問題 1 図の電源は 1.5V である。図中の電圧はいくらか。

(解)  $V_1 = 1.5V$ ,  $V_2 = 0V$ ,  $V_3 = -1.5V$ ,  $V_4$  は不明 (この様に中途半端な書き方はしない),  $V_5 = -1.5V$ ,  $V_6 = 0V$

\* 矢印は直線ではなく曲線でも OK です。曲線の方がどの点からどの点を見るか判りやすくはある。



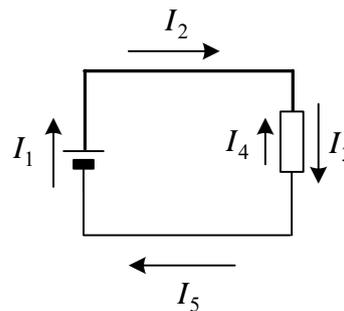
次に、矢印で定義された電流  $I$  の意味を説明しよう。**電流  $I$  の矢印**は、実際にその向きに電流が流れている（正電荷がその向きに動いている）ことを意味するのではなく、 $I$  をその矢印の向きに動いている正電荷の量として測定することを示す。従って、正電荷が矢印の向きに移動していれば  $I$  の値は正、矢印と逆向きに移動していれば負となる（実際に動く電子の移動は逆）。

電圧や電流の矢印は記号  $V, I$  の測定の向き(基準の向き, 正の向きともいう)をどう定義するかの問題で、自分の好きな向きに選んでよい。普通は、定義した記号  $V, I$  が正になるように矢印を選ぶことが多いが、回路によっては正負の判断がつきにくい場合もある。矢印が逆に定義された 2 つの量では、大きさは等しく、符号のみ異なる。“電流の向き”と“電流  $I$  の正の向き”は意味が違う。前者は正電荷が動く向きで、後者は  $I$  に付けられた矢印の向きである。

問題 2 図の回路で、 $I_1 = 1\text{A}$  のとき、各電流を求めよ。

(解)  $I_2 = 1\text{A}$ ,  $I_3 = 1\text{A}$ ,  $I_4 = -1\text{A}$ ,  $I_5 = 1\text{A}$

さて、いよいよ**オームの法則**(Ohm's law) を説明しよう。図 1-2 で、電流は電源の電圧が高いほど大きく、電圧と電流は比例関係にある。すなわち、



$$V = RI \quad (1-2)$$

ここで、 $V$  : 電圧[V],  $I$  : 電流[A],  $R$  : 抵抗[ $\Omega$ ] ( $R > 0$ )

の関係がある。 $R$  は**抵抗**(resistance)と呼ばれ、常に正で、単位は $\Omega$  (ohm オーム)である。抵抗は、物質の材料や形状により決まり、電流の流れを邪魔するものと考えることができる。抵抗の逆数 $G$  は**コンダクタンス**と呼ばれ単位はS (siemens ジーメンズ)である。すなわち、

$$I = GV, \quad G = \frac{I}{V} = \frac{1}{R} \quad (1-3)$$

オームの法則は、電圧や電流の記号 $V, I$ の測定の向きをどう定義するか(矢印をどうとるか)で符号が違ってくる。図 1-4 で a 点の電位が b 点より高い場合を考える。抵抗では、電位の高い方から電位の低い方に向かって電流が流れるので、(a) (b)とも  $I > 0$  である。(a)図の場合には、電位の低い b 点から見ているので $V$  は正だが、(b)図では電位の高い a 点から見ているので $V$  は負になる。よって、(b)の場合、マイナスが付かないと式が合わなくなる。b 点の電位が高い場合もそれぞれの式が成り立つことを確かめよ。

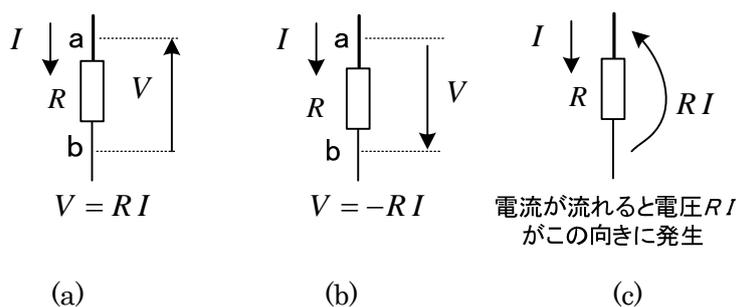


図 1-4 矢印 (=測る向き) の取り方でマイナスが付くオームの法則

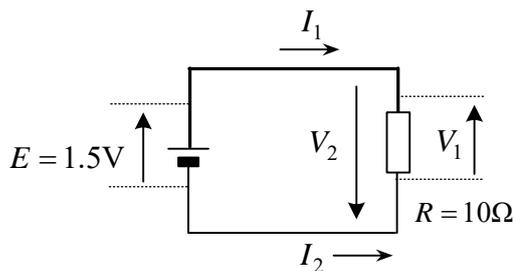
だけど、 $V$ ,  $I$ の矢印は自由に決めて定義して良いから、いつも(a)図のように反対向きに定義すれば、マイナスをつけないで済む。図の(c)をすぐ書けるようになる。矢印は曲線でも構わない。同じ向きするときマイナスなのでちょっと覚えにくいですが、コンデンサやコイルでも同じようになるので必ず覚えておこう。抵抗は、現在の JIS-C-0617 規格で長方形で書く。

(ちょっと一言) (a)の場合 $V > 0$ なら  $I > 0$ で、 $V < 0$ なら  $I < 0$ である。正負に関係なく、どんな場合でも矢印が決まれば式は 1 つ決る (これから述べる回路の式は全てそうです)。

問題3 1.5Vの電池に10Ωの抵抗がつながれている。  
記号で定義された電圧や電流を求めよ。

(解)  $V_1 = 1.5V, V_2 = -1.5V$

$$I_1 = \frac{1.5}{10} = 0.15A, I_2 = -0.15A$$



### ○ 直列回路と並列回路

まず、抵抗が**直列**(series)に接続された図 1-5 の回路を考える。

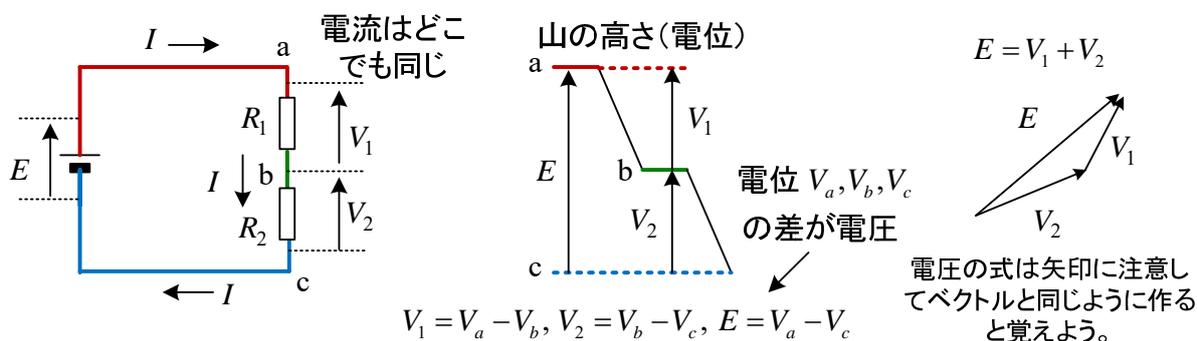


図 1-5 直列回路

電流は導線や抵抗の断面を電荷が 1 秒間にどれだけ移動するかを表し、電子はどこでもぎっしり詰まっていると考えて (満員電車)、図 1-5 の場合すべての断面で等しい。一方、**電位は導線の所では変化せず、抵抗や電源の部分で変化する**。従って、

$$E = V_1 + V_2 \tag{1-4}$$

が成り立つ。各抵抗に流れる電流は  $I$  だから、オームの法則より、記号の矢印に注意して

$$V_1 = R_1 I \tag{1-5}$$

$$V_2 = R_2 I \tag{1-6}$$

である。(1-4), (1-5), (1-6)より、電圧、電流が以下のように計算できる。

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} \tag{1-7}$$

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E \quad (\text{分圧の公式}) \tag{1-8}$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad (\text{分圧の公式}) \tag{1-9}$$

(1-7)は、直列抵抗を一つにまとめた合成抵抗  $R$  が次式で求められることを意味する。

$$R = R_1 + R_2 \quad (\text{直列回路の合成抵抗の公式}) \tag{1-10}$$

また、(1-8), (1-9)より、各抵抗の電圧は抵抗の比になることが判る。これを**分圧**という。

次に、抵抗を**並列**(parallel)に接続した図 1-6 の回路を考える。

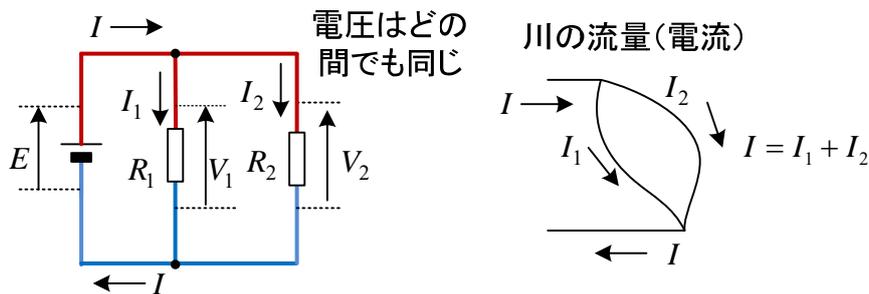


図 1-6 並列回路

電位は、導線の部分では変化しないので、この場合どの素子の両端で測っても同じだけの電位差がある。すなわち、

$$E = V_1 = V_2 \quad (1-11)$$

電流は一度 2 つに分かれるが、また 1 つに合流し、消滅したり発生したりする電子はないから、

$$I = I_1 + I_2 \quad (1-12)$$

が成り立つ。各抵抗にオームの法則を適用し、記号の矢印に注意して

$$V_1 = R_1 I_1 \quad (1-13)$$

$$V_2 = R_2 I_2 \quad (1-14)$$

である。(1-11)~(1-14)より、電圧、電流には以下の関係が成立する。

$$I = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) E \quad (1-15)$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (\text{分流の公式}) \quad (1-16)$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (\text{分流の公式}) \quad (1-17)$$

(1-15)は、並列抵抗を一つにまとめた**合成抵抗 R** が次式で求められることを意味する。

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{並列回路の合成抵抗の公式}) \quad (1-18)$$

また、(1-16)、(1-17)より、各抵抗の電流は、抵抗の逆数の比になることが判る。これを**分流**という。合成抵抗の計算、分圧、分流は大変重要な公式である。図 1-7 に 3 つの抵抗を直列に接続した場合と並列に接続した場合の合成抵抗の計算式を示しておく。これも覚えよう。

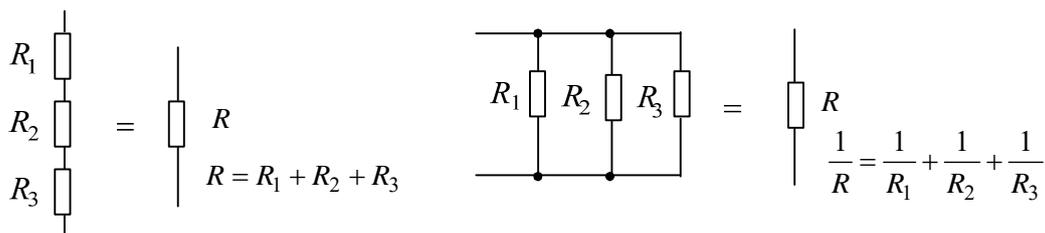
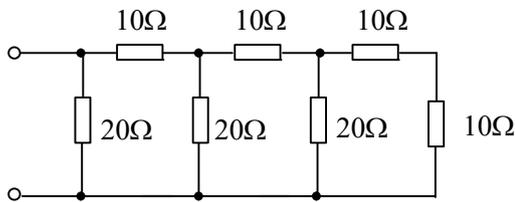


図 1-7 3 つの抵抗の合成抵抗

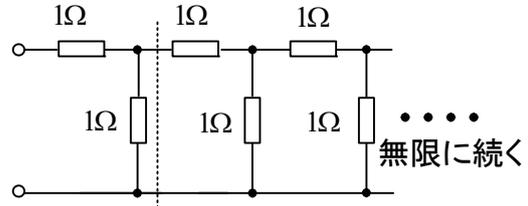
図 1-7 の並列回路では、コンダクタンスを用いると以下のように簡単に書ける。

$$G = G_1 + G_2 + G_3 \quad \text{ただし, } G = \frac{1}{R}, G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}$$

問題 4 図の回路の合成抵抗を求めよ。



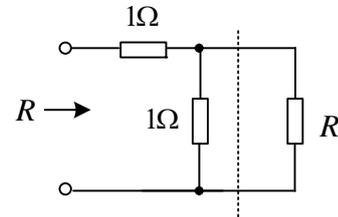
(a)



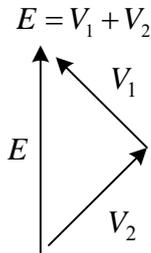
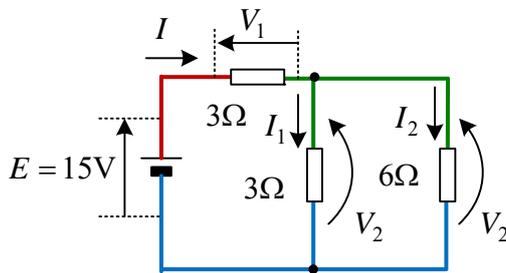
(b)

(解) (a)  $10\Omega$  (b)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Omega$

(ヒント)(b) 無限に同じパターンが続くので最初の一組を除いても抵抗は変わらない。求める抵抗を  $R$  とし、右の回路で合成抵抗を求めて、2 次方程式を解く。  $R$  は常に正である。



問題 5 図の回路で、各抵抗に流れる電流を求めよ。



電圧の式は矢印に注意してベクトルと同じように作ると覚えよう。

(解)  $3\Omega$  と  $6\Omega$  の抵抗の両端にかかる電圧は等しく、 $V_2$  である。成り立つ式は、

$$I = I_1 + I_2, \quad 15 = V_1 + V_2, \quad V_1 = 3I, \quad V_2 = 3I_1 = 6I_2$$

$$\therefore I = 3A, I_1 = 2A, I_2 = 1A$$

(別解) 以下の方法が最速で答えがでる。

$$\text{合成抵抗} = 3 + \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 5\Omega \quad \text{よって, } I = \frac{15}{5} = 3A$$

$$\text{分流の公式より, } I_1 = \frac{6}{3 + 6} I = 2A, I_2 = \frac{3}{3 + 6} I = 1A$$

## ○ 電力とエネルギー

電池に豆電球をつなぐと点燈するが、このとき電池が持っているエネルギーを豆電球が熱エネルギーとして消費する。

一般に**電力**(electric power)  $p$  は、電圧と電流を掛けて求められる\*。単位は、W(watt ワット)である。電圧や電流は矢印を付けて定義するから、矢印の定義でその意味が違ってくる。図 1-8 で

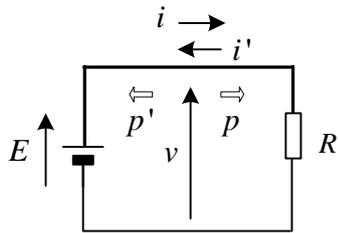


図 1-8 電圧、電流と電力

$$\text{電力 } p = v i, p' = v i' \quad (1-19)$$

$p$  は左から右に送られる電力で、オームの法則を用いると

$$p = v i = E i = R i^2 \quad (1-20)$$

となる。この電力は、抵抗で熱となる。これは**ジュール熱**

(Joule's heat)と呼ばれている。 $p'$  は右から左に送られる電力

である。図 1-8 の回路で、 $p' = -R i^2$  である。 $p' < 0$  であり、

右の抵抗から左の電源に供給される電力が負すなわち実際

には左の電源から右の抵抗へ電力が送られることを意味する。

(1-19)の電力は**瞬時電力**と呼ばれ、一般的な式である。普通電力と呼ばれるのは**平均電力**のことである。直流回路の定常状態(スイッチを入れて、時間が十分経った状態)では、電圧や電流の時間変化がないので、平均電力も同じ式になる。エネルギーは電力を時間積分(集めること)したものであるが、電圧や電流の時間変化がなければ  $p$  は一定であり、単純に時間を掛けるだけで良い。特に、電気のエネルギーを**電力量**(electric energy)とよぶ。単位は J (joule ジュール) である。

$$\begin{aligned} \text{電力量 } W [\text{J}] &= \int_0^t p \, dt \quad (\equiv \text{は定義の意味}) \\ &= \text{電力 } p [\text{W}] \times \text{時間 } t [\text{s}] \quad (p \text{ が一定のとき}) \end{aligned} \quad (1-21)$$

逆に**電力はエネルギーを微分して求まる**。家庭では、電力の単位に kW、時間の単位に h(hour 時間)をとり、電力量として kWh (キロワット時) が良く用いられている。1kWh = 1000 × 60 × 60 = 3,600,000 J である。一般に単位は全て SI 単位系(付録参照)に直して計算する。

ちょっと難しい話であるが、電力は電線によって運ばれるのではなく、電線のまわりの空間にできる電界  $E$  と磁界  $H$  によって空中を飛んで運ばれる。ポインティングベクトル  $S \equiv E \times H$  (外積)が電力の流れを表す(いつか勉強する日がくるかも)。だけど、計算は(1-19)でよいので楽ですね。

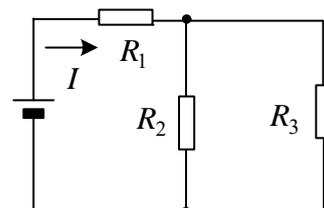
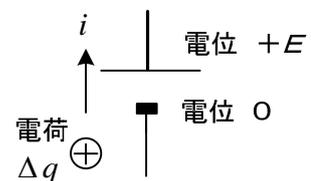
\* 電圧と電流を掛けるとなぜ電力になるのか?

電池の一極の電位を 0, +極の電位を  $E$  とする。正電荷  $\Delta q$  は微小時間  $\Delta t$  の間に電池を通ると、位置エネルギーが  $\Delta q E$  増える(電荷 × 電圧 = エネルギー、電池はそれだけの化学エネルギーを失う)。これが  $\Delta t$  間に電池のした仕事(電力量)である。

電力は電力量を微小時間  $\Delta t$  で割ったもので、 $E \frac{\Delta q}{\Delta t} = E i$  と

なる。

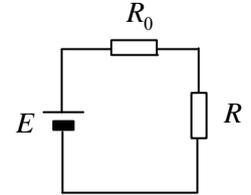
問題 6 図の回路で全ての抵抗は同じ値である。各抵抗で消費される電力の比を求めよ。



(解) 抵抗の値が等しいので、分流の式より、 $R_2, R_3$  に流れる電流は  $I/2$  である。各抵抗の消費電力は

$$R_1 I^2 : R_2 \left(\frac{I}{2}\right)^2 : R_3 \left(\frac{I}{2}\right)^2 = 4 : 1 : 1$$

問題 7 抵抗  $R_0$  は一定で、抵抗  $R$  は可変とする。 $R$  で消費される電力が最大となるとき、 $R$  の値と最大電力を求めよ。



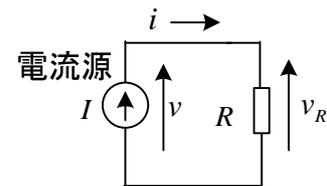
(解) 
$$P = RI^2 = \frac{RE^2}{(R_0 + R)^2} = \frac{E^2}{\frac{R_0^2}{R} + 2R_0 + R}$$

$E, R_0$  は一定だから、 $P$  が最大になるには分母が最小になれば良く、分母を変数  $R$  で微分して 0 と置き、 $R = R_0, P = E^2 / (4R_0)$

$$\therefore f(R) = \frac{R_0^2}{R} + 2R_0 + R \quad \text{とおくと} \quad f'(R) = -\frac{R_0^2}{R^2} + 1 = 0 \quad R > 0 \text{ より}$$

### ○ 電流源

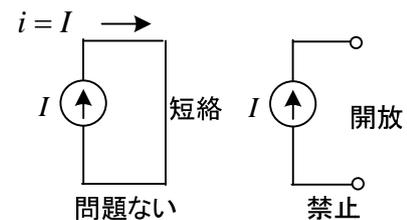
**電圧源**(voltage source)は端子間の電圧が決まっています、流れる電流が負荷により変化します。これに対し、**電流源**(current source)は流れる電流が決まっています、端子間の電圧が負荷により変化します。トランジスタの等価回路などに現れる。図 1-9 で、



$$i = I, \quad v = v_R = R i \quad (1-22)$$

図 1-9 電流源の回路

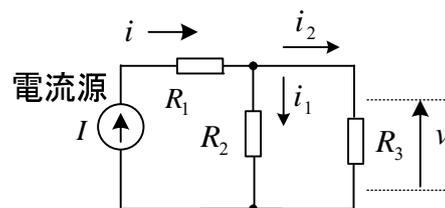
が成立する。電圧源は開放しても問題ないが、短絡することはできない。これに対し電流源は短絡しても問題ないが、開放することはできない。開放しているのに電流が流れているのはおかしいからである。電流源は、一定の電流を流すために電圧が自動的に変化する電圧源と考えることもできる。抵抗が小さいと自動的に電圧が小さくなって、電流は一定となると考えればよい。開放すると一定の電流を流そうとして電圧が無敵大まで大きくなり現実的でなくなる。



問題 8 図の回路で、電流  $i, i_1, i_2$ 、電圧  $v$  を求めよ。

(解) 
$$i = I, \quad i_1 = \frac{R_3 I}{R_2 + R_3}, \quad i_2 = \frac{R_2 I}{R_2 + R_3}$$

$$v = \frac{R_2 R_3 I}{R_2 + R_3}$$



\* どんな回路があっても電流源を流れる電流は変わらない。

## 第2章 キルヒホッフの法則

### ○ キルヒホッフの法則

回路の電流や電圧を求めるには、オームの法則だけでは足りない。**キルヒホッフの法則** (Kirchhoff's law)を必要とする。実は、前章でこの法則を既に使っている。

**第一法則**(current law)は、“回路の節点に流入する電流の和は0である”あるいは“節点に流入する電流の和は流出する電流の和と等しい”というものである。図1を見るとすぐ判る。枝分かれしない限り、電池の中（電子の代わりに正イオンが移動）も含めて電流は同じである。先に述べたように電流の矢印の向きは測定の向きだから自由に選んでよい。

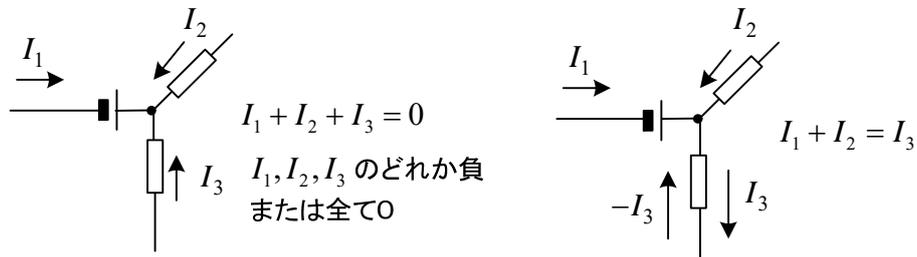


図 2-1 キルヒホッフの第一法則（電流則）

**第二法則**(voltage law)は回路のどんな**閉路**(closed circuit)を1周しても、電圧の和が0となることである。図2-2で、電圧の矢印は自由に選んで良いが、閉路（向きはどちらでもよい）の向きと同じ向きか逆向きかで符号を変える。あるいは“電圧の矢印をベクトルとみなして式を立てる”と覚えておけば簡単に式が立てられる（実際はベクトルではないが）。

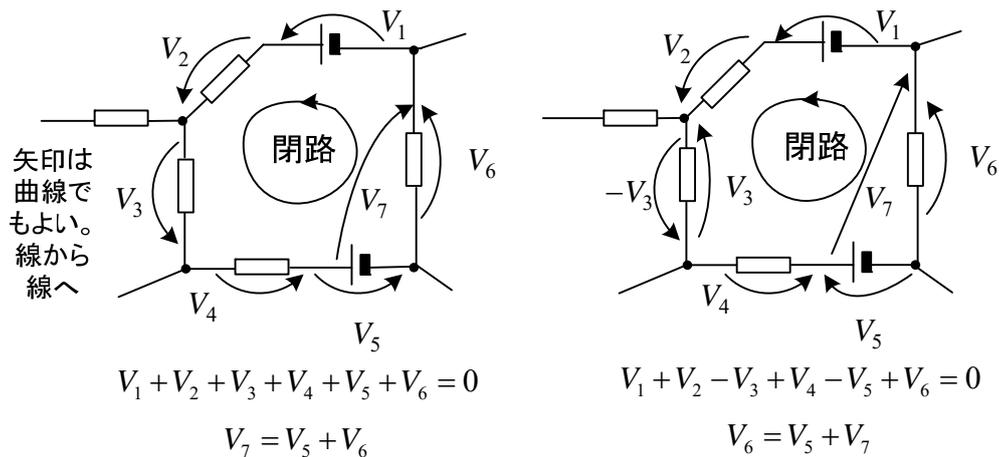


図 2-2 キルヒホッフの第二法則（電圧則）

なお、キルヒホッフの法則は直流回路だけでなく、交流回路においても成立する。

## ○ ちょっと複雑な回路を解く

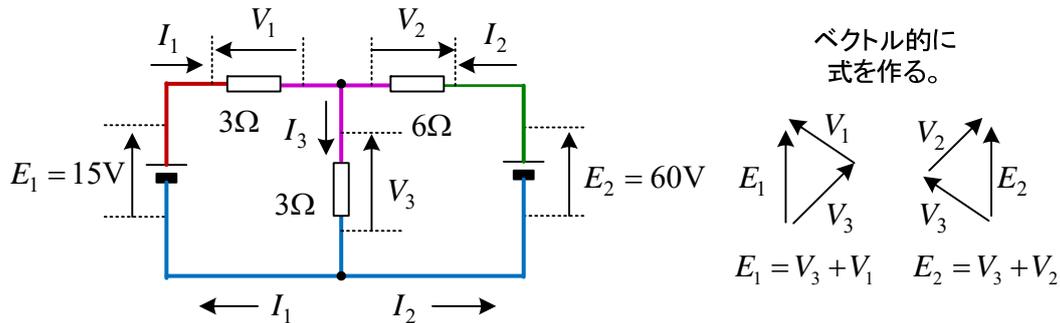


図 2-3 枝電流による解き方

図 2-3 の回路で，電圧や電流を求めてみよう。電圧，電流の記号とその矢印を図のように選ぶ。矢印は定義した量ができるだけ正になるように選ぶのが普通である（もちろん自由だが）。電流は各枝で定義しており，**枝電流**と呼ばれる。このとき以下の関係式が得られる。

オームの法則（電圧，電流の矢印が逆向きするときマイナスは不要）：

$$V_1 = 3I_1, V_2 = 6I_2, V_3 = 3I_3 \quad (2-1)$$

キルヒホッフの第一法則（電流則）：

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (2-2)$$

キルヒホッフの第二法則（電圧則）：

$$E_1 = 15 = V_1 + V_3 \quad (2-3)$$

$$E_2 = 60 = V_2 + V_3 \quad (2-4)$$

(2-2)を(2-1)に代入し， $I_3$ を消去すると

$$V_3 = 3I_1 + 3I_2 \quad (2-5)$$

(2-1), (2-5)を(2-3), (2-4)に代入して，

$$15 = 6I_1 + 3I_2 \quad (2-6)$$

$$60 = 3I_1 + 9I_2 \quad (2-7)$$

未知数(unknown variables)  $I_1, I_2$  について連立

方程式(simultaneous equations)を解いて，

$$I_1 = -1A, I_2 = 7A$$

となる。これを代入して，

$$I_3 = 6A, V_1 = -3V, V_2 = 42V, V_3 = 18V$$

以上の結果， $I_1$ は負だから，矢印の向きと逆向きに実際の電流が 1A 流れることを意味する。また， $V_1$ は負だから，矢の先端が根より 3V 低いことを意味する。

電力については，抵抗で消費される電力は，

$$P_R = 3I_1^2 + 6I_2^2 + 3I_3^2 = 3 \times (-1)^2 + 6 \times 7^2 + 3 \times 6^2 = 405 \text{ W}$$

$E_1$  が送り出す電力は，

### クラメル(Cramer)の公式

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{y_1 d - y_2 b}{ad - bc}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ay_2 - cy_1}{ad - bc}$$

$$P_1 = E_1 I_1 = 15 \times (-1) = -15 \text{ W}$$

であり、負なので実際には  $E_1$  は電力をもらい、充電されている。

$E_2$  が送り出す電力は、

$$P_2 = E_2 I_2 = 60 \times 7 = 420 \text{ W}$$

である。次式のエネルギー保存則が成り立つ。

$$P_1 + P_2 = P_R \tag{2-8}$$

**閉路電流法**という考え方もある。図 2-4(a)に示すように閉路を一巡して流れる電流を**閉路電流**という。閉路 1 を一巡する電流を  $I_1$ 、閉路 2 を一巡する電流を  $I_2$  とする。中央の  $3\Omega$  には  $I_1 + I_2$  が流れることが一目で判る。この場合、閉路電流  $I_1$ 、 $I_2$  は図 2-3 で定義した枝電流  $I_1$ 、 $I_2$  と同じ値である。閉路電流の向きもできるだけ正になるように選ぶ（もちろん自由だが）。

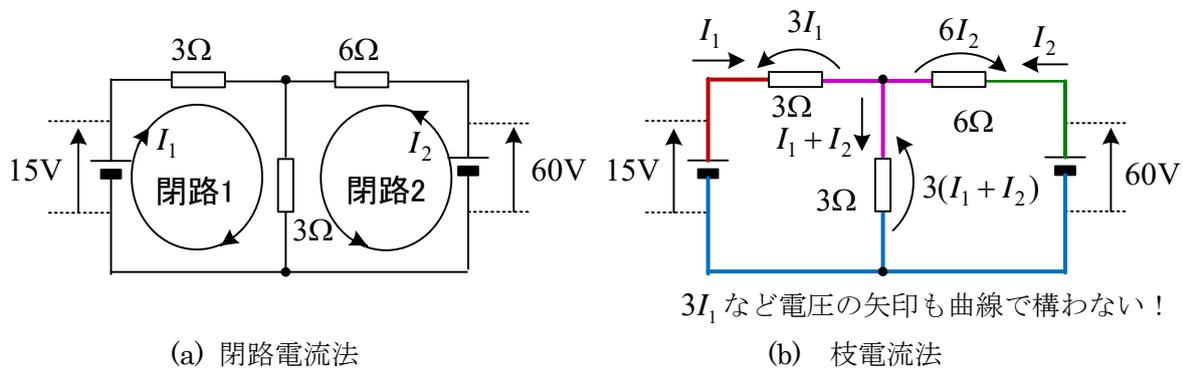


図 2-4 慣れた解き方

各閉路電流によってどれだけの電圧が閉路電流と逆向きに生じたかを求めるため、閉路 1 で  $I_1$  については、 $3\Omega$  と  $3\Omega$  を加えて  $6\Omega$ 、閉路 2 で  $I_2$  については、 $6\Omega$  と  $3\Omega$  を加えて  $9\Omega$  と考える。

キルヒホッフの第二法則（電圧則）より

$$15 = (3+3)I_1 + 3I_2 \tag{2-9} \quad \text{(閉路 1)}$$

$$60 = 3I_1 + (6+3)I_2 \tag{2-10} \quad \text{(閉路 2)}$$

これを解くと(a)の閉路電流  $I_1$ 、 $I_2$  が求まる。もし閉路電流  $I_2$  の向きが逆なら  $15 = (3+3)I_1 - 3I_2$ 、 $60 = 3I_1 - (6+3)I_2$  となる。閉路電流を用いるとキルヒホッフの電流則を考えなくてよい。

»どのように式を立てるか?«

はじめのうちは： 枝電流を使って、(2-1)~(2-7)のように式を立てて解く。この訓練が十分ないと、符号を間違えて、失敗するだろう。

慣れてくると ( $V_1, V_2, V_3$  を定義しない)：図 2-3 では、オームの法則を用い、第 1 章の図 1-4(c)のように  $V_1, V_2, V_3$  の代わりにそれぞれ電圧  $3I_1, 6I_2, 3I_3$  を**電流と逆向き**に書いて、キルヒホッフの電圧則より式を立てる(ベクトルの的に考えても良い)。  $3I_1, 6I_2, 3I_3$  は電圧であることを忘れるな。だから電流と逆向き。図 2-4 (b)も参照されたし。

プロになると ( $V_1, V_2, V_3, I_3$  を定義しない)：枝電流を使う場合は、図 2-4(b)のように  $V_3$  のところに  $3(I_1 + I_2)$  と書いて、電圧則を考えると、(2-6)、(2-7)をいきなり書けるようになる。こうすると、閉路電流法とほとんど同じことになる。もちろん閉路電流法で解いてもよい。

## ○ 面白い問題

電気のことを知るために、面白い問題を作ってみた。

図 2-5 の電圧，電流を求めよう。(a)で、**開放(open)**とは、端子に何もつないでいないということ。このとき電流は流れないから、 $I = 0$ 。しかし、電圧は発生していて、 $V = 15V$ である。

(b)で**短絡(short-circuit)**とは端子を導線で結ぶことである。よって、 $V = 0$ となるが、これは、 $V = E = 15$ と矛盾する。また、オームの法則から、 $I = \infty$ となる。すなわち、これは回路として成立しない。実際にこのように接続すると、大きな電流が流れて電線が燃えてしまう。

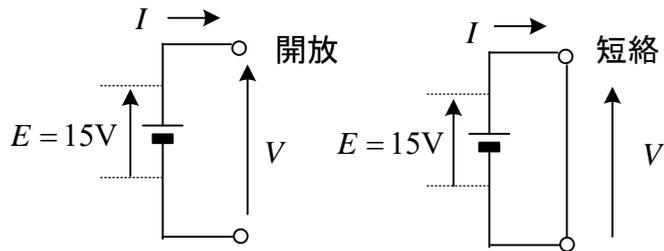


図 2-5 (a) 問題なし

(b) 禁止回路

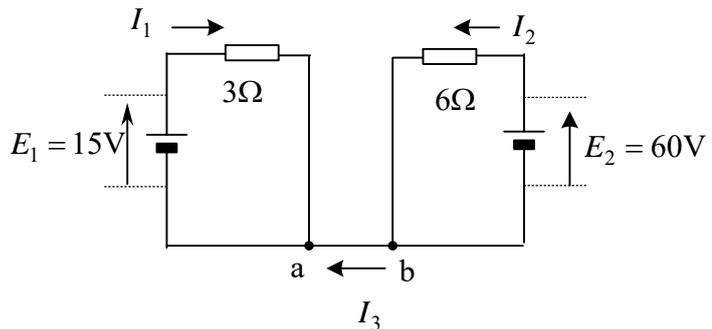


図 2-6

図 2-6 の回路の電流を求めよう。電流は必ず閉路になっていないと流れない。よって、 $I_3 = 0$ である。この結果、両方の回路は分離でき、 $I_1 = 5A$ ,  $I_2 = 10A$ となる。ただし、接続すると a 点と b 点は同じ電位になる。

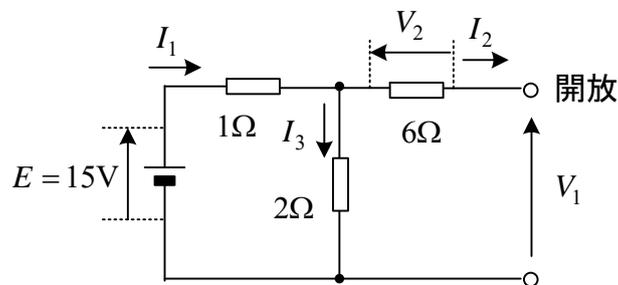


図 2-7

図 2-7 の回路の電圧，電流を求めよう。開放すれば、電流は流れない。よって、 $I_2 = 0$ である。オームの法則より、 $V_2 = 6I_2 = 0$ である。 $I_2 = 0$ だから、 $I_1 = I_3$ であり、 $I_1 = I_3 = 15/(1+2) = 5A$ となる。 $V_2 = 0$ だから、 $V_1 = 2I_3 - V_2 = 10V$ となる。

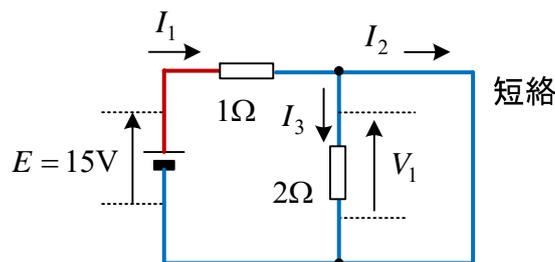


図 2-8

図 2-8 の回路の電圧，電流を求めよう。短絡すると，両端の電圧が 0 となり，図の  $V_1 = 0$  となる。すると，オームの法則より， $I_3 = V_1 / 2 = 0$  である。キルヒホッフの第一法則より， $I_1 = I_2$  となる。1Ω にかかる電圧は，15V となり， $I_1 = I_2 = 15 / 1 = 15A$  である。

図 2-9 の(a)と(b)で，流れる電流に何か違いがあるだろうか？違いは中央の部分の接続のみである。線で結ばれているところは同電位であり，そこがどんな形であっても図(a)，(b)で抵抗は同じ電位の線に接続されているので，各抵抗を流れる電流は両者等しい。よって，どちらも

$$I = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} \quad (2-11)$$

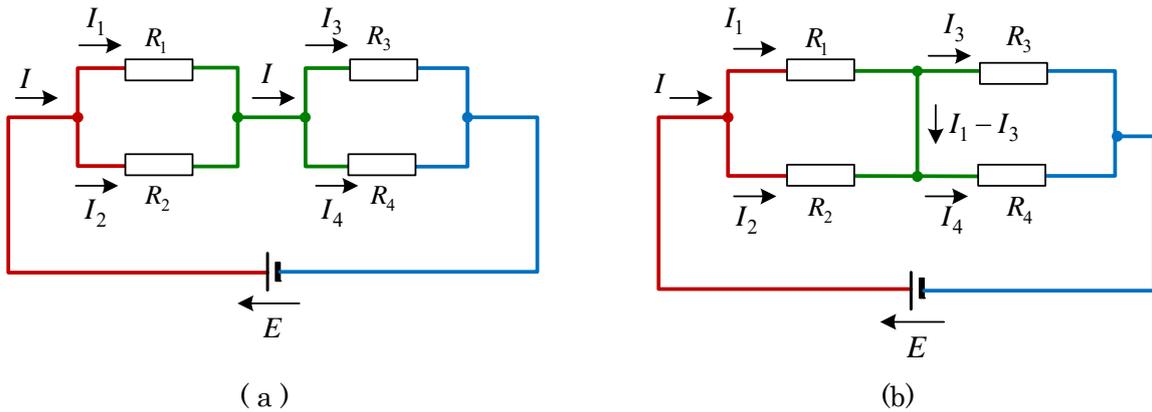
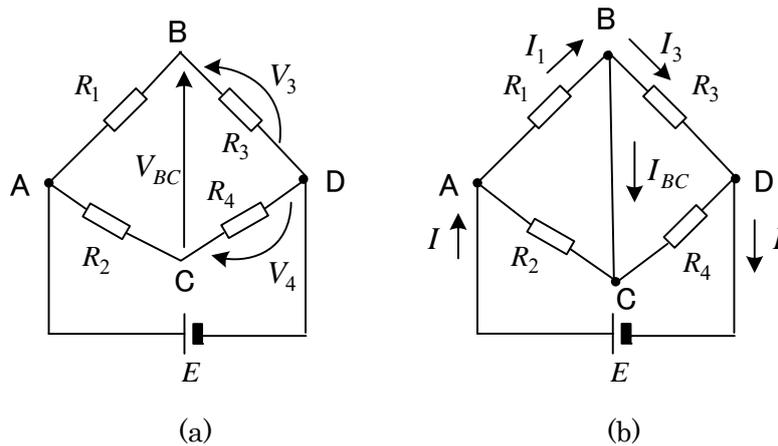


図 2-9 何が違うか？（違いは中央部の電流のみ）

例題 1 図(a)の回路で， $V_{BC}$  を求め，次に  $V_{BC} = 0$  となる条件を求めよ。また，図(b)の回路で， $I_{BC}$  を求め，次に  $I_{BC} = 0$  となる条件を求めよ。（ブリッジ回路の平衡条件）

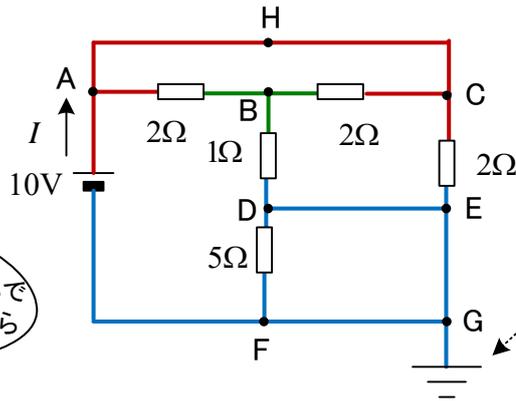


(解) (a)  $V_{BC} = V_3 - V_4 = \frac{R_3 E}{R_1 + R_3} - \frac{R_4 E}{R_2 + R_4}$  (分圧) より  $R_1 R_4 = R_2 R_3$

(b)  $I = \frac{E}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}$  ,  $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$  (A 点分流),  $I_3 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I$  (D 点分流)

$I_{BC} = I_1 - I_3 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}$  より  $R_1 R_4 = R_2 R_3$

例題 2 図の回路で電流  $I$  を求めよ。



A, C点の電位は等しい。  
D, E, F, G点の電位は0

接地, アース, グラウンドなどと呼ばれる。電位の基準となる。大地(導体)接続する場合と筐体(きょうたい)(フレーム)に接続する場合がある。回路の動作には関係ないが, 感電防止, 雑音除去などの役目がある。

(解)  $I = 10A$

ヒント: 電位が同じ点ならば, どの点につないでも回路の動作は同じである。よって, 接続点(黒丸)の位置は電源や抵抗を越えなければ自由に移動できる。また, 抵抗の両端が同電位であればオームの法則よりその抵抗には電流が流れず, 回路から省いて良い。

## ○ 電圧計と電流計

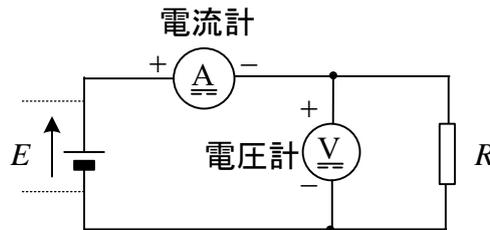


図 2-10 電圧計と電流計の接続

直流回路の電圧と電流はそれぞれ直流電圧計と直流電流計で測定できる。一般には, **電圧計** (voltmeter)の抵抗は非常に大きく電流は流れないと考えてよい。一方, **電流計** (ampere meter)の抵抗は非常に小さく導線と考えて良い。電圧計は測定したい電池や抵抗の両端につなぐ。このとき, 電位の高い方を電圧計の+端子につなぐ。電流計は, 測りたい点に入れて接続する。このとき, 電源の+側に電流計の+端子をつなぐ(電流計の中を+端子から-端子に電流が流れるようにする)。図 2-11 は, 電圧計や電流計の間違ったつなぎ方である。

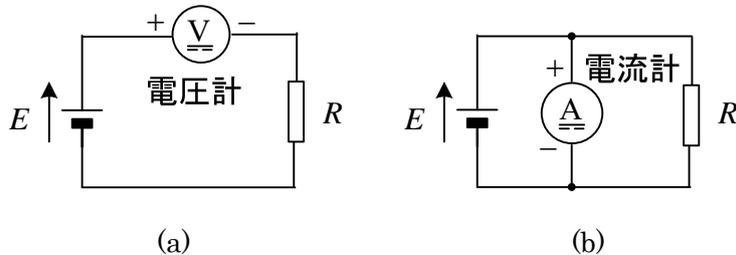


図 2-11 間違ったつなぎ方

(a)場合, 電圧計の抵抗が大きいため回路に電流が流れなくなる。電圧計は  $E$  の値を示し, 壊れることはない。(b)の場合, 電流計を抵抗 0 の導線で置き換えてみると, 電源短絡という大変なミス

を犯している。電流計は当然壊れ、大事故の危険がある。**電流計をつなぐときは、導線をつないでいるという意識**が必要である。

<<電圧や電流の矢印は測定の向き>>

電圧計と電流計を説明したので、電気回路を理解するうえで大変重要な“**電圧や電流の矢印は測定の向きである**”ということをこの機会にしっかりと理解しておこう。

+端子から-端子に電流が流れた場合に正の値を、逆に電流が流れた場合に負の値を表示する電流計がある（普通の直流電流計は+端子から-端子に電流が流れた場合に正の値を表示するだけである）。また、-端子より+端子の方の電位が高い場合に正の値を表示し、逆の場合に負の値を表示する電圧計がある（普通の直流電圧計は-端子より+端子の方の電位が高い場合に正の値を表示するだけである）。この正負に振れる電圧計と電流計を用いて図 2-12 (a), (b)の回路を作った。(a) の場合は電流計の読み $i=2A$ 、電圧計の読み $v=10V$ 、(b) の場合は電流計の読み $i=-2A$ 、電圧計の読み $v=-10V$ となる。つまり測定の仕方が違うと読みが違う。このような電圧計、電流計を書く代わりに、回路に矢印を付けて、その測り方を表す。(a),(b)の回路はそれぞれ(c),(d)に対応する。

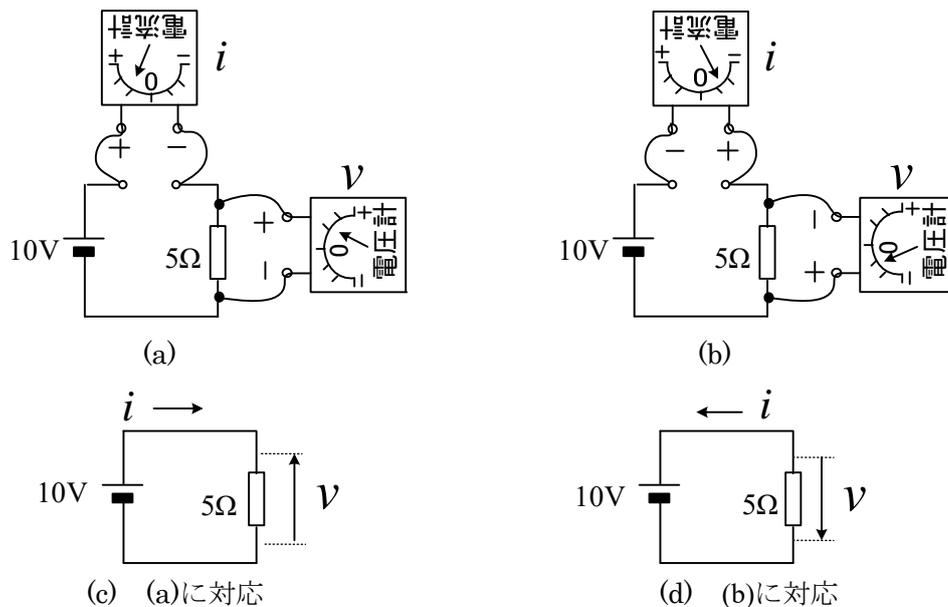
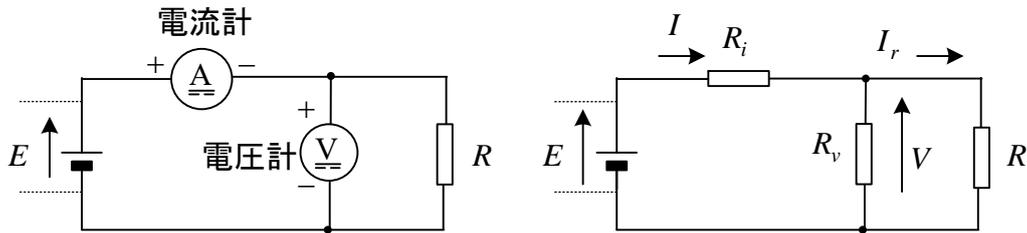


図 2-12 電圧，電流の矢印の意味

(c), (d)の電圧，電流の矢印は測定の向きを表している。(a)の回路で測定するか，(b)の回路で測定するか（他に片方を変える測定法もある）は自由に決めてよい。だから電圧，電流の矢印は自由に選べるのである。実際の直流電圧計や直流電流計は，(a)のように接続する。(b)のように接続すると針が逆に（目盛が無い方に）振れて壊れることがある。ここでは，正負どちらにでも振れることができる特殊なものを考えている。

上記の回路では，(c)のように電圧や電流の向きを選んで問題を解く人が多い。しかし(d)のように定義しても何の問題もない。特に，電源がいくつもあり，回路が複雑になれば，実際に流れる電流の向きは計算してみないと判らない。計算をするために，電圧や電流に矢印をつけて測定の向きを決めておくのである。

例題 3 図の回路で、電圧計の内部抵抗を  $R_v$ 、電流計の内部抵抗を  $R_i$  としたとき、電圧計と電流計の読みを求めよ。また、抵抗  $R$  に流れる電流を求めよ。



(解) 右図の等価回路が書ける。電圧計の読みは  $V$ 、電流計の読みは  $I$  となる。

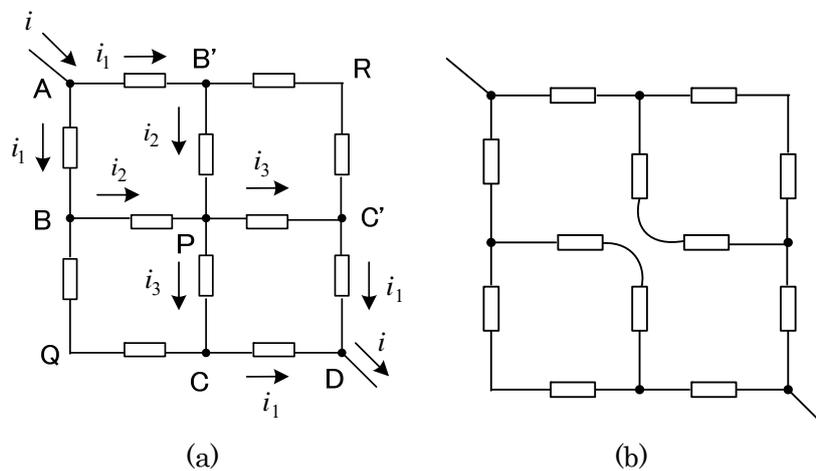
$$I = \frac{E}{R_i + \frac{RR_v}{R+R_v}} = \frac{(R+R_v)E}{R_iR + R_vR_i + RR_v}$$

分流の公式より、 $I_r = \frac{R_v}{R+R_v} I = \frac{R_v E}{R_iR + R_vR_i + RR_v}$ 、電圧計の読みは、 $V = \frac{RR_v E}{R_iR + R_vR_i + RR_v}$

( $R_v$  と  $R$  の合成抵抗を求め、分圧の公式を利用して求めることもできる)

### ○ 回路の対称性を利用した解法

抵抗が全て  $R$  の図(a)の回路で、AD 間の抵抗を求めてみよう。AD 間に直流電源をつなぎ、A 点に電流  $i$  が流れ込み、D 点から流れ出すとしよう。



回路の対称性より、図(a)に示すような電流が流れると考えられる。すると、P 点で、キルヒホッフの第一の法則より、

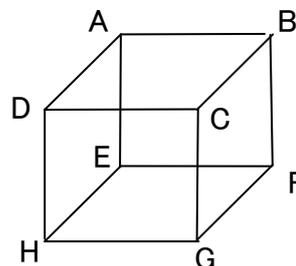
$$2i_2 = 2i_3$$

が成り立つ。故に、 $i_2 = i_3$  である。そこで、P のところで回路を切り離し、図(b)としても、各電流は変化しない。各電流が変化しなければ各電圧も変化しない。よって回路 (a), (b) は同じと考えてよい。(b)については、簡単に合成抵抗が求まる。

$$\text{合成抵抗} = \frac{1}{2} \left( R + \frac{2R}{2} + R \right) = \frac{3}{2} R$$

(別解) QPR の点は同電位で、これらの点を導線で結んでも電流分布は不変なので結んでもよい。

例題 4 各  $1\Omega$  の抵抗が正 6 面体の各稜をなすように接続されている。AG 間、AC 間の抵抗を求めよ。

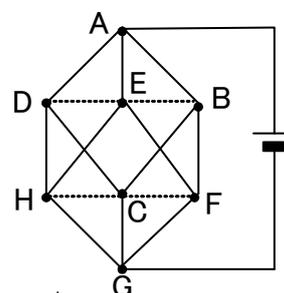


(解) まず、AG 間に直流電圧源をつないで考える。B, D, E の点は区別できず同電位、C, F, H も区別できず同電位となる。これらの同電位の点を導線で結んでも電流は流れず、等価である。これより求める抵抗は、

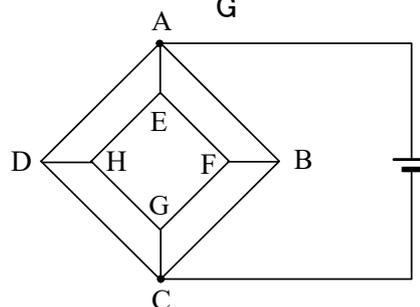
$$R_{AG} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Omega$$



区別できないということは、サイコロの A と G を指で押さえたとき、B, D, E の点は同じ位置関係にあるということ。

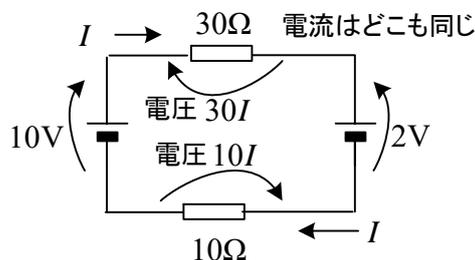
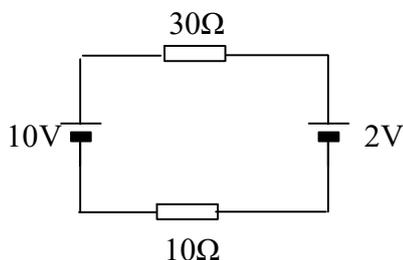


次に、AC 間に直流電圧源をつないで考える。B, D, F, H には半分の電圧がかかるので、同電位と考えられる。DH 間、BF 間の抵抗を省いても電流分布は変化せず、等価である。すると単純な直列と並列回路の合成抵抗を求めればよくて、



$$R_{AC} = \frac{3}{4} \Omega$$

問 1. 図の回路で  $10\Omega$  の両端にかかる電圧を求めよ。

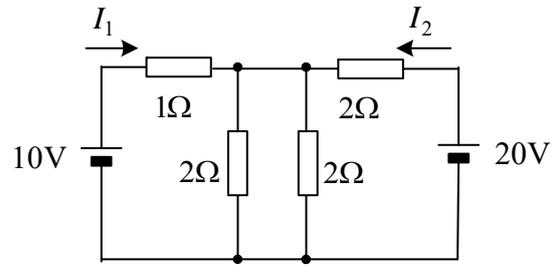


(答) 流れる電流を  $I$  とする。電圧に矢印(線から線へ)を付けて表すと右図のようになる。抵抗では電流  $I$  の矢印と逆向きにオームの法則より  $RI$  の電圧が生じる。電圧について右回りを正として  $10 - 30I - 2 - 10I = 0 \therefore 10 = (30 + 10)I + 2$  (左回りを正としても同じ)  
 $\therefore I = 0.2A$   $10\Omega$  の両端にかかる電圧は  $2V$  である。

問題 2. 図の回路で、電流  $I_1, I_2$  を求めよ。

(答)  $I_1 = 2A, I_2 = 6A$

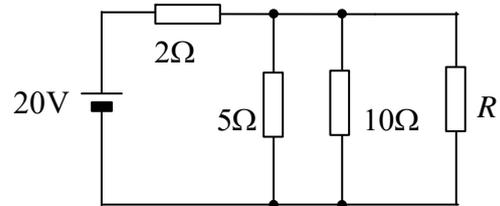
ヒント 合成できる抵抗は 1 つにまとめよ。



問題 3. 図の回路で、 $5\Omega$  の抵抗で消費される電力が  $20W$  のとき、 $R$  を求めよ。

(答)  $R = 5\Omega$

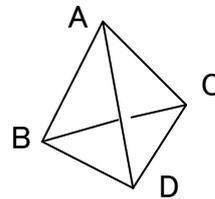
$5\Omega$  の電圧が判り、これから  $2\Omega$  の電圧と電流が判る。 $R$  の電流も判る。



問題 4. 各  $1\Omega$  の抵抗が、正 4 面体の各稜をなすように接続されている。AB 間の抵抗を求めよ。

(答)  $\frac{1}{2}\Omega$  AB 間に電源をつなぐ

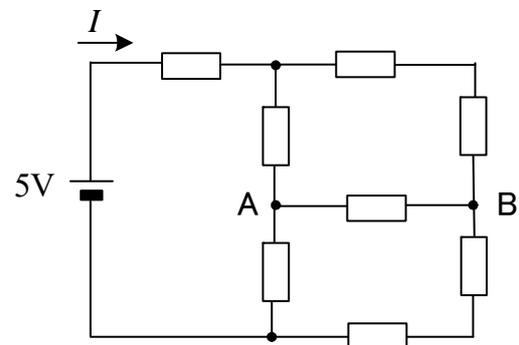
と、CD 間に電流が流れないから省く。



問題 5. 図の回路で、電流  $I$  を求めよ。  
ただし、各抵抗は全て  $1\Omega$  とする。

(答)  $I = \frac{15}{7}A$

(ヒント) まず AB 間の抵抗を省いて A, B 点の電位を考え、次に、そこに抵抗をつないだらどうなるか考えてみよう。



問題 6.  $E[V]$  の電源に各抵抗の値が  $r[\Omega]$

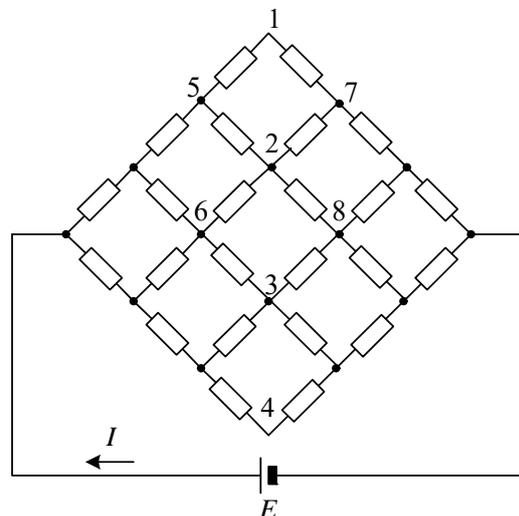
の図の回路がつながっている。流れる電流  $I$  を求めよ。

(答)  $I = \frac{7E}{13r} [A]$

(ヒント) 1, 2, 3, 4 は同電位で結べ、

6, 8 は上下で切り離せる。

5, 6 は同電位ではないから結べない。



# 第3章 コンデンサ

コンデンサの基本的性質とコンデンサを含む直流回路について述べる。スイッチを入れた瞬間や時間が十分経過したときの値は簡単に求まる。

## ○ コンデンサとは

**コンデンサ**(capacitor) (**キャパシタ**とも言われる) は電子回路の部品から電力設備に至るまで、電圧を安定に (一定に) 保つ用途、ノイズを吸収する用途など大変良く使われている。

コンデンサは図 3-1 に示すように、2枚の金属板 A, B を平行においたもので、電荷(electric charge)を金属板表面に貯めることができる。電源を接続すると、(a)図に示すように極板 A から、極板 B に電子が移動し帯電する。(b)図に示すように等価的に正の電荷が極板 B から極板 A に電池を通して移ると考えてもよい。両極板の間は絶縁物(insulator) (誘電体) で、そこを電子(electron)が移動することはない。

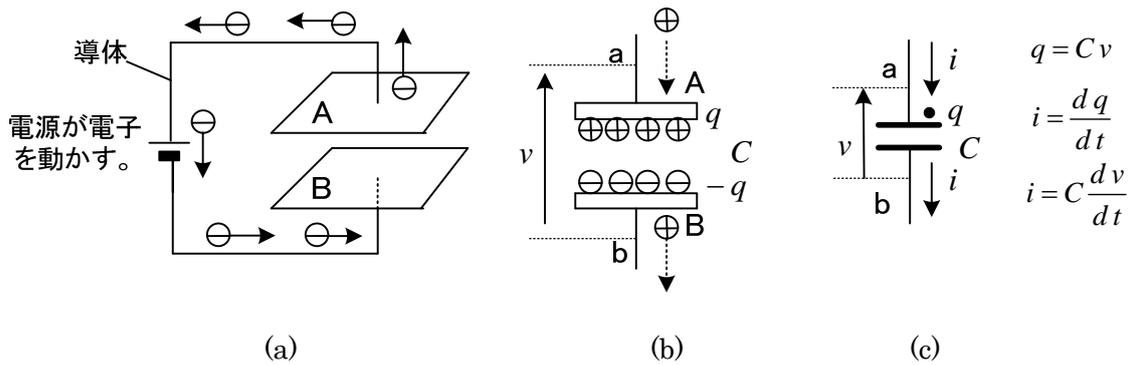
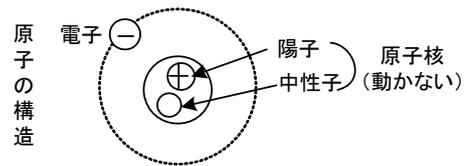


図 3-1 コンデンサ (キャパシタ)

### コンデンサの性質

1. 極板 A に  $q$  [C] (coulomb クーロン) の電荷が蓄えられている時、極板 B には、必ず  $-q$  [C] の電荷が蓄えられる。逆に、B に  $q$  [C] の電荷が蓄えられている時、A には、必ず  $-q$  [C] の電荷が蓄えられる (これは  $q$  を負と考えればすむことだが)。



2. 極板 A の電荷を  $q$  [C] とし (どちらの極板かをはっきりさせるため黒丸●印を付けて表す)、点 b を基準とした点 a の電圧を  $v$  [V] とすると、両者は比例関係にある。すなわち、

$$q = C v \tag{3-1}$$

ここで、 $C$  [F] (farad ファラド) は静電容量(capacitance)と呼ばれる。C は常に正である。物理 (高校の教科書) では C は電気容量と呼ばれる。(3-1)で  $q$  が負のとき  $v$  は負である。

3. 電荷  $q$  の変化があるときには、電流が導体に流れる。この電流は極板の両方で等しくなる。電流は、電荷の微分であり、次式が成立する。

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3-2)$$

なお、1章で電流は1秒間に通過する電荷の量と言ったが、これは電流が一定の場合だけ成り立つことで、厳密には正しくない。しかし微分を知らない人にはそのように説明するしかない。

(3-1), (3-2)よりコンデンサの電圧と電流には次式の関係がある。

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (3-3)$$

$$v = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_0 \quad (3-4)$$

ただし、 $v_0$ はコンデンサ電圧の初期値(initial value) (時間  $t=0$  での値) である。

(3-4)について、もう少し詳しく述べる。(3-3)の両辺を  $t=0$  から現在  $t=t$  まで  $t$  で積分すると (厳密には現在  $t$  と  $dt$  の記号は違う記号にすべきだが誤解はなからう),

$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt = \int_0^t \frac{dv}{dt} dt = [v(t)]_0^t = v(t) - v(0) \quad \text{公式: } \int_a^b \frac{df}{dt} dt = f(b) - f(a) \text{ より}$$

$v(0) = v_0$  だから、(3-4)が得られる。(3-4)は、

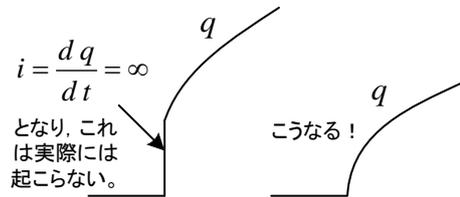
$$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt + \frac{1}{C} \int_0^t i dt \quad (v(-\infty) = 0 \text{ と考えている})$$

とも書かれる。 $v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt$  (時間0までに蓄えられた電荷を  $C$  で割った量) である。

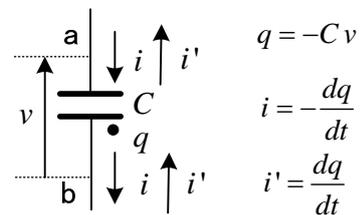
#### 4. コンデンサの電荷は急に変化しない。従って、 コンデンサの電圧も急に変化しない\*。

コンデンサの電流は急に変化することがある。

\*  $q=Cv$  だから。



注意するけど、電圧と電流の矢印や、どの極板の電荷を  $q$  と置くかによって、式にマイナスが付くことがあるよ。



どちらか迷うときには、具体的に考えよう。 $q > 0$  とすると、 $b$  点の電位が高い、よって、 $v < 0$  だからマイナスが必要。また、 $q > 0$  と仮定し、 $q$  が増えていれば  $dq/dt > 0$  で、 $b$  点を下から上に電流が流れる (正電荷が移動する)。よって、 $i'$  については、マイナスはいらない。しかし、 $i = -i'$  だから、 $i$  についてはマイナスが必要である。電圧や電流の記号の矢印と極板のどちらを  $q$  と置くかは自由に決めて良いから、図 3-1 (c) のように選ぶことにすればマイナスをつけなくてよい。 $v$  と  $i$  は逆向きの矢印で定義したとき(3-3)のようにマイナスがつかない。

## 5. コンデンサに蓄えられるエネルギー

最初時間  $t=0$  でコンデンサに電荷がなく、電圧も 0 の状態から、現在  $t=t$  (このとき電圧  $v(t)$ ) までにコンデンサに流入したエネルギー  $W$  [J] は、電力の積分で求められる。すなわち、

$$W = \int_0^t v i dt = \int_0^t v C \frac{dv}{dt} dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C v^2 \right) dt = \left[ \frac{1}{2} C v(t)^2 \right]_0^t = \frac{1}{2} C v(t)^2 \quad (3-5)$$

である ( $v(0)=0$  だから)。これは、電圧  $v(t)$  のコンデンサに蓄えられているエネルギーである。 $W = q(t)v(t)/2$  で  $q(t)v(t)$  でない。充電開始のころ  $v(t)$  は小さく平均  $v(t)/2$  となっている。

## ○ コンデンサの基本特性

図 3-2 に示すように、抵抗とコンデンサが直列につながれた回路に、 $t=0$  で直流電圧を加えるとき、電流、電荷、コンデンサ電圧を求めよう。ただし、コンデンサの初期電荷 (スイッチを入れる直前 ( $t=-0$ ) の電荷) を  $q = q_0$  とする。

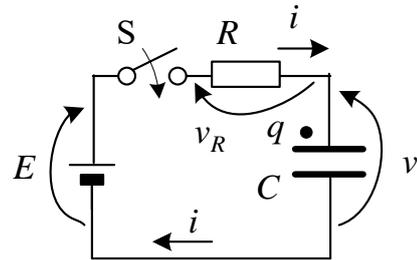


図 3-2 コンデンサに直流電圧を印加

電圧電流の測定方向を図のように定義すると、スイッチを入れた後で成り立つ式は、

$$E = v_R + v = R i + \frac{q}{C} \quad (3-6)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3-7)$$

である。(3-6)に(3-7)代入して

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (3-8)$$

となる。これは微分方程式と呼ばれている。数学で勉強するので、公式のみ示す。

### 1 階の微分方程式 (differential equation)

$$a \frac{dx}{dt} + b x = c$$

ただし、 $a, b, c$  は一定の定数 ( $c=0$  でもよい)

$$\text{解は、} x = \frac{c}{b} + A e^{-\frac{b}{a}t} \quad A \text{ は定数}$$



覚え方 1) 微分の項を 0 とおいて、 $x = c/b$  を得る。これが、第 1 項目 (定常項と言われる。) 2)  $x$  を含まない項  $c=0$  とし、 $d/dt = p$  とおき  $x$  を除いて、 $ap + b = 0$  より、 $p = -b/a$  これが、第 2 項目 (過渡項と言われ、いずれ 0 になる) の  $t$  の係数。

(3-8)に公式を適用して,

$$q = CE + Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-9)$$

コンデンサの電荷は急変しないので,  $t = +0$  (スイッチを入れた直後) も  $q = q_0$  として

$$q_0 = CE + Ae^0 = CE + A \quad A = q_0 - CE \quad (3-10)$$

従って,  $q = CE + (q_0 - CE)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-11)$

$$v = \frac{q}{C} = E + (v_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{ここで, } v_0 = \frac{q_0}{C} \quad (3-12)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E - v_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (3-13)$$

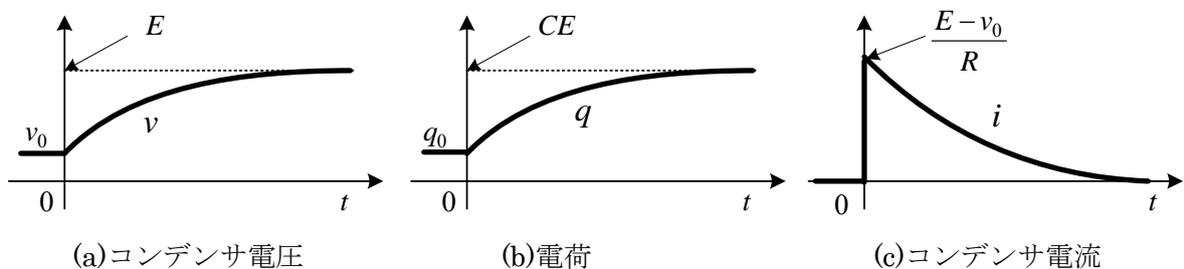


図 3-3 過渡現象の波形

コンデンサのスイッチを入れる前の初期電荷が 0 であれば,  $q_0 = v_0 = 0$  であるから電圧, 電荷は 0 から上昇する。スイッチを入れた瞬間には, コンデンサの電荷は急に移動しない。この結果, 電圧も急には変化しない。一方, 電流は電源電圧と初期コンデンサ電圧との差を抵抗で割った値が急に流れる。初期電荷が 0 であれば, スwitchを入れた瞬間コンデンサは一本の導線とみなせる。時間が十分経過すると, コンデンサは充電され電流は流れなくなる。このとき, 抵抗にかかる電圧は 0 だから, コンデンサ電圧は電源電圧と等しい。逆に, コンデンサ電圧が電源電圧と等しくなるまで電流が流れる。コンデンサがあると電圧の急な変化を抑えることができる。

時間が十分に経過したときのコンデンサ電圧は  $E$  であり, このときコンデンサに蓄えられるエネルギー  $W_c$  [J] は, 性質 5 より

$$W_c = \frac{1}{2} CE^2 \quad (3-14)$$

一方, 電源が供給するエネルギーは,  $q_0 = v_0 = 0$  のとき

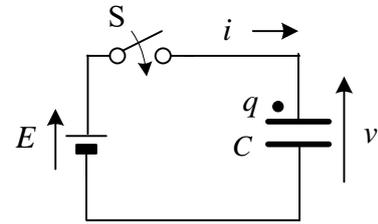
$$W = \int_0^{\infty} E i dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = -CE^2 \left[ e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{\infty} = CE^2 \quad (3-15)$$

であり, 最終的にコンデンサに蓄えられる電荷  $Q$  に電源電圧  $E$  を掛けた値である。  $W = QE$  が成り立つ。抵抗で消費されるエネルギーは,

$$W_R = \int_0^\infty R i^2 dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = -\frac{CE^2}{2} \left[ e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} CE^2 \quad (3-16)$$

以上により、電源が供給するエネルギーは、抵抗の大きさに無関係に（面白いね）、半分は抵抗で消費され、残り半分がコンデンサに蓄えられる。

ところで、図のようにコンデンサだけの回路で、スイッチを入れたらどうなるだろうか（ $q_0 = 0$  とする）。



(3-13)で、 $R \rightarrow 0$  として考えると、電流は瞬間的に $\infty$ となり、すぐに流れなくなる。電圧は一瞬にして電源電圧まで上昇し、電荷  $Q = CE$  が蓄えられる。コンデンサの電圧や電荷が急変する特殊な例である。実際には、電源、電線及びコンデンサの抵抗が存在するので、この回路は仮想的なものである。一般には性質の4が成立つとと考えてよい。

## ○ コンデンサを含む直流回路

以下のことを知っていれば、スイッチを入れた直後 ( $t = +0$ ) とスイッチを入れて時間が十分に経過したときの、コンデンサを含む直流回路のいろんな値を求めることができる。

ここで初期電荷とは、スイッチを入れる直前 ( $t = -0$ ) のコンデンサの電荷のことである。

### コンデンサ

スイッチを入れた直後

: コンデンサの電荷や電圧は急に変化しないので、初期電荷が 0 の場合にはスイッチを入れた直後の電荷や電圧も 0 で、コンデンサを導体と考えて問題を解くとよい。初期電荷がある場合には、その電圧を用いる。コンデンサの電流は急変することがある。

この性質は、直流回路、交流回路いずれでも成立する。

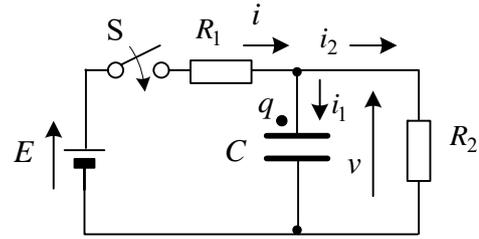
スイッチを入れて十分時間が経過したとき

: 直流電源（電圧源または電流源）がある回路か、電源のない回路で、抵抗が回路のどこかに含まれている場合、回路の全ての量は一定となる。電荷も一定となり、その微分の電流は 0 となる。よって、コンデンサに電流は流れないから、絶縁体として解ける。（注意 電荷や電圧は 0 とは限らない。）

この性質は交流回路では成立しない。

\* スwitchを切って、コンデンサを回路から切り離すと、電流は流れず、電荷はそのまま保存され、電圧も 0 ではない。よって、回路を切った後でも、コンデンサに触ってはいけない。

問題1 図の回路で、スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧，電流，電荷及びコンデンサに蓄えられているエネルギーを求めよ。ただし，スイッチを入れる前のコンデンサの初期電荷は0とする。

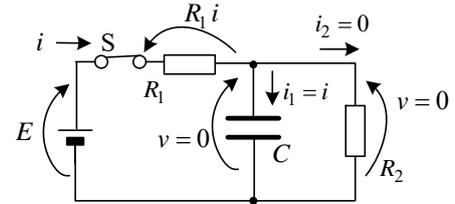


(解) 初期電荷 ( $t = -0$ ) が 0 で，スイッチを入れた直後コンデンサの電荷は急に変化しないから，

$$q = 0 \quad \therefore v = \frac{q}{C} = 0, \quad i_2 = \frac{v}{R_2} = 0$$

$$E = R_1 i + v \quad \text{で, } v = 0 \quad \text{だから, } i = \frac{E}{R_1}, \quad i_1 = i - i_2 = i = \frac{E}{R_1}$$

$$\text{コンデンサのエネルギー } W = \frac{1}{2} C v^2 = 0$$

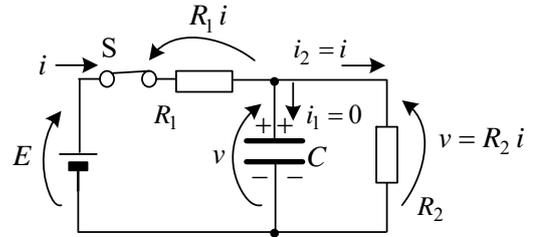


スイッチを入れて時間が十分経過してからは，直流回路ではコンデンサに電流は流れないから，

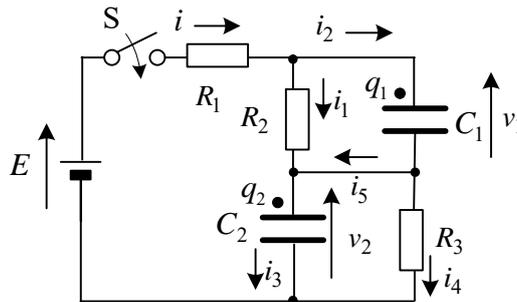
$$i_1 = 0 \quad \therefore i_2 = i \quad \therefore E = R_1 i + R_2 i \quad \therefore i = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

$$v = R_2 i_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \quad q = C v = \frac{C R_2 E}{R_1 + R_2}$$

$$\text{コンデンサのエネルギー } W = \frac{C v^2}{2} = \frac{C}{2} \left( \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} \right)^2$$



問題2 図の回路で、スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧，電流，電荷を求めよ。ただし，スイッチをオンする前のコンデンサの初期電荷は0とする。



(解) スイッチを入れた直後コンデンサの電圧や電荷は変化しないから

$$q_1 = 0, v_1 = 0, \quad q_2 = 0, v_2 = 0 \quad \therefore i_1 = \frac{v_1}{R_2} = 0, \quad i_4 = \frac{v_2}{R_3} = 0 \quad i_2 = i_5 = i_3 = i, \quad i = \frac{E - v_1 - v_2}{R_1} = \frac{E}{R_1}$$

スイッチを入れて十分時間が過ぎてから，直流回路ではコンデンサに電流は流れないから

$$i_2 = 0, i_3 = 0 \quad i = i_1 = -i_5 = i_4 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$v_1 = R_2 i_1 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad q_1 = \frac{C_1 R_2 E}{R_1 + R_2 + R_3} \quad v_2 = \frac{R_3 E}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad q_2 = \frac{C_2 R_3 E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

# 第4章 コイル

電線をぐるぐる巻いたものがコイル(coil)である。コイルの電流が変化すると磁束が変化し、起電力を発生する。本章では、コイルの基本的性質とコイルを含む直流回路を考える。

## ○ 右ねじの法則

図 4-1 の様に電流を流すとその周りに磁気場(磁界, 磁場)ができる。電磁石はこれを利用している。磁界\*を磁束密度  $B$  [T] で表す。回路では  $B$  を集めた磁束  $\phi$  が電圧に直接関係してくる。図は磁束密度  $B$  の力線である磁束線\*\* (lines of magnetic flux) を用いて磁界の様子を示している。磁束密度  $B$  の磁束線は常に閉曲線となり、接線がその点の  $B$  の方向、密度が大きさを表す。

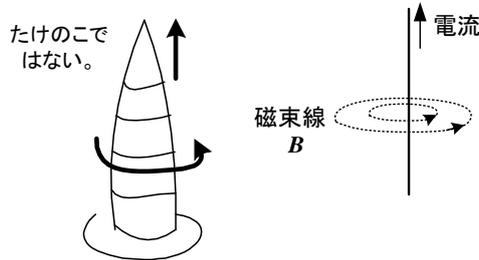


図 4-1 アンペアの右ねじの法則

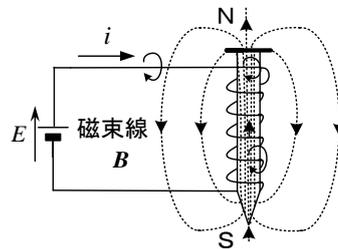


図 4-2 電磁石

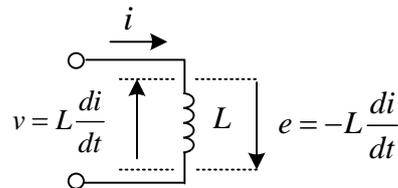
\*磁界(磁場)は磁気場としての広い意味で使う場合と磁界の強さ  $H$  を指す場合がある。

\*\*磁束線を単に磁束(flux)と呼ぶこともある(山田直平:電気磁気学,電気学会)。

## コイルの性質

1. コイルの電圧  $v$  と電流  $i$  の関係は

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (4-1)$$

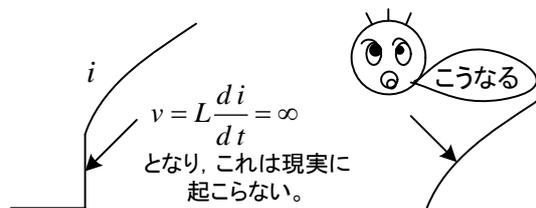


$v$  と  $i$  の矢印を逆向きを選ぶと、

マイナスがつかない。 $e$  は  $i$  と同方向に選んでいるのでマイナスがつく。この  $e$  は誘導起電力を表わす。 $L$  は自己インダクタンス(self-inductance)[H] (henry ヘンリー) と呼ばれ、常に正である。コイルはインダクタとも言われる。 $\psi = N\phi = Li$  ( $\psi$  は鎖交磁束(linkage flux)と呼ばれ、これにより自己インダクタンスが定義される。なお、 $N$  : コイルの巻数、 $\phi$  : 磁束[Wb]である。(4-1)は、ファラデーの電磁誘導の法則から導かれ、コイルの巻き方に関係しない。付録を是非一読して欲しい。

2. コイルの電流は急に変化しない。

すなわち連続的に変化し、ジャンプしない。  
電圧は急に変化することがある。



3. コイルに現時刻  $t$  で電流  $i$  が流れているとき、蓄えられているエネルギー  $W$  は、

$$W = \frac{1}{2} L i^2 \quad [\text{J}] \quad (4-2)$$

導出は  $i(0) = 0$  として、 $W = \int_0^t v i dt = \int_0^t L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) dt = \left[ \frac{1}{2} L i^2(t) \right]_0^t = \frac{1}{2} L i^2(t)$

### ○ コイルの基本特性

次に、 $RL$ 回路に直流電源を加えたとき、コイルに流れる電流や電圧を求めよう。

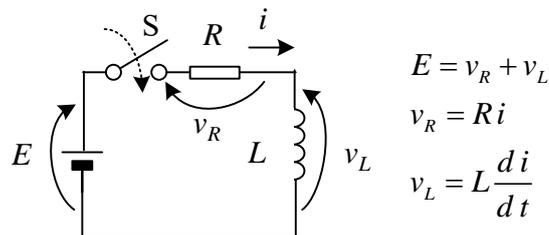


図 4-3  $RL$ 回路

図 4-3 の回路で、 $t=0$  でスイッチ  $S$  をオンした後、成り立つ微分方程式は、

$$E = R i + L \frac{di}{dt} \quad (4-3)$$

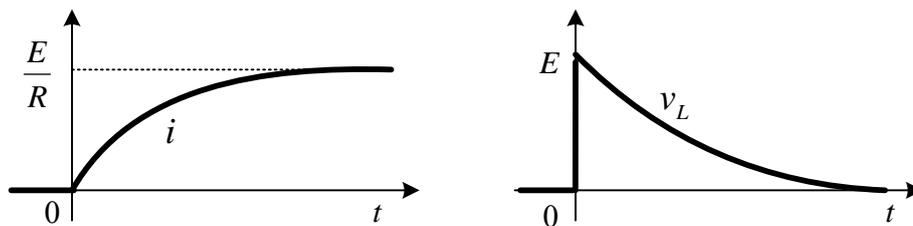
となる。よって公式（コンデンサの基本特性参照）より

$$i = \frac{E}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4-4)$$

スイッチ  $S$  を入れる直前 ( $t = -0$ ) に電流は 0 で、スイッチをオンしても、コイルの電流は急に変化しないので、 $t = +0$  (直後) で、 $i = 0$  より、 $A = -E/R$  となる。故に

$$i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4-5)$$

よって、 $v_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t}$  (4-6)



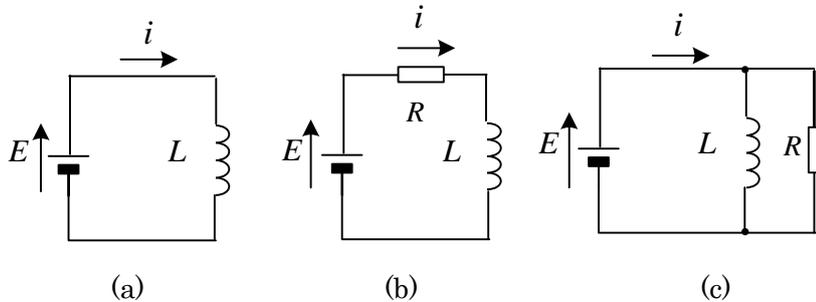
電流波形

コイルの電圧波形

図 4-4  $RL$ 回路の過渡応答波形

コイルには、電流の急な変化を抑える働きがある。最初電流が流れていなければ、スイッチをオンした直後、コイルは電流を流さない。時間が十分経過すると、コイルの電圧は 0 となり、コイルを導線と考えて電流が求まる。これは、あくまで直流に対しての話である。

問題 1 図の回路で、直流電圧を加え、時間が十分経過したときの電流を求めよ。



(解) (a)  $E = L \frac{di}{dt}$  を解いて、 $i = i(0) + \frac{E}{L}t$  となり、 $i(\infty) = \infty$  この回路は実際には使えない。

実際のコイルには、電線の小さな抵抗があり、また電池の内部抵抗もあって(b)と等価になる。

(b)  $i(\infty) = E/R$  となる。 (c)  $i = i(0) + \frac{E}{L}t + \frac{E}{R}$  この回路も実際には使えない。

## ○ コイルを含む直流回路

以下のことを知っていれば、コイルを含む直流回路で、スイッチを入れた直後 ( $t = +0$ ) とスイッチを入れて時間が十分に経過したときの、いろいろの値を求めることができる。

ここで初期電流とは、スイッチをオンする直前 ( $t = -0$ ) の電流のことである。

### コイル

スイッチを入れた直後

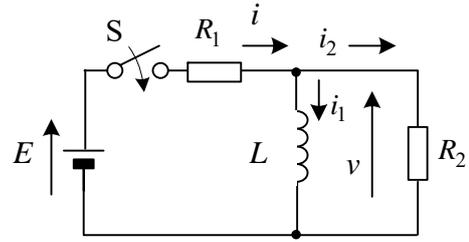
: コイルの電流は急に変化しないので、初期電流が 0 の場合には電流は流れない (絶縁体のように)。初期電流が流れている場合には、その値から変化し始める。これは交流でも成立する。なお、コイルの電圧は急変することがある。

スイッチを入れて十分時間が経過したとき  
(定常状態という)

: コイルの電流は一定値になるので、コイルに生じる電圧は 0 となる。よってコイルを導線に置き換えて問題を解けるただし、電源 (電圧源または電流源) が直流か、または電源がない場合で、回路に抵抗が含まれている場合\*に限る。よって、交流では成立しない。

\* たとえ直流電源が見つからないであっても、LC だけからなる回路では、いつまでも振動が続き一定にならない。また、例え抵抗があっても、問題 1 (c) の様な場合には成り立たない。

問題 2 図の回路で、スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧、電流、及びコイルに蓄えられているエネルギーを求めよ。ただし、スイッチを入れる直前のコイルの電流は 0 とする。



(解) スwitchを入れた直後、コイルの電流は急に変化しないので、

$$i_1 = 0 \quad (\text{電流が流れないから } L \text{ 省ける})$$

$$i = i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}, \quad v = R_2 i_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

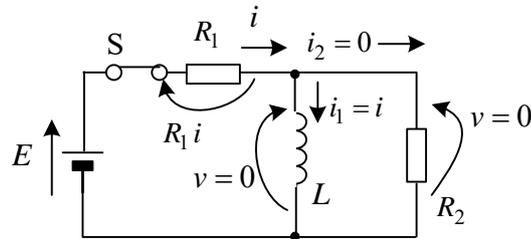
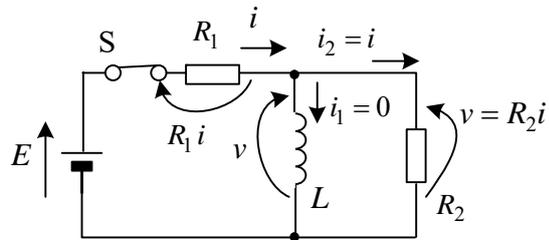
$$\text{コイルのエネルギー } W = \frac{1}{2} L i_1^2 = 0$$

スイッチを入れて時間が十分経過してからは、直流回路ではコイルの電圧は 0 となる。

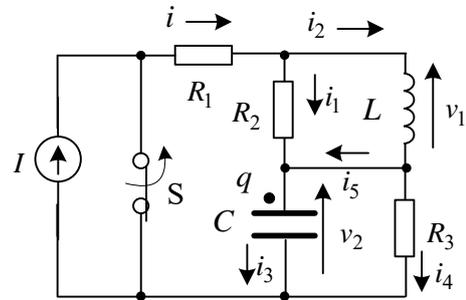
$$v = 0 \quad \therefore i_2 = \frac{v}{R_2} = 0$$

$$i = \frac{E - v}{R_1} = \frac{E}{R_1}, \quad i_1 = i = \frac{E}{R_1},$$

$$W = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{E}{R_1} \right)^2$$



問題 3 電流  $I$  の直流電流源に接続された図の回路で、スイッチ  $S$  を開いた直後および時間が十分経過してからの各部の電圧、電流、電荷を求めよ。ただし、スイッチを開く前、回路は定常状態であったとする。



(解) スwitch  $S$  を開く前、電流源が短絡されているから電流  $I$  はスイッチのみを流れて流れ、回路が定常状態であるので、図中の電圧、電流、電荷は全て 0 である (電源からエネルギーが供給されないのいずれ 0 となるから)。

スイッチ  $S$  を開いた直後、コンデンサの電荷とコイルの電流は急変しないから

$$q = 0, v_2 = 0 \quad \therefore i_4 = \frac{v_2}{R_3} = 0$$

$$i_2 = 0, i_5 = i_2 - i_4 = 0, i = i_1 = i_3 = I, \quad v_1 = R_2 i_1 = R_2 I$$

$$(v_1 = L \frac{di_2}{dt} \text{ は常に成立し, } i_2 = 0 \text{ だから } v_1 = 0 \text{ としてはいけない。} i_2 = 0 \text{ は瞬間的})$$

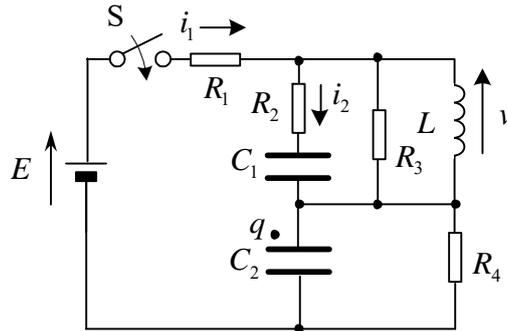
スイッチを開いて時間が十分経過してからは、並列に抵抗  $R_3$  があるので、コンデンサに電流は流れず、回路から除いて考える。また、コイルの電圧は 0 である。

$$v_1 = 0 \therefore i_1 = \frac{v_1}{R_2} = 0$$

$$i_3 = 0, i_5 = i_3 - i_1 = 0, i = i_2 = i_4 = I$$

$$v_2 = R_3 i_4 = R_3 I, q = C v_2 = C R_3 I$$

問題4 図の回路で、スイッチを入れた直後および時間が十分経過してからの、図中に定義された電圧  $v$ 、電流  $i_1$ 、 $i_2$ 、電荷  $q$  を求めよ。ただし、スイッチを入れる前のコンデンサの電荷とコイルの電流は 0 とする。



(解) スwitchを入れた直後、コイルの電流は 0、コンデンサの電圧は 0 である。よって、 $R_4$  の電圧は 0 で電流は流れない。

$$q = 0, \quad i_1 = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{(R_2 + R_3)E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}, \quad i_2 = i_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \frac{R_3 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$v = R_2 i_2 = \frac{R_2 R_3 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

スイッチを入れて時間が十分経過した後、コンデンサの電流とコイルの電圧は 0 となる。

$$i_2 = 0, \quad v = 0, \quad i_1 = \frac{E}{R_1 + R_4}, \quad q = C_2 R_4 i_1 = \frac{C_2 R_4 E}{R_1 + R_4}$$

## ○ 相互誘導

図 4-5 の様に、鉄心<sup>てっしん</sup>に 2 つのコイルを巻いた変成器 (変圧器) を考える。電流  $i_1$  が流れると、巻数  $N_1$  のコイル 1 (一次巻線) によって磁束  $\phi_1$  ができる。磁束  $\phi_1$  は、鉄心を通して、巻数  $N_2$  のコイル 2 (二次巻線) の中を通る。電源電圧を変化させて電流  $i_1$  を変化させると、電流  $i_1$  が作る磁束が変化し、電磁誘導の法則によって、コイル 2 にも誘導起電力が生じる。これを、相互誘導 (mutual induction) と呼ぶ。相互誘導による図の電圧  $v_2$  は、次式で与えられる。

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} \tag{4-7}$$

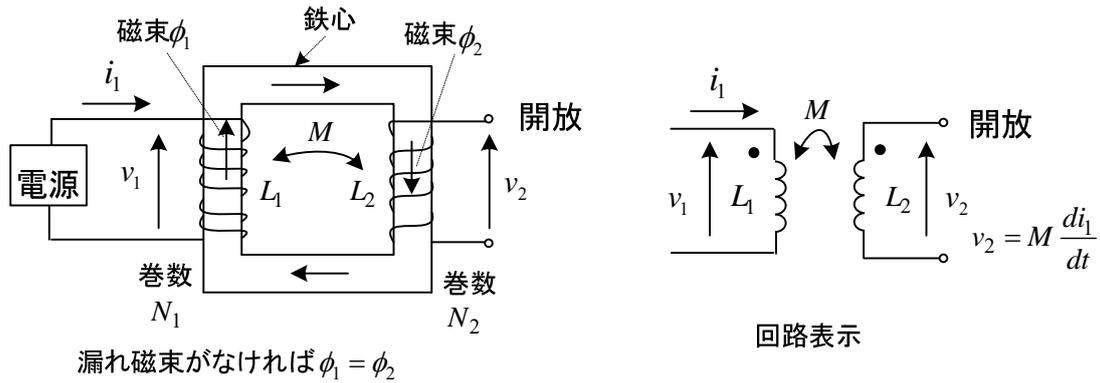


図 4-5 変成器とその回路表示 (二次側開放の場合)

ここで、 $M$  を**相互インダクタンス**(mutual inductance)[H]と呼ぶ。

図中の  $\bullet$  印は、相互インダクタンス  $M$  についての式を立てる場合に関係し、**自己インダクタンス**  $L_1, L_2$  には関係しない。 $\bullet$  印からコイルに入る向きに電流  $i$  を定義すると、**相互誘導**によって相手方のコイルの  $\bullet$  印に電圧の矢印の先端がある向きに  $M(di/dt)$  が生じるものと定義する。詳細は第 10 章で述べる。自己インダクタンスは常に正であるが、相互インダクタンスは正とは限らない。図 4-5 の場合は、相互インダクタンスは正である。

(4-7)が成り立つのは、コイル 2 に何もつないでいない場合(開放)で、図 4-6 のように抵抗などをつなぐと電流  $i_2$  が流れ、コイル 2 に**自己誘導**  $L_2$  による電圧が発生すると同時にコイル 1 にコイル 2 の電流  $i_2$  による相互誘導の電圧が発生する。鉄心中の磁束は電流  $i_1$  と電流  $i_2$  で作られる。

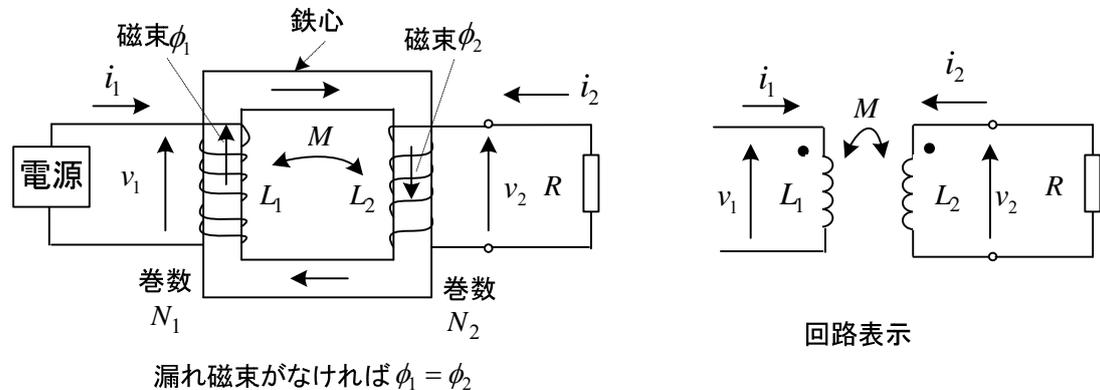


図 4-6 変成器とその回路表示 (二次側に負荷を接続の場合)

この場合次式が成立する。 $i_2$  は図と反対向きに定義してもよいが、その時は  $i_2$  の項に-がつく。

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = N_1 \frac{d\phi_1}{dt}, \quad N_1 \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 : \text{コイル 1 の鎖交磁束} \quad (4-8)$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_2}{dt}, \quad N_2 \phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 : \text{コイル 2 の鎖交磁束} \quad (4-9)$$

磁束が鉄心の中だけを通るなら  $\phi_1 = \phi_2$  で  $L_1 L_2 = M^2$  が成立する(第 10 章で詳しく学ぶ)。

# 第5章 交流回路

本章では、抵抗、コイル、コンデンサに交流電源をつないだ場合を考える。前提条件として、回路のスイッチを入れて時間が十分経過した<sup>ていじょうじょうたい</sup>定常状態(steady state)のみを扱う。

## ○ 交流とは？

これまで、主に電池についての話をしてきた。電池の電圧は一定で、時間的に変化しない。これは、**直流**(direct current DC)と呼ばれる。一方、家庭に送られているコンセントの電圧や電流は時間的にプラスとマイナスに変化している。時間的に変化し、平均値が 0 であるような電圧や電流を**交流**(alternating current AC)という。これを式で表すと**正弦波**(sin 関数または cos 関数)となる。

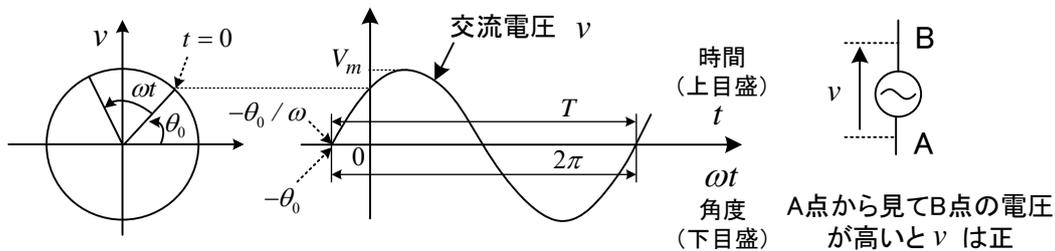


図 5-1 交流

図 5-1 の正弦波の**交流電圧**(alternating voltage, AC voltage)  $v$  を式で書くと、

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_0) \tag{5-1}$$

ここで、 $V_m$  : 電圧の**振幅**(amplitude)または最大値[V] (正)、 $\omega$  : **角周波数**(angular frequency)[rad/s]、 $t$  : 時間[s]である。**位相**(phase angle)  $\theta$  [rad] (ラジアン) は  $\sin()$  の  $()$  の角度で、

$$\theta = \omega t + \theta_0 \tag{5-2} \quad (\omega \text{ が変化するとき } \theta = \theta_0 + \int_0^t \omega(t) dt)$$

である。**角周波数**の定義は、 $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$  であり、 $\omega$  が一定のとき(5-2)は成立する。普通、回路理論では $\omega$ を一定と考えてよい(発電機やモータの解析では $\omega$ が変化することがある)。 $\theta_0$  (定数)は $t=0$ のときの位相で**初期位相**(initial phase angle) (単に**位相**と呼ばれることも多い) という。図 5-1 の  $T$  [s]は**周期**(period)と呼ばれ、 $\omega$  が一定のとき 1 周期で角度は  $2\pi$  変化し、角周波数は

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5-3}$$

となる。1 秒間に周期がいくつあるかを表すのが、**周波数**(frequency)  $f$  [Hz](ヘルツ)で、

$$f = \frac{1}{T} \quad (5-4)$$

である。例えば、周期が 1 ms なら周波数は 1 kHz である (m, k は留意事項を参照)。1 秒に  $f$  回の周期が入っており、 $\omega$  は 1 秒間の角度の変化だから、式では(5-3), (5-4)より

$$\omega = 2\pi f \quad (5-5)$$

となる。商用電源は西日本地区では、 $f = 60\text{Hz}$ 、東日本では、 $f = 50\text{Hz}$  である。また、家庭内に送られる電圧は、よく 100V と言っているが、これは**実効値**(effective value)と呼ばれる値のことで、**最大値**(maximum value)の  $1/\sqrt{2}$  である。すなわち、実効値を  $V_e [\text{V}]$  とすると、

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \quad (5-6)$$

である。よって、家庭に送られる実効値 100V の電圧の最大値は約 141V である。

以上のことは、交流電流についても同様に定義される。なお、関東にはドイツから 50Hz の発電機が関西にはアメリカから 60Hz の発電機が輸入されたことが周波数の違いを生み、現在に至っている。

問題 1 交流電流が、 $i = 100\sin(5t + \frac{\pi}{3}) [\text{A}]$  で与えられるとき、振幅、実効値、周期、角周波数、周波数、位相、初期位相を求めよ。また、電流の波形を描き、横軸の時間  $t$  と角度  $5t$  について目盛を書け。

(解) 振幅 100 A, 実効値  $\frac{100}{\sqrt{2}}$  A, 角周波数  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ , 周波数  $\frac{5}{2\pi} \text{ Hz}$ ,  
 周期  $\frac{2\pi}{5} \text{ s}$ , 位相  $5t + \frac{\pi}{3} [\text{rad}]$ , 初期位相  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  ( $t=0$  での位相)

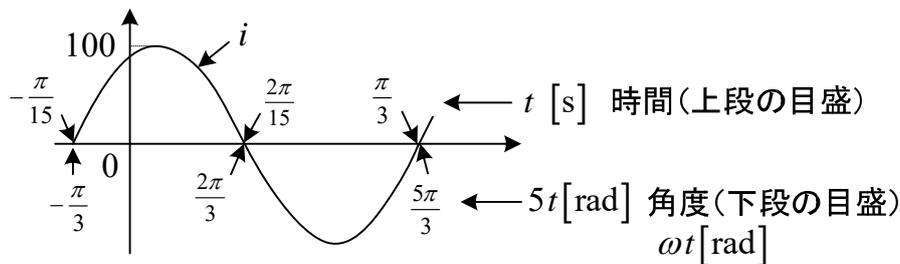


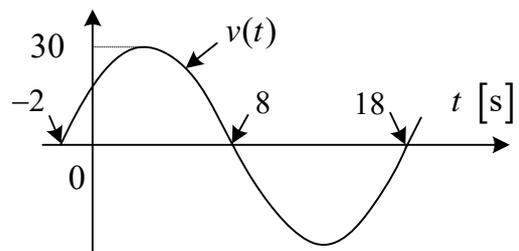
図 5-2 交流電流波形



目盛は時間より角度  $\omega t (= 5t)$  の方が書きやすい。

ばってん時間でも書けんとね。

問題 2 図に示す電圧の瞬時値  $v(t)$  の式を書け。ただし、横軸は時間で単位は秒である。



(解)  $v(t) = 30\sin(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{5})$

## ○ 基本的な交流回路

抵抗, コイル, コンデンサ単体に交流電圧が印加された場合は, 最も単純なケースである。まず, 図 5-3 の抵抗だけの回路を考える。

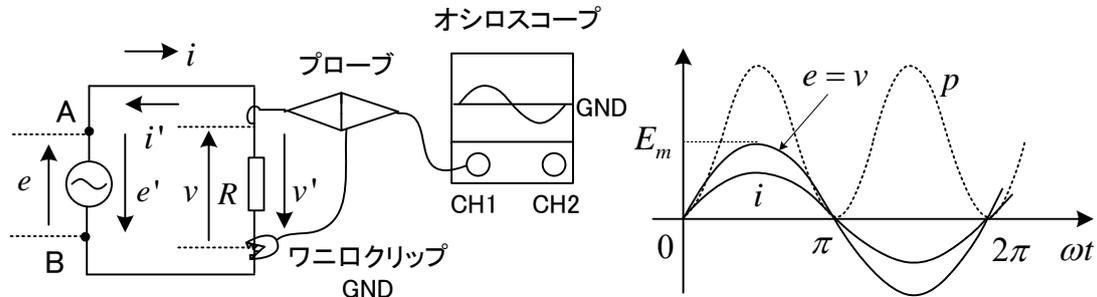


図 5-3 R回路

電圧や電流を表す記号 ( $e, e', i, i'$  など) は矢印をつけてその量を定義する。矢印はその量の測定の向き (正の向き, 正方向とも言われる) である。測定の向きなので, 矢印は自分の好きな向きにつけてよい。これに対し, 電流には“**実際の電流の向き**”と言うことがある。 $i > 0$ であれば, そのときの  $i$  の矢印の向きが実際の電流の向き (正電荷が動く向き) で,  $i < 0$  であれば  $i$  の矢印の反対向きが実際の電流の向きである。逆向きに定義した  $i'$  についても同様に,  $i' > 0$  のとき  $i'$  の矢印の向きが実際の電流の向きである。すなわち, 電流  $i, i'$  の測定の向きを図の矢印の向きに定義したとき, それらの値が正ならその向きが実際の電流の向きである。電圧については  $e > 0$  ならば, B 点よりも A 点の電位が高い。逆向きに電圧  $e'$  を定義した場合,  $e' > 0$  なら A 点よりも B 点の電位が高い。電圧を測るオシロスコープを用いた実験で, プローブの GND 端子を B 側につなぎ, 先端を A 側に接続したとしよう (このときは  $v'$  でなく  $v$  を測ることになる)。図 5-3 のような実験波形が得られたとすると,  $0 \sim \pi$  で  $e = v > 0$  であり, B 点よりも A 点の電位が高く,  $\pi \sim 2\pi$  では  $e = v < 0$  であり A 点よりも B 点の電位が高いことを意味する。電流はオシロスコープで直接測れないが,  $v = Ri$  の関係から電流  $i$  の波形は  $v$  と同様になる。 $v = -Ri'$  だから,  $i'$  は  $i$  を反転した波形である。2つの波形を CH1, CH2 で同時に測る場合, プローブも 2本必要だが, それらの GND はオシロスコープの中で線がつながっているから回路を短絡しないように注意しないとイケない。根本的なことなのでちょっと熱弁をふるいました。

図 5-3 で,  $v = e = E_m \sin \omega t$  とすると, オームの法則より,

$$i = \frac{v}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t \equiv I_m \sin \omega t \quad (5-7)$$

となる。電圧と電流は同じタイミングで変化し, 位相にずれがない (**同位相** と言う)。

次に, 抵抗で消費される **瞬時電力  $p$**  と, その平均値  $P$  を求める。**瞬時電力** は

$$p = vi = \frac{E_m^2}{R} \sin^2 \omega t = \frac{E_m^2}{2R} (1 - \cos 2\omega t) \quad (5-8)$$

である。この平均値は(5-8)右辺第 2 項の平均値が 0 になるので次式で与えられる。

$$P = \frac{E_m^2}{2R} = \frac{E_m I_m}{2} \quad (5-9)$$

ここで、電圧、電流の実効値(effective value)を、

$$E_e \equiv \frac{E_m}{\sqrt{2}}, I_e \equiv \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (5-10)$$

と定義する(一般的な定義は第14章)。これを用いると(5-7)より、 $E_e = R I_e$ であり、(5-9)より

$$P = \frac{E_e^2}{R} = R I_e^2 = E_e I_e \quad (\text{抵抗のみ}) \quad (5-11)$$

となる。交流電圧計や交流電流計は実効値を表示するように作られており、この値を一般に用いる。なお、(5-11)は抵抗だけでしか成立しないが、(5-10)は正弦波交流の定義式で常に使える。

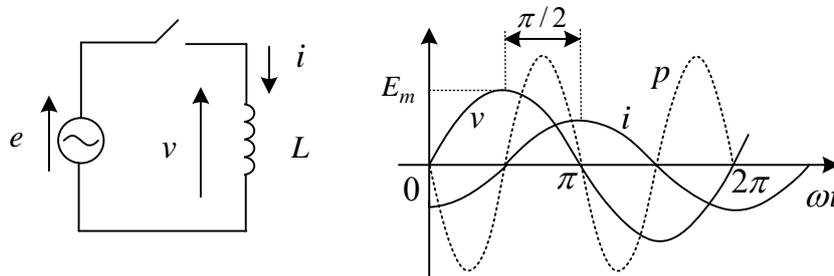


図 5-4 L回路

図 5-4 はコイルだけの回路である。スイッチを入れると、

$$v = e = E_m \sin \omega t = L \frac{di}{dt} \quad (5-12)$$

だから、
$$i = \frac{1}{L} \int^t E_m \sin \omega t dt = -\frac{E_m}{\omega L} \cos \omega t = \frac{E_m}{\omega L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (5-13)$$

(注意)  $t=0$  でスイッチを入れたとき、電流は急に变化しないので初期値は 0 である。(5-12)の微分方程式を電流 0 の初期条件で解いて、次式が得られる。

$$i = -\frac{E_m}{\omega L} \cos \omega t + \frac{E_m}{\omega L} \quad (\frac{E_m}{\omega L} : \text{直流分})$$

図 5-4 で実際に存在する非常に小さい抵抗を考えると、電流はスイッチを入れてから十分時間が経過した定常状態で直流分のない正弦波となる。これは第 15 章例題 7 で  $t=\infty$  とすることで判る。このように極小さい抵抗が図 5-4 の回路にあると考え、定常状態で(5-13)が成立する。一般に、交流回路の定常状態では直流分はないと考えてよく、計算に必要なから、(5-13)のように積分範囲には現時刻  $t$  のみを書くことがある。図 5-4 は特殊な回路例である。

電圧と電流の矢印を図のように定義すると電流は電圧より位相が  $\pi/2$  遅れる(電流は電圧より時間が遅れて最大になる)。見方を変えると、電流は電圧より位相が  $3\pi/2$  進んでいるとも言えるが、遅れ進みは一般に差の小さい方でいうので、このようにはいわない。また、電圧電流の矢印を同向きに選ぶと電流は電圧より位相が  $\pi/2$  進む(普通このようには選ばない)。電流の振幅は、

$I_m = E_m / (\omega L)$  である。実効値の関係は、 $\sqrt{2}$  で割って(5-10)より

$$I_e = \frac{E_e}{\omega L} \quad (5-14)$$

となる。ここで  $\omega L$  [ $\Omega$ ] は、交流に対するコイルの抵抗みたいなもので、**誘導リアクタンス** (inductive reactance) と呼ばれる。

次に、瞬時電力は

$$p = vi = -\frac{E_m^2}{\omega L} \sin \omega t \cos \omega t = -\frac{E_m^2}{2\omega L} \sin 2\omega t \quad (5-15)$$

であり、平均電力  $P$  は

$$P = 0 \quad (5-16)$$

となる。コイルはエネルギーを蓄えたり放出したりするだけで、エネルギーを消費しない。

なお、波形をみると電位の低い方から高い方に電流が流れる期間 ( $v < 0, i > 0$ ) がある。電位の高い方から低い方に常に電流が流れる素子は抵抗 (オームの法則) のみである。水の流れのイメージをコイルやコンデンサに持ち込んではいけない。

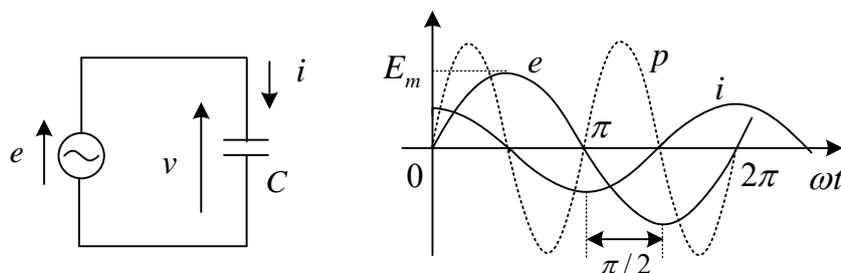


図 5-5 C 回路

図 5-5 はコンデンサだけの回路である。この場合、

$$v = e = E_m \sin \omega t \quad (5-17)$$

だから、

$$i = C \frac{dv}{dt} = \omega C E_m \cos \omega t = \omega C E_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (5-18)$$

となる。このように、 $v, i$  の矢印を図のように逆向きに定義すると電流は電圧より位相が  $\pi/2$  進む。電流の振幅は、 $I_m = \omega C E_m$  である。実効値の関係は、

$$I_e = \omega C E_e \quad (5-19)$$

となる。ここで  $1/(\omega C)$  [ $\Omega$ ] は、交流に対するコンデンサの抵抗みたいなもので、**容量リアクタンス** (capacitive reactance) と呼ばれる。

次に、瞬時電力は

$$p = \omega C E_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{\omega C E_m^2}{2} \sin 2\omega t \quad (5-20)$$

であり、平均電力  $P$  は

$$P = 0 \quad (5-21)$$

このようにコンデンサもエネルギーを蓄えたり放出したりするだけで、エネルギーは消費しない。

次に、抵抗、コイル、コンデンサの直列回路を考える。

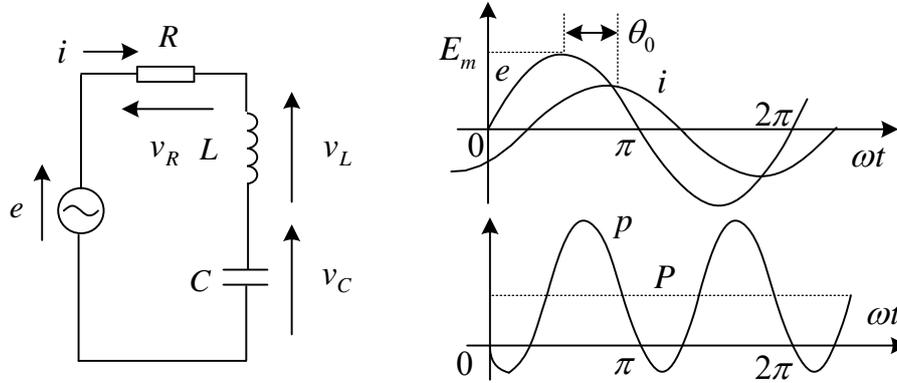


図 5-6 RLC 回路と電流，瞬時電力波形（電流が遅れる場合）

図 5-6 の RLC 回路で，電源電圧が，

$$e = E_m \sin \omega t \quad (5-22)$$

のとき，流れる電流を求める。各素子の電圧は，

$$\text{抵抗： } v_R = R i \quad (5-23)$$

$$\text{コイル： } v_L = L \frac{di}{dt} \quad (5-24)$$

$$\text{コンデンサ： } i = C \frac{dv_C}{dt} \quad \therefore v_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad (5-25)$$

である。キルヒホッフの第二法則より，

$$E_m \sin \omega t = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (5-26)$$

が成立する。これを解くと電流が求まる（第 15 章に詳しい）。ここでは，定常状態の電流を

$$i = I_m \sin(\omega t - \theta_0) \quad (5-27)$$

と仮定して，振幅  $I_m$  と初期位相  $\theta_0$ （どちらも定数）を求めよう。(5-27)を(5-26)に代入し，(5-26)の右辺第 3 項の積分は定常状態では初期値の項（積分定数の項）は 0 と考えてよいので

$$\begin{aligned} E_m \sin \omega t &= R I_m \sin(\omega t - \theta_0) + \omega L I_m \cos(\omega t - \theta_0) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \theta_0) \\ &= R I_m \sin(\omega t - \theta_0) + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \cos(\omega t - \theta_0) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} I_m \sin(\omega t - \theta_0 + \varphi) \quad \text{但し, } \tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

(三角関数の合成公式を使う。付録参照)

両辺を比べて、 $I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ ,  $\theta_0 = \varphi$

よって求める電流は、次式となる。

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \theta_0) \quad \text{但し, } \tan \theta_0 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5-28)$$

実効値は最大値を $\sqrt{2}$ で割って、

$$I_e = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \text{ただし, } E_e \equiv \frac{E_m}{\sqrt{2}} : \text{実効値}$$

ここで、

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (5-29)$$

は、**インピーダンス** (の大きさ) と呼ばれる。単位は、 $\Omega$  である。 $\omega L > 1/(\omega C)$  のとき、 $\theta_0 > 0$  であり、図 5-6 に示すように、電流は電源電圧に対して $\theta_0$ だけ遅れる。 $\theta_0 < 0$  の場合には、 $|\theta_0|$  だけ電流が進むことになる。(5-28)は $\theta_0$ の正負に関係なくどちらでも成り立つ。

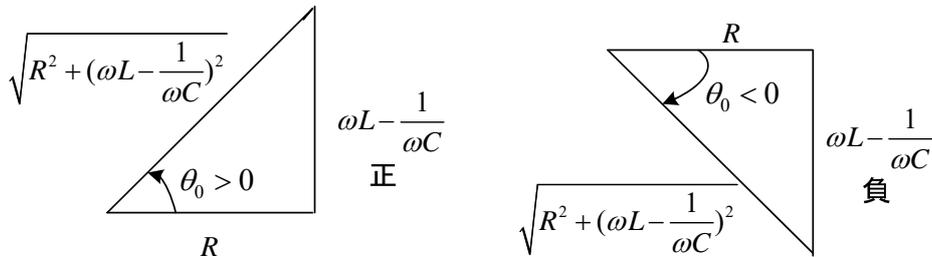


図 5-7 位相差 $\theta_0$

次に、電源が供給する瞬時電力 $p$ と、その平均値 $P$ を求める。瞬時電力は

$$p = ei = E_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \theta_0) = \frac{1}{2} E_m I_m (\cos \theta_0 - \sin(2\omega t - \theta_0)) \quad (5-30)$$

である。この平均電力 $P$ は、右辺第 2 項の平均が 0 だから実効値を用いると次式となる。

$$P = E_e I_e \cos \theta_0 \quad (5-31)$$

$\cos \theta_0$  は**力率**と呼ばれている。交流回路の電力については、第 8 章で詳しく学ぶ。

以上のように、定常解を仮定して微分方程式に代入し、大きさと位相を決めることで電流が求まったが、回路が複雑になるとこの方法は面倒である。そこで、一般にはフェーザを使った方法が用いられている。だけど試験には出すことがある。

# 第6章 フェーザによる交流回路の計算 I

交流回路の定常状態を解析する場合によく用いられる**交流理論**がある。これは、電圧と電流を**フェーザ表示**して計算するもので、三角関数を使った計算に比べて簡単である。この章では、フェーザ（複素数）を用いた電源や回路素子の基本的関係式を導く。

## ○ 複素数の重要公式



交流理論に入る前に複素数(complex number)の最重要公式を示しておく。応用範囲も広いので全てしっかり記憶して欲しい。

(1) **オイラーの公式**  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  (6-1)

$e = 2.71828\dots$ （自然対数の底）で、 $i$ は電流の記号として使うから、**虚数単位**には必ず  $j$  を使うこと。オイラーの公式は数学の**至宝**とされている。映画“博士の愛した数式”に  $e^{j\pi} = \cos \pi + j \sin \pi = -1$  が出た。**虚数単位**は  $j = \sqrt{-1}$  で  $j^2 = -1$  が成り立つ。

(2) 複素数の表現法

複素数の表現法としては、**実部(Real part)**と**虚部(Imaginary part)**の和として表す**直交形式**（直角座標表示）と大きさと角度で表現する**極形式**（極座標表示）などがある。

$V = a + jb$  : **直交形式** ( $\text{Re}(V) = a, \text{Im}(V) = b$ ) (6-2)

$= r(\cos \theta + j \sin \theta)$  : **極形式** (6-3)

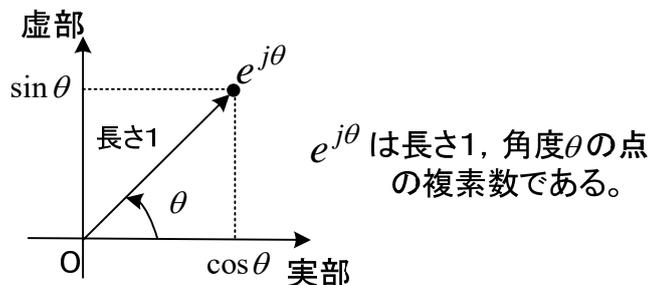
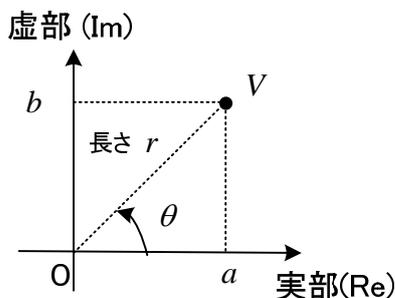
$= r e^{j\theta}$  : **指数関数形式**（極形式とも言われる） (6-4)

$= r \angle \theta$  : **フェーザ形式** (6-5)

**絶対値**(absolute value)または**大きさ**  $r \quad r \equiv |V| = \sqrt{a^2 + b^2}$  (6-6)

**偏角**(argument)  $\theta \quad \theta \equiv \arg V = \tan^{-1} \frac{b}{a}$  (**アークタンジェントと読む**) (6-7)

図より、 $r e^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + j \sin \theta) = a + jb$  が成立することが判る。



**絶対値**  $|e^{j\theta}| = 1, \quad \text{偏角 } \arg e^{j\theta} = \theta$

(3) 和

$$V_1 = a + jb$$

$$V_2 = c + jd$$

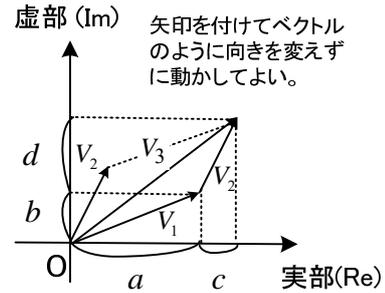
のとき、

$$V_1 + V_2 = a + c + j(b + d) = V_3 \quad (6-8)$$

で、図の様になる。

差は、 $V_2 = V_3 - V_1$

$$\text{大きさ } |V_3| \leq |V_1| + |V_2| \quad |V_1 + V_2| \neq |V_1| + |V_2|, \quad \text{角度 } \arg V_3 \neq \arg V_1 + \arg V_2$$



\* 和, 差の演算はベクトルと同じなので, 複素数だけ矢印をつけて表現することが多い。  
矢印をつけた複素数は向きを変えないなら自由に動かしても構わない。

(4) 積  $V_1 = |V_1|e^{j\theta_1}, V_2 = |V_2|e^{j\theta_2}$  とすると,  $V_1 V_2 = |V_1| |V_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$

すなわち,  $|V_1 V_2| = |V_1| |V_2| \quad (6-9)$

$$\arg(V_1 V_2) = \arg(V_1) + \arg(V_2) \quad (6-10)$$

ここで,  $\arg(V_1) = \theta_1, \arg(V_2) = \theta_2$

オイラーの公式を使って, 以下の関係が成り立っている。

$$\begin{aligned} e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} &= (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + j (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

(4) 商  $V_1 = |V_1|e^{j\theta_1}, V_2 = |V_2|e^{j\theta_2}$  とすると,  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{|V_1|}{|V_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

すなわち,  $\frac{|V_1|}{|V_2|} = \frac{|V_1|}{|V_2|} \quad (6-11)$

$$\arg\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \arg(V_1) - \arg(V_2) \quad (6-12)$$

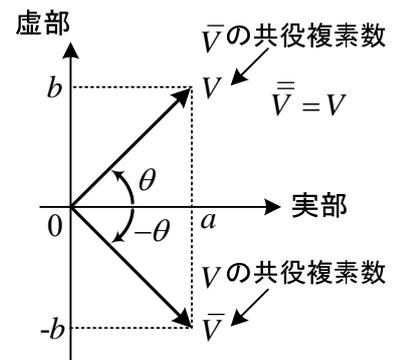
(5) 共役複素数 きょうやく

$$\bar{V} = \overline{a + jb} = a - jb = |V| e^{-j\theta} \quad (6-13)$$

$$\bar{V} V = |V|^2 \quad (6-14)$$

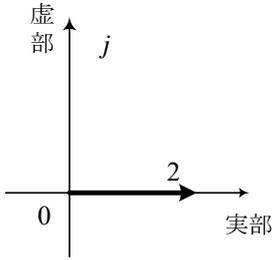
$$\overline{V_1 V_2} = \bar{V}_1 \bar{V}_2 \quad (6-15)$$

共役複素数は  $j$  の前にマイナスをつけるだけ!



例題 1 次の複素数を図示せよ。また、指数関数形式を求めよ。

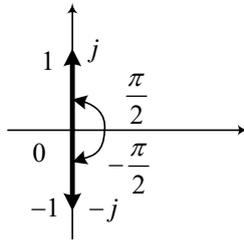
$$2, j, -j, 1+j, 1+j\sqrt{3}, 1-j\sqrt{3}, 3+j4$$



長さ 2

偏角 0rad

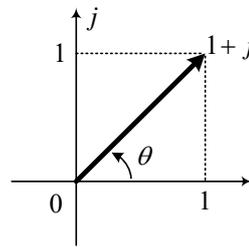
$$2 = 2e^{j0}$$



長さ 1

偏角  $\pi/2, -\pi/2$  rad

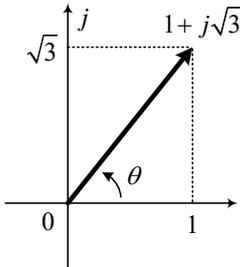
$$j = 1e^{j\pi/2} = e^{j\pi/2}, \quad -j = 1e^{-j\pi/2} = e^{-j\pi/2}$$



長さ  $|1+j| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

偏角  $\theta = \pi/4$  rad

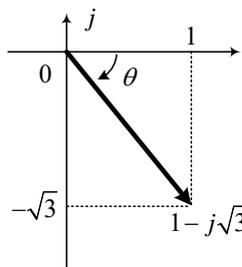
$$1+j = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$$



長さ  $|1+j\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

偏角  $\theta = \pi/3$  rad

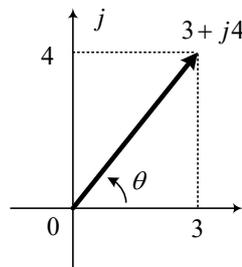
$$1+j\sqrt{3} = 2e^{j\pi/3}$$



長さ  $|1-j\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$

偏角  $\theta = -\pi/3$  rad

$$1-j\sqrt{3} = 2e^{-j\pi/3}$$



長さ  $|3+j4| = \sqrt{9+16} = 5$

偏角  $\theta = \tan^{-1}(4/3)$  [rad]

$$3+j4 = 5e^{j\theta}$$

図の  $\theta = \tan^{-1} x$  (アークタンゼント  $x$ ) のグラフより  $x$  の値に対し  $\theta$  は 1 つには決らない。そこで

$a+jb$  のとき、 $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$  と書いておいた方がよい ( $b/a$  を計算せずそのまま書く)。

$\tan^{-1} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \tan^{-1} \frac{-1}{-1} = \frac{5\pi}{4}$  を意味する。

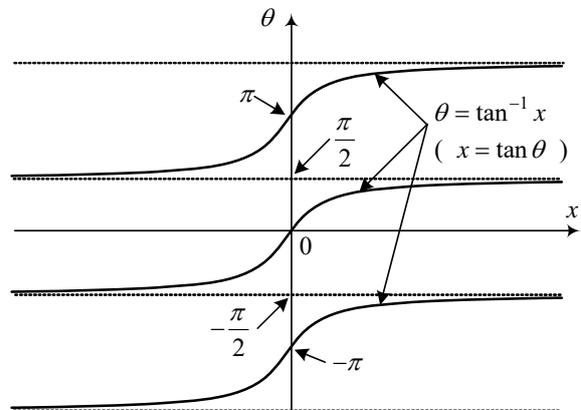
数値計算(プログラム)では、次の関数を使う。

FORTRAN: DATAN2(b,a), C 言語: atan2(b,a)

Excel: atan2(a,b) \* 確認のこと\*

但し、 $a, b$  は倍精度変数とする。

電卓には  $\tan^{-1} x$  の関数しかないから、答えは  $-\pi/2$  から  $\pi/2$  の範囲なので、何象限の角かを考え、答えに  $\pm\pi$  しないとイケない。



例題 2 以下の式を計算せよ。

$$|e^{j\theta}|, \left| \frac{1+j}{3+j4} \right|, |(1+j)e^{j\theta}|, |(1+j)(3+j4)|, \left( \frac{\sqrt{3}+j}{2} \right)^{12}, \arg \left\{ \frac{(1+j)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right\}$$

(解)  $|e^{j\theta}| = |\cos \theta + j \sin \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \left| \frac{1+j}{3+j4} \right| = \frac{|1+j|}{|3+j4|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$$|(1+j)e^{j\theta}| = |1+j||e^{j\theta}| = \sqrt{2}, \quad |(1+j)(3+j4)| = |1+j||3+j4| = 5\sqrt{2}$$

$$\left( \frac{\sqrt{3}+j}{2} \right)^{12} = \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right)^{12} = (e^{j\pi/6})^{12} = e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1$$

$$\arg \left\{ \frac{(1+j)\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{j\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \right\} = \arg(1+j) + \arg\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arg j - \arg\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

例題 3  $z^3 = 1$  を解け

(解)  $z = r e^{j\theta}$  とおくと ( $r > 0$ )

$$z^3 = r^3 e^{j3\theta} = r^3 (\cos 3\theta + j \sin 3\theta) = 1$$

従って,  $r = 1$ ,  $3\theta = 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

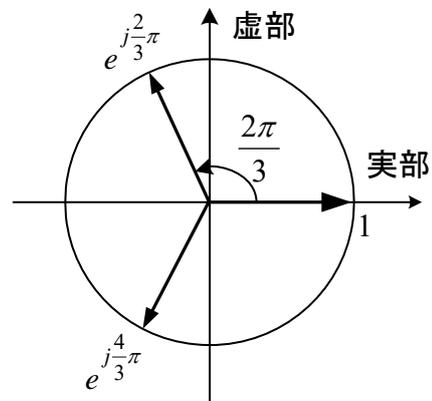
$$\therefore \theta = \frac{2}{3}n\pi$$

$n = 0$  のとき,  $z = e^{j0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1$

$n = 1$  のとき,  $z = e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos \frac{2}{3}\pi + j \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n = 2$  のとき,  $z = e^{j\frac{4}{3}\pi} = \cos \frac{4}{3}\pi + j \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

( $n = 3$  以上の場合, 根は上のいずれかになる)



例題 4 複素数  $z$  に, (1)  $e^{j\frac{\pi}{2}}$  (2)  $e^{-j\frac{\pi}{2}}$  (3)  $j$  (4)  $\frac{1}{j}$  を掛けると,  $z$  はどう動くか。

(1) 反時計方向に 90 度回転 (2) 時計方向に 90 度回転 (3)(1) と同じ (4)(2) と同じ

\*後でよく使うから, 覚えておこう。

## ○ フェーザ表示（ベクトル表示）の定義

角周波数  $\omega$  が等しく、振幅や初期位相だけが異なる三角関数の加算や減算は**フェーザ**(phasor) に直して計算することができる。一般に幾つかの正弦波交流電源（角周波数  $\omega$  は同じとする）からなる交流回路では、どこの電圧や電流も定常状態では同じ角周波数  $\omega$  の正弦波となる。従ってこれらの電圧や電流（三角関数）を**フェーザ**（複素数）に直して計算する**交流理論**が生まれた。

瞬時値  $a(t)$  の**フェーザ表示**  $A$  の定義

$$\text{瞬時値： } a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \text{フェーザ： } A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} \quad (6-16)$$

$\Leftrightarrow$  は瞬時値をフェーザに直す場合とその逆の場合もあることを意味する。

瞬時値  $a(t)$  は、電圧  $v(t)$  や電流  $i(t)$  に対応する。振幅  $A_m$  は正である。

例、 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ 、ファイ  $\varphi$  は初期位相（定数）で、5章では  $\theta_0$  とした。

$$\cdot \quad a(t) = \text{Im}(\sqrt{2} A e^{j\omega t}) \quad (6-17)$$

の関係がある。



$$\text{証明) } \text{Im}(\sqrt{2} A e^{j\omega t}) = \text{Im}(A_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}) = \text{Im}(A_m e^{j(\omega t + \varphi)})$$

$$= \text{Im}(A_m \cos(\omega t + \varphi) + j A_m \sin(\omega t + \varphi))$$

$$= A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ここで、 $\text{Im}(\ )$  は虚部(Imaginary Part)をとることを意味する。実部は Real Part です。

$$\cdot \quad \text{瞬時値： } a(t) = \sqrt{2} A_e \sin(\omega t + \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \text{フェーザ： } A = A_e e^{j\varphi} \quad (\text{定義より})$$

$$|A| = |A_e| |e^{j\varphi}| = A_e > 0, \quad \arg A = \varphi \quad (\text{正とは限らない}) \quad (6-18)$$

であり、フェーザの絶対値が電圧や電流の実効値  $A_e$ （これが交流電圧計や交流電流計の読みである）に等しく、フェーザの偏角は、初期位相に等しい。大変重要なことである。

・ フェーザは複素数であるから、はっきり示すため  $A$  の代わりに  $\dot{A}$  を使うテキストもある。

・  $a(t) = \sqrt{2} A_e \cos(\omega t + \varphi)$  のフェーザを  $A = A_e e^{j\varphi}$  と定義してもよいが、本書は(6-16)とする。

$$\text{公式1： } a(t) \Leftrightarrow A \text{ のとき } \frac{d a(t)}{d t} \Leftrightarrow j \omega A \quad (6-19)$$

$$(\text{証明}) \quad \frac{d a(t)}{d t} = \frac{d}{d t} \{ A_m \sin(\omega t + \varphi) \} = \omega A_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega A_m \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega A_m}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \frac{j \omega A_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = j \omega A$$

**公式2:**  $a_1(t) = A_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$  のフェーズは  $A_1 = \frac{A_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_1}$

$a_2(t) = A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2)$  のフェーズは  $A_2 = \frac{A_{m2}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_2}$

このとき,  $a_1(t) \pm a_2(t) \rightleftharpoons A_1 \pm A_2$  (6-20)

(注)  $a_1(t)a_2(t) \rightleftharpoons A_1A_2$  は成立しない。

(証明)  $a_1(t) + a_2(t) = \text{Im}(\sqrt{2}A_1 e^{j\omega t}) + \text{Im}(\sqrt{2}A_2 e^{j\omega t})$

$$= \text{Im}(\sqrt{2}(A_1 + A_2) e^{j\omega t})$$

よって, (6-17)から  $a_1(t) + a_2(t)$  のフェーズが  $A_1 + A_2$  になっていることが判る。

(注)  $a_1(t)a_2(t) = \text{Im}(\sqrt{2}A_1 e^{j\omega t}) \text{Im}(\sqrt{2}A_2 e^{j\omega t})$

$$\neq \text{Im}(\sqrt{2}(A_1 A_2) e^{j\omega t})$$

何故なら,  $\text{Im}(\sqrt{2}(A_1 A_2) e^{j\omega t}) = \text{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} A_{m1} A_{m2} e^{j(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} A_{m1} A_{m2} \sin(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \neq a_1(t) a_2(t)$$

(6-20)のように, 角周波数の等しい三角関数の加算(減算)のフェーズはそれぞれのフェーズの加算(減算)に等しい。従って, **キルヒホッフの法則は, 瞬時電圧や瞬時電流(これらは交流の定常状態では同じ周波数の正弦波)の和, 差に関する式だから, フェーズについても成立することが言える。**ただし, 瞬時値の積や商は, フェーズ表示できない。従って, 電圧と電流の積である瞬時電力のフェーズ表示はない(フェーズ表示ではないが第8章で複素電力という量を別に定義する)。

例題5 次の三角関数のフェーズ表示を求めよ。

1.  $\sin 2t$    2.  $\sin(3t + \frac{\pi}{3})$    3.  $100 \cos(\omega t + \varphi)$    4.  $\frac{d}{dt} \{100\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)\}$

(答) 1.  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$    2.  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}}$    3. 与式  $= 100 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$  であるから、

$$\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \frac{100}{\sqrt{2}} j e^{j\varphi} \quad 4. \quad j\omega 100 e^{j\varphi} \quad (\text{公式1利用})$$

例題 6 フェーザ表示が次式で与えられているとき、瞬時値を求めよ。角周波数は $\omega$ とする。

$$1. 100e^{j\frac{\pi}{3}} \quad 2. 2 \quad 3. j \quad 4. 1+j \quad 5. \frac{1+j}{1+j\sqrt{3}}$$

(答) 1.  $100\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$     2.  $2 = 2e^{j0}$  より,  $2\sqrt{2}\sin\omega t$

3.  $j = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$  より,  $\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$     4.  $1+j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$  より,  $2\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

5.  $\frac{1+j}{1+j\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{2e^{j\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{12}}$  より,  $\sin(\omega t - \frac{\pi}{12})$

例題 7 フェーザ表示を用いて次の計算をせよ。

$$2\sqrt{2}\sin(3t - \frac{\pi}{3}) + \frac{d}{dt} \frac{\sqrt{2}}{3}\sin(3t - \frac{\pi}{6})$$

(答) 各項をフェーザに直して( $\omega=3$ )

$$\begin{aligned} 2e^{-j\frac{\pi}{3}} + \frac{j3}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} &= 2(\cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3}) + j(\cos\frac{\pi}{6} - j\sin\frac{\pi}{6}) \\ &= 2(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) + j(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

瞬時値にもどして、与式 =  $\sqrt{6}\sin(3t - \frac{\pi}{6})$

問題 1 次の計算をフェーザに直し、さらに瞬時値にもどすことで行え。

$$\sin\omega t + \cos\omega t$$

(答) フェーザ  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}}$     瞬時値  $\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$

問題 2 次の計算をフェーザに直し、さらに瞬時値にもどすことで行え。

$$\sin\omega t + \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3})$$

(答) フェーザ  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + e^{j\frac{2}{3}\pi} + e^{j\frac{4}{3}\pi}) = 0$

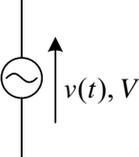
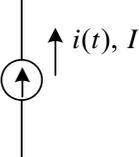
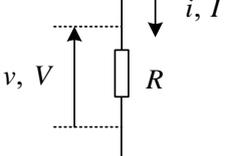
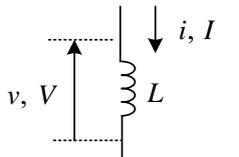
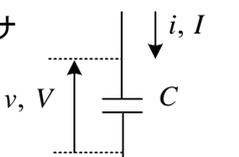
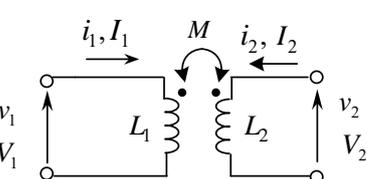
(ベクトルで表した力のつり合いと同様、例題 3 をみよ。)

$$\therefore \sin\omega t + \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \sin(\omega t + \frac{4\pi}{3}) = 0$$

○ フェーザによる交流回路の計算 (交流理論)

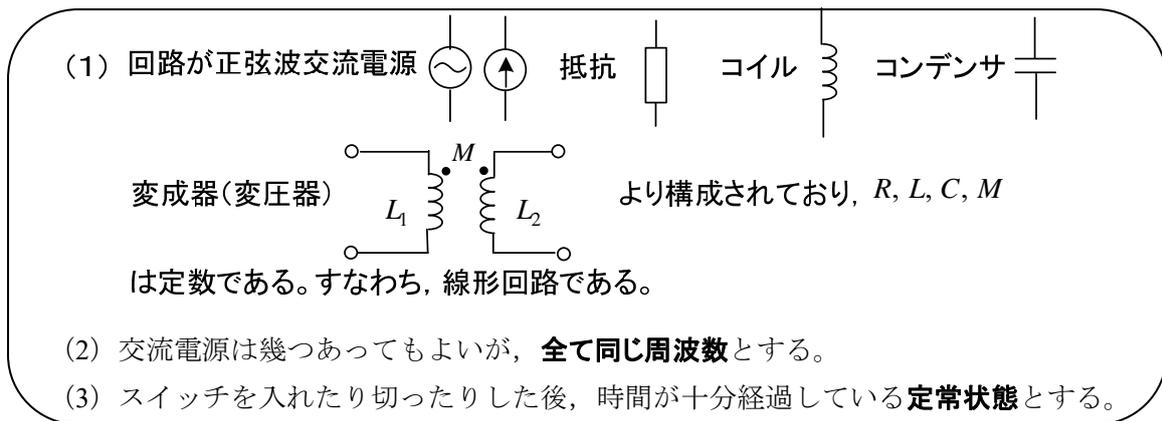
電源と素子のフェーザ表示を以下に示す。



	瞬時値 (常に成立)	フェーザ (交流定常の解析)
交流電圧源 または交流電圧 	$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ $\phi: \text{フアイ (初期位相一定)}$	$V = \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$
交流電流源 または交流電流 	$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$ $\phi: \text{フアイ (初期位相一定)}$	$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$
抵抗 	$v(t) = R i(t)$	$V = R I$ $Z = R$
コイル 	$v(t) = L \frac{d i(t)}{d t}$ <p>鎖交磁束 <math>Li</math> の変化が電圧になる。</p>	$V = j\omega L I$ $Z = j\omega L$
コンデンサ 	$i(t) = C \frac{d v(t)}{d t}$ <p>電荷 <math>Cv</math> の変化が電流になる。</p>	$V = \frac{I}{j\omega C}$ $Z = \frac{1}{j\omega C}$
変成器 (変圧器) 	$v_1(t) = L_1 \frac{d i_1(t)}{d t} + M \frac{d i_2(t)}{d t}$ $v_2(t) = M \frac{d i_1(t)}{d t} + L_2 \frac{d i_2(t)}{d t}$	$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$ $V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$

- (注意) (1) 抵抗, コイル, コンデンサ, 変成器で, 電圧や電流の矢印を図と逆に定義すると, その量の前にマイナスをつけること。  $d/dt \rightarrow j\omega$  に対応((6-19)参照)
- (2) キルヒホッフの法則は, 電圧, 電流の加算, 減算であるから, フェーザについても そのまま成立する。 フェーザの絶対値が実効値でメータの読みである。
- (3)  $Z$  はインピーダンスと呼ばれ,  $Z = V/I$  で定義される。まず,  $Z$  を覚えよ。

交流理論が使えるのは以下の場合である。



- (2) 交流電源は幾つあってもよいが、**全て同じ周波数**とする。
- (3) スイッチを入れたり切ったりした後、時間が十分経過している**定常状態**とする。

従って、以下の場合には、交流理論は直接使えない。しかし、他の理論と交流理論を組み合わせて問題を解く場合が多い。その点でも交流理論は大変重要なのである。

- (a) 回路が直流電源と交流電源からなる。(重ね合わせの理を使う。12章)
- (b) 交流だが正弦波でない電源である。(フーリエ級数と重ね合わせの理を使う。14章)
- (c) 周波数の異なる電源がつながっている。(重ね合わせの理を使う。14章)
- (d) 回路のパラメータ  $R, L, C, M$  が電圧や電流で変化する(非線形回路)。(コンピュータによる数値積分を利用するしか手が無い。数値解析)

- (e) 回路に半導体素子(ダイオード、トランジスタ)が含まれている。

(動作点に対して、微小な信号の変化については交流理論が使える。電子回路)

- (f) 回路のスイッチを入れたり、切ったりした後(過渡状態)である。  
(微分方程式を解く必要がある。このとき交流電源なら交流理論も使う。15章)

$R, L, C, M$  (理想変成器含む) は素子に流入する平均電力が負にならないので、**受動素子**と呼ばれる。平均電力が負になる素子は**能動素子**と呼ばれ負性抵抗(非線形抵抗を小信号で使用した場合)、トランジスタなどがある(電源は通常能動素子に入れない)。

例題8 フェーザ表示の定義を用いて、抵抗、コンデンサに関するフェーザの式を導出せよ。

(解) 各素子の電圧を  $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$  とする。定義よりフェーザは  $V = V_m e^{j\phi} / \sqrt{2}$

- (1) 抵抗については、オームの法則より  $i = v / R = (V_m / R) \sin(\omega t + \phi)$

$$\text{電流のフェーザ表示は } I = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} e^{j\phi} = \frac{V}{R}$$

- (2) コンデンサの電流は、 $i = C \frac{dv}{dt} = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi) = \omega C V_m \sin(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$

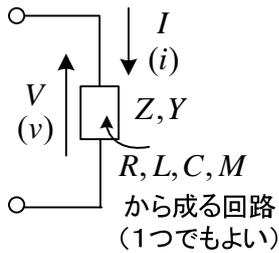
$$\text{電流のフェーザ表示は } I = \frac{\omega C V_m}{\sqrt{2}} e^{j(\phi + \frac{\pi}{2})} = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{V_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi} = j\omega C V$$

\* コイルについては、電流の瞬時値を定義して電圧を求め、フェーザに直すとよい。

## 第7章 フェーザによる交流回路の計算 II

フェーザを使った交流回路の計算で、インピーダンスやアドミタンスの計算、分圧と分流、瞬時値とフェーザの関係、誘導性負荷と容量性負荷を中心に述べる。

### ○ インピーダンスとアドミタンスの定義



$R, L, C, M$  から成る回路（電源はなし）があって、交流電圧と電流の瞬時値をそれぞれ  $v(t), i(t)$  とする。 $v, i$  のフェーザ表示をそれぞれ  $V, I$  とするとき、**インピーダンス**(impedance)  $Z$ 、**アドミタンス**(admittance)  $Y$  は次式で定義される。

$$Z \equiv \frac{V}{I}, \quad Y \equiv \frac{I}{V} \quad (7-1)$$

$Z, Y$  は、 $V, I$  を逆方向の矢印として定義していることに注意せよ。向きが図と逆だと、その分マイナスがつく。定義式より、 $Z = 1/Y$  である。また、インピーダンスはフェーザ  $V, I$  に対して定義されており、瞬時値  $v, i$  に対しては定義されていない。よって、 $v(t) = Z i(t)$  とか、 $Z = v(t)/i(t)$  のような式を書いてはいけない。アドミタンスも同じこと。更に、 $Z$  や  $Y$  は一般にフェーザ（複素数）であるが、これの瞬時値表示というものは無い。

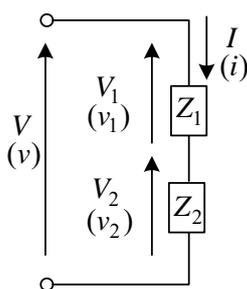
インピーダンス  $Z$  の実部を  $R_e$ 、虚部を  $X_e$  で表わし、それぞれ**抵抗分**、**リアクタンス（分）**(reactance)と呼ぶ。アドミタンス  $Y$  も同様に**コンダクタンス**(conductance)  $G$ 、**サセプタンス**(susceptance)  $B$  と呼ぶ。 $R_e, X_e$  の単位は  $\Omega$ 、 $G, B$  の単位は S (siemens ジーメンズ) である。

$$Z = R_e + jX_e \quad (7-2)$$

$$Y = G + jB \quad (7-3)$$

$R_e \geq 0, G \geq 0$  であるが、 $X_e, B$  は素子によって正、負がある。

### ○ 直列接続



瞬時値について、 $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$  が成立する。これをフェーザ表示すると、(6-20)より加算の場合はそのままフェーザ表示できるから、

$$V = V_1 + V_2 \quad (7-4)$$

である。インピーダンスの定義より、

$$V_1 = Z_1 I \quad V_2 = Z_2 I \quad (7-5)$$

(7-4), (7-5)より

$$V = (Z_1 + Z_2)I \quad (7-6)$$

従って、**合成インピーダンス**は、

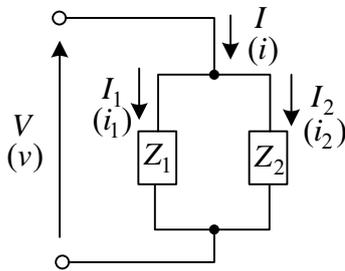
$$Z = Z_1 + Z_2 \quad (3 \text{ つ直列 } Z = Z_1 + Z_2 + Z_3) \quad (7-7)$$

また、(7-5), (7-6)より

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}V, \quad V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}V \quad (7-8)$$

となる。これは、 $V_1, V_2$ がインピーダンスの比に**分圧**されることを意味する。

### ○ 並列接続



瞬時値について、 $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$  が成立する。これをフェーザ表示すると、(6-20)より

$$I = I_1 + I_2 \quad (7-9)$$

であり、インピーダンスの定義より、

$$V = Z_1 I_1, \quad V = Z_2 I_2 \quad (7-10)$$

(7-9), (7-10)より

$$I = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) V \quad (7-11)$$

よって**合成インピーダンス** $Z$ は、

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{または,} \quad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (3 \text{ つ並列 } \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}) \quad (7-12)$$

となる。また、(7-10), (7-11)より

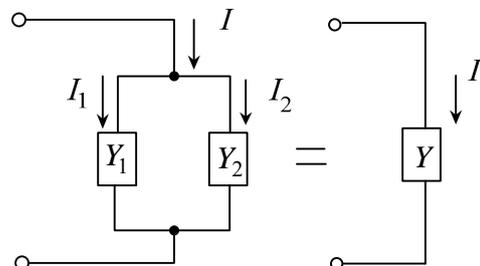
$$I_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I, \quad I_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I \quad (7-13)$$

これは、 $I_1, I_2$  が、インピーダンスの逆数比に**分流**されることを意味する。アドミタンス  $Y = 1/Z, Y_1 = 1/Z_1, Y_2 = 1/Z_2$  を用いると(7-12), (7-13)は次のように表現できる。**並列回路のアドミタンスは各素子のアドミタンスの和**である (この関係は、3つ以上の素子にも拡張できる)。

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad (7-14)$$

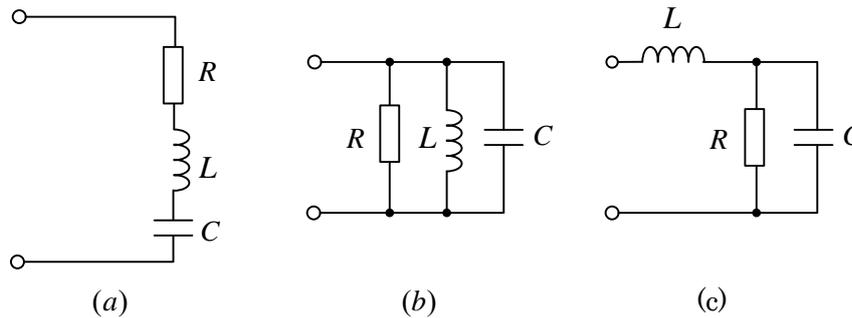
$$(3 \text{ つ並列なら } Y = Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

$$I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} I, \quad I_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} I \quad (7-15)$$



以上の式は形の上では抵抗だけの直流回路の式と全く同じである。もちろん矢印についても。従って、覚えるのに苦勞はしない。しかし、抵抗だけの直流回路が実際の瞬時電圧や瞬時電流の関係であるのに対し、交流回路では、フェーザ表示された電圧や電流の関係であることを忘れないでいただきたい。フェーザを使う利点は、交流回路が直流回路のように計算できる点にある。

例題1 図の回路のインピーダンス(抵抗分  $R_e$  とリアクタンス分  $X_e$ )とアドミタンス(コンダクタンス  $G$  とサセプタンス  $B$ )を求めよ。ただし、電源の角周波数を  $\omega$  とする。



(a) 直列回路の合成インピーダンス  $Z$  は各素子のインピーダンスの和だから

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \therefore R_e = R, X_e = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

アドミタンス  $Y$  はインピーダンス  $Z$  の逆数なので

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{R_e + jX_e} = \frac{R_e - jX_e}{(R_e + jX_e)(R_e - jX_e)} = \frac{R_e - jX_e}{R_e^2 + X_e^2} \quad \text{より}$$

$$G = \frac{R_e}{R_e^2 + X_e^2}, B = \frac{-X_e}{R_e^2 + X_e^2}$$

(b) 並列回路の合成アドミタンス  $Y$  は各素子のアドミタンスの和だから

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\therefore G = \frac{1}{R}, B = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

インピーダンス  $Z$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{(G + jB)(G - jB)} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} \quad \text{より}$$

$$R_e = \frac{G}{G^2 + B^2}, X_e = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

(c)  $RC$  並列回路に  $L$  が直列につながっているから、合成インピーダンス  $Z$  は

$$Z = j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} = j\omega L + \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}\right)$$

$$\therefore R_e = \frac{R}{1 + (\omega CR)^2}, X_e = \omega L - \frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}$$

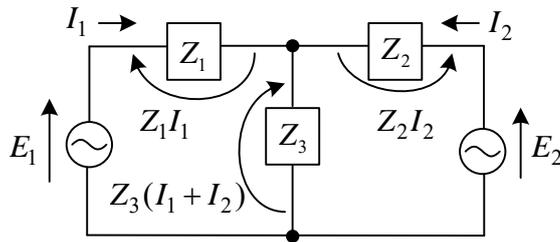
アドミタンス(コンダクタンス  $G$  とサセプタンス  $B$ )は、インピーダンス  $Z = R_e + jX_e$  を用いて、(a)と同様に求まる。

$$\begin{aligned} \frac{c + jd}{a + jb} &= \frac{(c + jd)(a - jb)}{(a + jb)(a - jb)} \\ &= \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + j \frac{da - cb}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

共役複素数を掛けると、実部と虚部に分離できるよ。



例題 2 図の回路で、電源電圧のフェーザとインピーダンス  $Z_1, Z_2, Z_3$  が与えられている。電流のフェーザ  $I_1, I_2$  を求めよ。



$I_1, I_2$  は枝電流と呼ばれる。

(解) キルヒホッフの電圧則より

$$E_1 = (Z_1 + Z_3)I_1 + Z_3I_2 \quad \text{①}$$

$$E_2 = Z_3I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \quad \text{②}$$

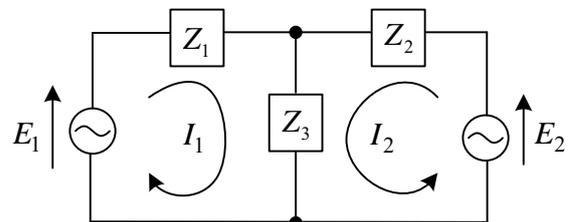
行列表示して、

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

クラメル公式より

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & Z_3 \\ E_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_2 + Z_3)E_1 - Z_3E_2}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_3Z_2}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & E_1 \\ Z_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}} = \frac{(Z_1 + Z_3)E_2 - Z_3E_1}{Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_3Z_2}$$



こう書くと  $I_1, I_2$  は閉路電流と呼ばれる。

(注 1) この問題には前提条件がある。それは、交流電源  $E_1, E_2$  の角周波数  $\omega$  は両者で等しいということである。周波数が異なるとフェーザ表示が違う意味になり、チャンポンにして演算はできない(そのような場合は第 14 章で解く)。また、具体的な抵抗, キャパシタンス, インダクタンスが与えられたら,  $Z = R, 1/j\omega C, j\omega L$  などとすればよい。

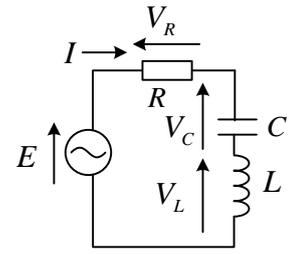
(注 2) 閉路電流を用いるとキルヒホッフの電流則が自動的に入るので①, ②をすぐ書ける。枝電流を用いると  $Z_3$  の枝電流が  $I_1 + I_2$  であることを使って, ①, ②が導ける。この場合はたまたま  $Z_1, Z_2$  に流れる枝電流  $I_1, I_2$  と閉路電流が等しい。閉路電流は, 一巡する電流なので  $Z_3$  に流れる電流も含んでおり, これで電流則が不要となる。

## ○ フェーザ図

$$\text{電源電圧の瞬時値が } e(t) = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi) \quad (7-16)$$

ここで、 $E_e$  : 実効値 (正),  $\varphi$  : 初期位相 (定数)  
 のとき、 $e(t)$  のフェーザ  $E$  は

$$E = E_e e^{j\varphi} \quad (E \text{ は } \varphi \text{ の向き}) \quad (7-17)$$



電流のフェーザ  $I$  は、インピーダンスに(6-4)を用いて指数関数形式に直すと

$$I = \frac{E_e e^{j\varphi}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{j(\varphi - \theta)}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (7-18)$$

( $I$  は  $E$  を時計方向に  $\theta$  だけ回転した向き。  $\theta < 0$  なら  $|\theta|$  だけ反時計方向に回す。)

また、各素子の電圧のフェーザには次の関係がある。

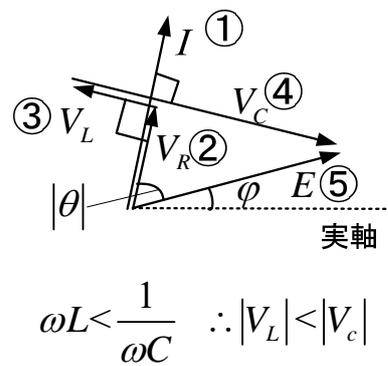
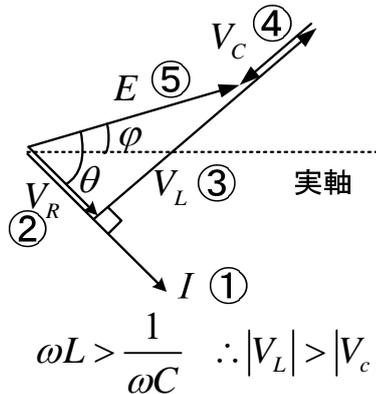
$$\text{抵抗: } V_R = RI \quad (R > 0 \text{ だからフェーザ図では } V_R \text{ は } I \text{ と同じ向き, 長さ } |V_R| = R|I|)$$

$$\text{コイル: } V_L = j\omega L I \quad (V_L \text{ は } I \text{ を } \pi/2 \text{ だけ反時計方向に回転, 長さ } |V_L| = \omega L|I|)$$

$$\text{コンデンサ: } V_C = \frac{I}{j\omega C} \quad (V_C \text{ は } I \text{ を } \pi/2 \text{ だけ時計方向に回転, 長さ } |V_C| = \frac{1}{\omega C}|I|)$$

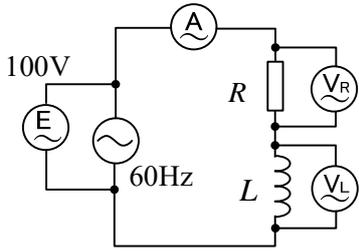
$$\text{電源電圧: } E = V_R + V_L + V_C \quad (\text{注意 長さ } |E| = |V_R| + |V_L| + |V_C| \text{ は成立しない。})$$

以上により、図のフェーザ図が得られる。向きと長さを変えなければフェーザは移動できる。



①②③④⑤の順に書いたら書きやすい。フェーザ図は、同じ向きとか、 $\pi/2$  だけ回転するとか、和や差によるフェーザ間の関係とか決まっていることを正確に書けばよい。 $\varphi, \theta$  も適当に書いている。 $I$  は  $E$  より遅れるか進むか考えて書き始める。時間の関係 (時間 0 の定義) が何も与えられていない場合には、電圧や電流のどれかの初期位相を 0 に選ぶ (時間の原点を決める) ことで、そのフェーザを正の実数(実軸)にすることが出来る (これを**基準フェーザ**と呼ぶ)。電流  $I$  を基準フェーザに選んで  $I$  を実軸に合わせると、フェーザ図が書きやすい。すると上記のフェーザ図で  $I$  を実軸に合わせるように全体を回転させたフェーザ図 (全体の関係は同じ) が得られる。この例では(7-16)で時間 0 を定義しているの、電流を実軸に選ぶことは一般性を失う。

例題 2 図のように、60Hz、100V の電源に、1Ω の抵抗と 10mH のコイルが直列につないである。交流電流計 (A) の読みと交流電圧計 (V<sub>R</sub>)、(V<sub>L</sub>) の読みを求めよ。

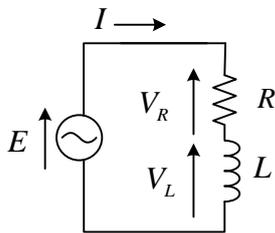


(注) 電圧 100V というのは実効値のことで、電圧計の読みと等しい。このように実効値と書かないことも多い。実効値はフェーザの絶対値である。一般に単位は全て SI 単位系に直して計算する (留意事項を参照)。

この問題では、電源電圧の大きさは 100 だが、初期位相が与えられていないので、電源電圧のフェーザは 1 つに決まらない。よって、電流の初期位相を 0 (基準フェーザ) と考えても問題ない。

(解) 電流計は導線、電圧計は抵抗の十分大きな絶縁物と考えてよいから次の回路で考える。

図より、電圧、電流のフェーザに対し次式が成立する。



$$E = V_R + V_L \quad \dots \textcircled{1}$$

$$V_R = RI \quad \dots \textcircled{2}$$

$$V_L = j\omega LI \quad \dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③より

$$I = \frac{E}{R + j\omega L} \quad \dots \textcircled{4}$$

④の絶対値をとり、電流の実効値を求める。商は別々に絶対値を計算できるから

$$|I| = \frac{|E|}{|R + j\omega L|} = \frac{|E|}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{100}{\sqrt{1 + (2 \times 3.14 \times 60 \times 0.01)^2}} = 25.7 \text{ A}$$

従って、(A) の読みは、25.7A である。

②と③の絶対値をとり、電圧の実効値を求める。積は別々に絶対値を計算できるから

$$|V_R| = |RI| = |R||I| = R|I| = 1 \times 25.7 = 25.7 \text{ V}$$

$$|V_L| = |j\omega LI| = |j||\omega||L||I| = \omega L|I| = 2 \times 3.14 \times 60 \times 0.01 \times 25.7 = 96.8 \text{ V}$$

よって、(V<sub>R</sub>) の読みは 25.7V、(V<sub>L</sub>) の読みは 96.8V である。

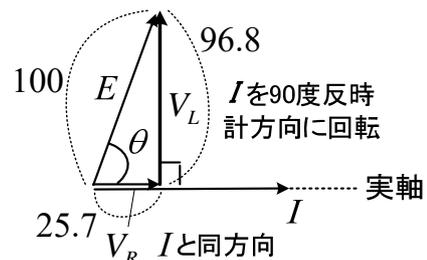


(V<sub>R</sub>) の読みと (V<sub>L</sub>) の読みの和は 100V になっていないよ。これは、①より

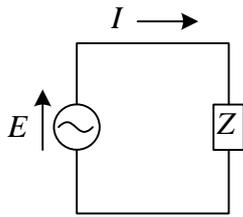
$$|E| = |V_R + V_L| \neq |V_R| + |V_L| \text{ であるから当然さ。}$$

$$|E| = 100, |V_R| = 25.7, |V_L| = 96.8$$

(各フェーザの大きさ) は直角三角形の各辺の長さに対応する。右図では問題に時間軸の定義がないので電流を基準フェーザ (実軸) に選んだ。



○ 誘導性負荷と容量性負荷



図の交流回路で、インピーダンス  $Z$  は一般に

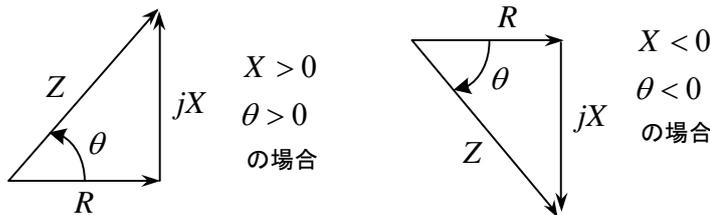
$$Z = R + jX \quad (7-19)$$

と書くことができる。ここで抵抗分  $R$  は常に正である。

$Z$  の偏角を  $\theta$  とおくと、

$$\theta = \arg Z = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad (7-20)$$

である。 $\theta$  はリアクタンス分  $X$  の正負により



$X > 0$  のとき  $\theta > 0$  であり、このときの  $Z$  を誘導性負荷(inductive load)という。

$X = 0$  のとき  $\theta = 0$  であり、このときの  $Z$  を純抵抗負荷という。

$X < 0$  のとき  $\theta < 0$  であり、このときの  $Z$  を容量性負荷(capacitive load)という。

インピーダンスの定義より、 $Z = \frac{E}{I}$  である。両辺の偏角をとると

$$\arg Z = \theta = \arg E - \arg I \quad (7-21)$$

となる。これは、電圧と電流の位相差が、インピーダンスの偏角と等しいことを示している。インピーダンスの偏角  $\theta$  が正のとき、 $I$  の偏角は  $E$  の偏角より小さく、 $I$  は  $E$  より  $\theta$  遅れるという。逆に、インピーダンスの偏角  $\theta$  が負のとき、 $I$  の偏角は  $E$  の偏角より大きく、 $I$  は  $E$  より  $|\theta|$  進むという。つまり偏角の大きい方が進んでいるという。

詳しく述べよう。電源電圧の瞬時値が  $e = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$  ① のとき、 $e$  のフェーザ  $E$  は

$$E = E_e e^{j\varphi} \quad \text{ここで、} E_e = |E| : \text{実効値, } \varphi = \arg E : \text{初期位相 (定数)}$$

電流のフェーザ  $I$  は、インピーダンスに(6-4)を用いて指数関数形式に直すと

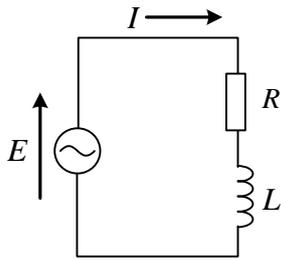
$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E_e e^{j\varphi}}{R + jX} = \frac{E_e e^{j\varphi}}{\sqrt{R^2 + X^2} e^{j\theta}} = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + X^2}} e^{j(\varphi - \theta)} \quad \text{ただし、} \theta = \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

フェーザ  $I$  を瞬時値  $i$  に直して、

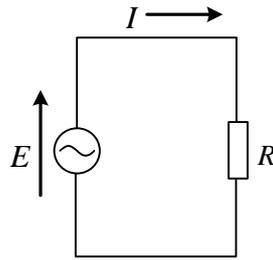
$$i = \frac{\sqrt{2}E_e}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta) \quad ②$$



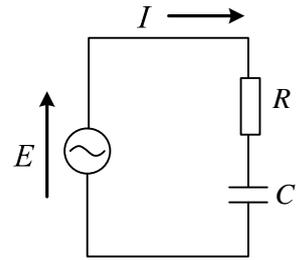
誘導性負荷



純抵抗負荷



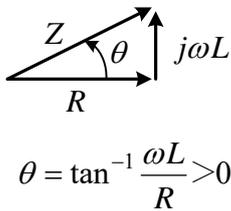
容量性負荷



インピーダンス  $Z$  とリアクタンス分  $X$

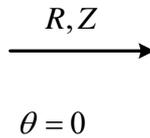
$$Z = R + j\omega L$$

$$X = \omega L > 0$$



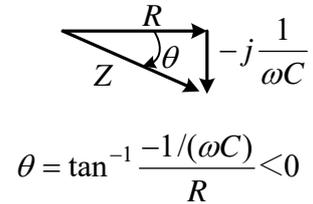
$$Z = R$$

$$X = 0$$

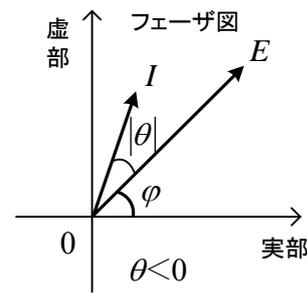
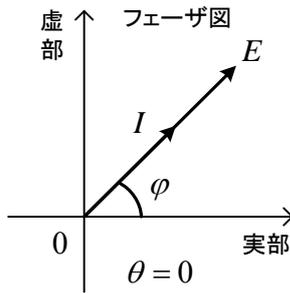
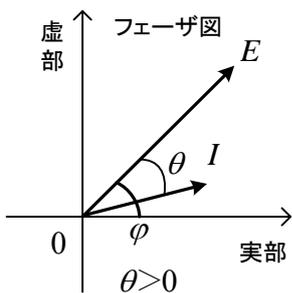
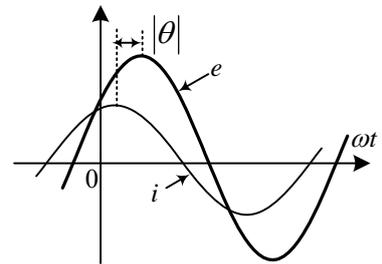
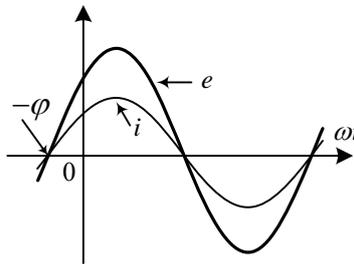
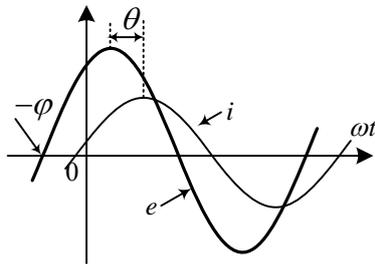


$$Z = R - j \frac{1}{\omega C}$$

$$X = -1/(\omega C) < 0$$



波形 (①, ②式より)



$I$  は  $E$  より  $\theta$  遅れる。

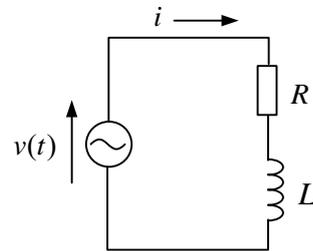
$I$  と  $E$  は同相。

$I$  は  $E$  より  $|\theta|$  進む。

リアクタンス分  $X$  の正負で  $\theta$  の正負が決る。  $\theta > 0$  だと電流の位相は電圧に対して  $\theta$  だけ遅れ、  $\theta < 0$  だと逆に  $|\theta|$  だけ進む。図の  $RL$  回路の波形を見ると、  $\omega t$  (時間に比例) が  $0$  より少し経過してから  $e$  は最大となり、それよりさらに  $\theta$  経過して  $i$  が最大なる。よって  $i$  は  $e$  より  $\theta$  遅れている。普通、遅れや進みは、電圧を基準に電流が遅れるか、進むかを言う。遅れ負荷といえは、誘導性負荷のことである。フェーザ図を見ただけで波形が頭の中にイメージできないといけない。

例題4 図の回路で、電源電圧が、 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin(120\pi t)$  [V] で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $R = 2 \Omega$ ,  $L = 1/(60\pi)$  H とする。単位を明記せよ。

- (1)  $v(t)$  の実効値はいくらか。
- (2)  $v(t)$  の周波数はいくらか。
- (3)  $v(t)$  のフェーザ  $V$  を求めよ。
- (4)  $R$ ,  $L$  回路のインピーダンス  $Z$  を求めよ。
- (5) 電流のフェーザ  $I$  を求めよ。
- (6) 電流の瞬時値  $i(t)$  を求めよ。
- (7)  $v(t), i(t)$  の略図を書け。



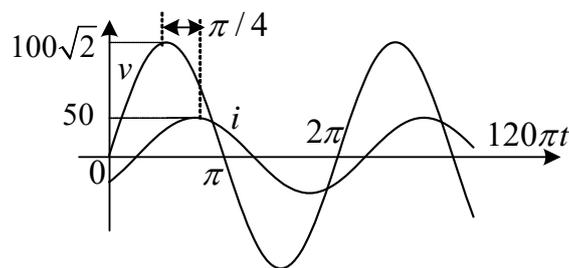
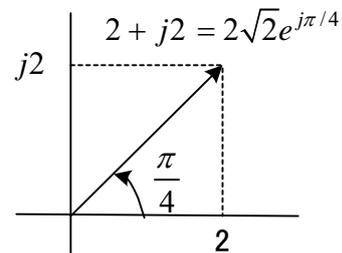
- (解) (1) 最大値の  $1/\sqrt{2}$  だから 100 V  
 (2)  $\omega = 120\pi = 2\pi f$  より,  $f = 60$  Hz  
 (3)  $V = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{j0} = 100$  V (実数なので  $V$  は基準フェーザである。)

(4)  $Z = R + j\omega L = 2 + j120\pi \frac{1}{60\pi} = 2 + j2$  [ $\Omega$ ]

(5)  $I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{2 + j2} = \frac{100}{2\sqrt{2}e^{j\pi/4}} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}$  [A]

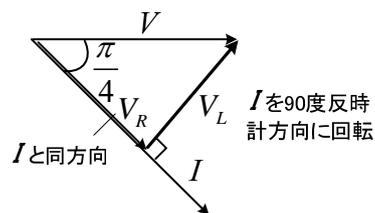
(6)  $i(t) = 50 \sin(120\pi t - \frac{\pi}{4})$  [A]

- (7) 図のように表せる。電圧と電流は単位が違うので、大きさの比較はできない。

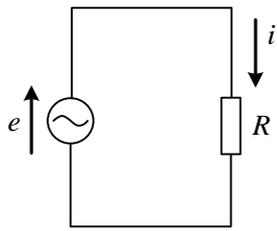


フェーザ図

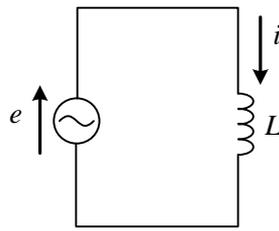
電圧と電流の大きさ(フェーザの長さ)は単位が違うので、比べられない。この場合  $V$  が基準フェーザなので、横軸にとっている。



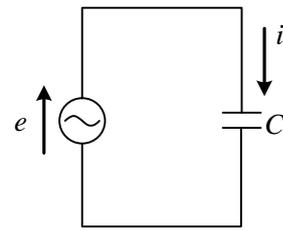
例題5 図の回路で、 $e = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$   $\varphi$ :初期位相 (定数) のとき、電流*i*を求めよ。  
 また、瞬時値*e, i*のグラフとそのフェーザ*E, I*のフェーザ図を書け。



(a)



(b)



(c)

(解)

瞬時値の式

$$e = Ri$$

$$e = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{de}{dt}$$

フェーザの式 (微分は  $j\omega$  へ)

$$E = RI$$

$$E = j\omega LI$$

$$I = j\omega CE$$

$$\therefore I = \frac{E}{R}$$

$$\therefore I = \frac{E}{j\omega L}$$

$$( E = \frac{I}{j\omega C} )$$

*e* のフェーザは  $E = E_e e^{j\varphi}$  だから

$$I = \frac{E_e}{R} e^{j\varphi}$$

$$I = \frac{E_e}{\omega L} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

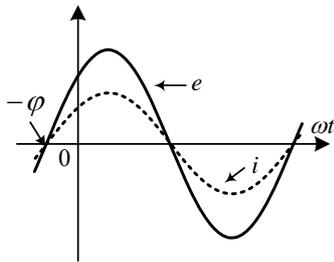
$$I = \omega CE e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

*I* を瞬時値 *i* にもどして

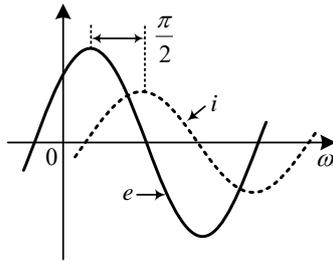
$$i = \frac{\sqrt{2}E_e}{R} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}E_e}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

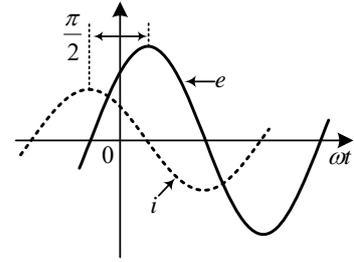
$$i = \sqrt{2}\omega CE_e \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$



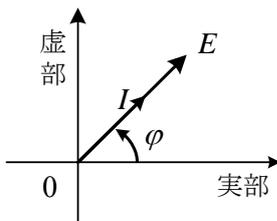
*e* と *i* は同相



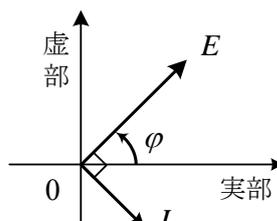
*i* は *e* より  $\pi/2$  遅れる。



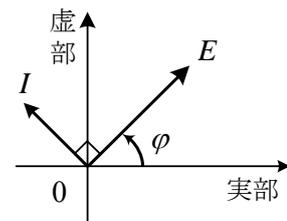
*i* は *e* より  $\pi/2$  進む。



フェーザ図

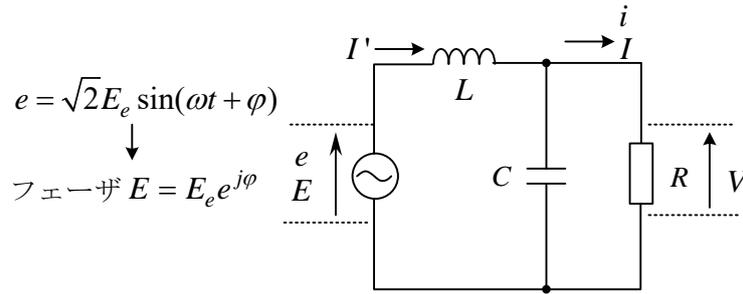


フェーザ図



フェーザ図

例題 6 図の回路で、 $R$ に流れる電流のフェーザを求めよ。次に、 $R$ に流れる電流の瞬時値を求めよ。また、この電流の実効値が $R$ に無関係となるにはどのような条件が必要か。



(解)  $R$ に流れる電流のフェーザを $I$ とすると、

$$I = \frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L + \frac{R}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad (\text{分流の公式利用})$$

$$= \frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L + \frac{R}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega CR + 1} \quad j\omega C \text{ を分子分母に掛ける。}$$

$$= \frac{E_e e^{j\varphi}}{j\omega L(j\omega CR + 1) + R}$$

$$= \frac{E_e e^{j\varphi}}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}$$

$$|I| = \frac{E_e}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \arg I = \varphi - \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$$

よって、 $I = |I|e^{j\arg I}$

電流の瞬時値の定常解は

$$\therefore i = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \arg I)$$

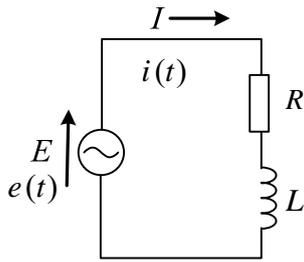
$i$ の実効値 $|I|$ が $R$ に無関係となるためには、 $R$ の係数が0となればよいから、

$$1 - \omega^2 LC = 0 \quad \therefore \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

このとき、 $|I| = \frac{E_e}{\omega L}$ となる。

- \* 定常解とは、電源のスイッチを入れて時間が十分経過したあとの解のことである。もともとフェーザを使って求められるのは、定常解だけである。
- \*  $C$ と $R$ の合成インピーダンスと $j\omega L$ の分圧より、 $V$ を求め $R$ で割ると、 $I$ が求まる。 $I$ の最初の分流の式をよく見るとそうになっていることが判る。 $C$ の電圧も $V$ である。

例題7 図の  $R, L$  回路で、電流の定常解がフェーザ表示を用いて求まることを説明せよ。



但し、電源電圧は、 $e(t) = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi)$ 、 $\varphi$ :初期位相(定数)

とする。

(解) 微分方程式を立てると、次式が得られる。

$$\sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \varphi) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \dots \textcircled{1}$$

①に対して、電源電圧が  $\cos$  の場合には、 $i'$  を解とすると

$$\sqrt{2}E_e \cos(\omega t + \varphi) = Ri' + L \frac{di'}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

$i'' = i' + ji$  とおき、② +  $j$ ①より

$$\sqrt{2}E_e \{ \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi) \} = R(i' + ji) + L \frac{d}{dt}(i' + ji)$$

$$\therefore \sqrt{2}E_e e^{j(\omega t + \varphi)} = Ri'' + L \frac{di''}{dt} \quad \dots \textcircled{3}$$

$i''$  の定常解を、

$$i'' = \sqrt{2}I_e e^{j(\omega t + \theta)} \quad (I_e, \theta : \text{定数で未知}) \quad \dots \textcircled{4}$$

と仮定すると、④を③に代入して、

$$\sqrt{2}E_e e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2}RI_e e^{j(\omega t + \theta)} + \sqrt{2}j\omega LI_e e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$\therefore E_e e^{j\varphi} = RI_e e^{j\theta} + j\omega LI_e e^{j\theta} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$= I_e e^{j\theta} (R + j\omega L)$$

$$= I_e \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j(\theta + \theta')}$$

$$\text{但し、} \theta' = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

$$\therefore I_e = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \theta = \varphi - \theta' \quad (\text{未知数が決定}) \quad \dots \textcircled{6}$$

④の虚部が求める電流なので、オイラーの公式より

$$i(t) = I_m(i'') = \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \theta) \quad (I_e, \theta \text{ は⑥で確定している。}) \quad \dots \textcircled{7}$$

を得る。一方、フェーザ表示の交流理論では

$$E_e e^{j\varphi} = RI + j\omega LI \quad \dots \textcircled{8}$$

が成立する。これを⑤とくらべると  $I = I_e e^{j\theta}$  に対応する。フェーザを用いると、①、②、③、④を省いて、⑧(⑤と等価)からスタートできる。

③の解は、一般には、定常解(特殊解) + 過渡解(同次方程式の解)で与えられるが、スイッチを入れて時間が経つと過渡解は0になる。第15章の過渡現象では、過渡解も求める。

問題1 自己インダクタンスが10mHのコイルに交流電圧30V（実効値）をかける。その周波数が、(1)500Hz, (2)5kHzのとき、流れる電流の実効値を求めよ。

(答) (1) $Z = j\omega L = j31.4\Omega$ ,  $|I| = \frac{|V|}{|Z|} = 0.955A$ , (2) $Z = j314\Omega$ ,  $|I| = 95.5mA$

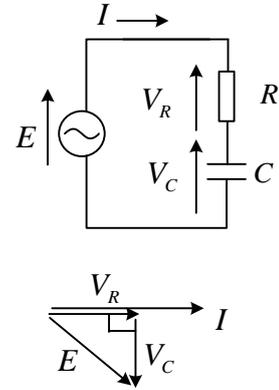
問題2  $R$  と  $C$  の直列回路に100V, 60Hzの電圧をかけたとき,  $C$  にかかる電圧が80Vであった。 $R$  にかかる電圧を求めよ。また,  $R = 1k\Omega$  のとき,  $C$  は何 $\mu F$ か。

(答) 題意より, 実効値 $|E| = 100$ ,  $|V_C| = 80$

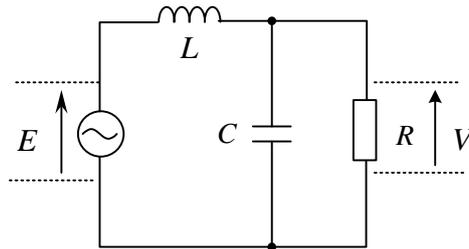
$$E = V_R + V_C = RI + \frac{I}{j\omega C} \quad \text{より図のフェーザ図が得られる。}$$

フェーザ図より $|V_R| = 60$  よって,  $R$  にかかる電圧は60V

$$V_R = RI, V_C = \frac{I}{j\omega C} \quad \therefore \frac{|V_C|}{|V_R|} = \frac{1}{R\omega C} = \frac{4}{3} \quad \therefore C = 1.99\mu F$$



問題3 図の回路で,  $G = V/E$  を求めよ。ただし,  $E, V$  は電圧のフェーザ（一般に複素数）である。また, 大きさ  $|G|$ , 偏角（位相） $\arg G$  を求めよ。電源の各周波数を  $\omega$  とする。



(答)  $L$  のインピーダンスを  $Z_1$ ,  $C, R$  並列回路のインピーダンスを  $Z_2$  とすると分圧の公式より

$$G = \frac{V}{E} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{j\omega L + \frac{R}{j\omega C + 1}} = \frac{R}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \quad C \text{ の電圧も } V$$

$$|G| = \frac{|R|}{|R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L|} = \frac{R}{\sqrt{R^2(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega L)^2}}$$

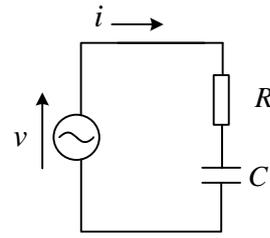
$$\arg G = \arg R - \arg(R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L) = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$$

(絶対値と偏角の計算は複素数の重要公式を見よ。)

問題4 図の回路で  $v = 200\sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{3})$  [V] のとき, 各問いに答えよ。

ただし,  $R = 2 \Omega, C = 0.25F$

- (1) 電源の周波数はいくらか。  
 (2) 電源電圧の実効値はいくらか。  
 (3) 回路のインピーダンスを求めよ。  
 (4) 電源電圧のフェーザを求めよ。  
 (5) 電流のフェーザを求めよ。  
 (6) 電流の瞬時値を求めよ。  
 (答) (1)  $f = 1/\pi$  Hz



(2)  $|V| = 200$  V      (3)  $Z = 2 - j2$   $\Omega$

(4)  $V = 200e^{j\pi/3}$  V      (5)  $I = \frac{100e^{j\frac{7\pi}{12}}}{\sqrt{2}}$  A      (6)  $i = 100\sin(2t + \frac{7\pi}{12})$  [A]

問題5 フェーザを用いて、図のRLC回路の瞬時電流を求めよ。電源電圧は、 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ とする。ただし、 $\phi$  (ファイ) は初期位相である。

(答) 回路のインピーダンス

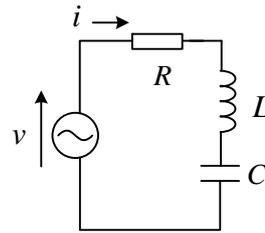
$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} e^{j\theta} = |Z| e^{j\theta}$$

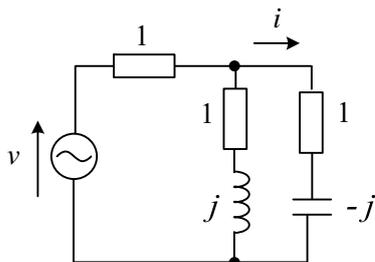
ここで、 $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_m e^{j\phi}}{\sqrt{2}|Z| e^{j\theta}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}|Z|} e^{j(\phi-\theta)}$$

より、 $i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \phi - \theta)$



問題6 図の回路で、全体のインピーダンスを求め、誘導性、純抵抗、容量性のどれか答えよ。また、 $v(t) = 100\sqrt{2} \sin 120\pi t$  [V]のとき、 $i(t)$ を求め、 $t = 0.1$ での電流 $i(0.1)$ を求めよ。図中の数値はインピーダンス[ $\Omega$ ]を表す。



(答) 全インピーダンス  $Z = 2$   $\Omega$ ，純抵抗

$$I = \frac{100}{Z} \frac{1+j}{1+j+1-j}$$

分流公式

$$i(t) = 50 \sin(120\pi t + \frac{\pi}{4})$$
 [A]

$$i(0.1) = 50/\sqrt{2}$$
 A

# 第8章 フェーザによる交流回路の計算Ⅲ

フェーザを使った交流回路の計算で、位相、フェーザ図、共振現象、電力と力率について詳しく学ぶ。

## ○ 位相

定常状態の電圧や電流を扱う交流理論では、時間の原点 ( $t = 0$ ) は自由に決めてよい。この結果、回路が与えられると、電圧または電流のどれか1つの初期位相を0に選ぶことが可能であり、そのフェーザは正の数となる。この正の数のフェーザを**基準フェーザ**と呼ぶ。

例えば、『100Vの交流電源がある。・・・』という場合、電源電圧の瞬時値は、一般に

$$e = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \tag{8-1}$$

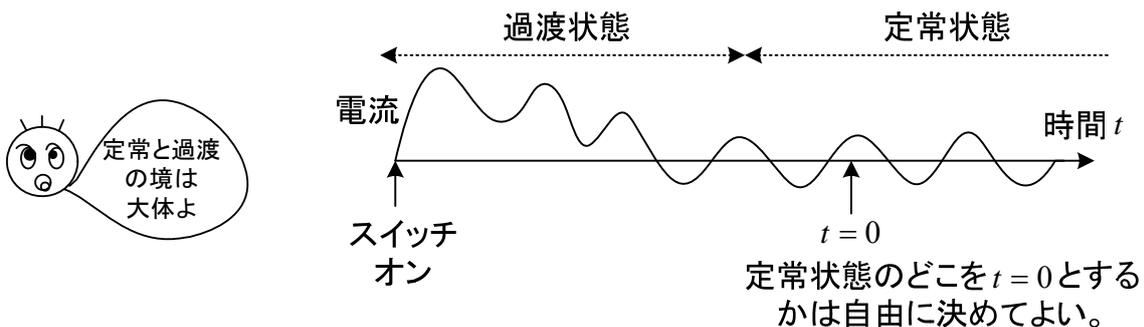
と書ける。 $\varphi$  (ファイ) は初期位相で一定値である。瞬時値  $e$  のフェーザ  $E$  は定義により

$$E = 100e^{j\varphi} \tag{8-2}$$

である。ところが、 $e = 100\sqrt{2} \sin \omega t$  と書けるように時間の原点を選ぶと ( $e = 0$  の瞬間を  $t = 0$  に)、

$$E = 100 \tag{8-3}$$

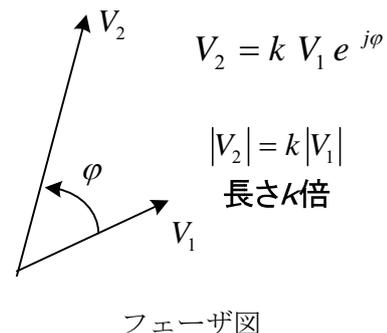
となり、フェーザ表示が正の実数となる。但し、試験問題に(8-1)のように明記してあれば、出題者がそのように時間の原点を決めたのであるから、 $E = 100e^{j\varphi}$  とする必要がある。



一般に、電圧  $V_2$  が電圧  $V_1$  に対し  $k (> 0)$  倍の大きさで、位相が  $\varphi (> 0)$  [rad] 進む (電圧  $V_2$  が進む) とき、

$$V_2 = k V_1 e^{j\varphi} \tag{8-4}$$

と書ける (これは、電流間、電圧と電流間でも成立する)。何故なら、(8-4)より



$$|V_2| = |kV_1 e^{j\phi}| = |k| |V_1| |e^{j\phi}| = k |V_1| \quad (k > 0) \quad \therefore |e^{j\phi}| = 1$$

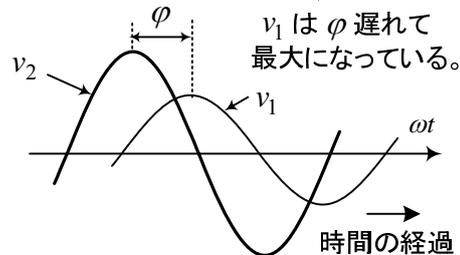
$$\arg V_2 = \arg k + \arg V_1 + \arg e^{j\phi} = \arg V_1 + \phi \quad \therefore \arg k = 0, \arg e^{j\phi} = \phi$$

$v_1 = 100 \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$  であれば、(8-4)より  $v_2 = 100k \sin(\omega t + \frac{\pi}{3} + \phi)$  となる。

電圧  $V_2$  が電圧  $V_1$  の  $k$  倍の大きさで、位相が  $\phi$  遅れる（電圧  $V_2$  が遅れる）ときは、

$$V_2 = kV_1 e^{-j\phi} \quad (8-5)$$

と書ける。



### ○ フェーザ図の描き方

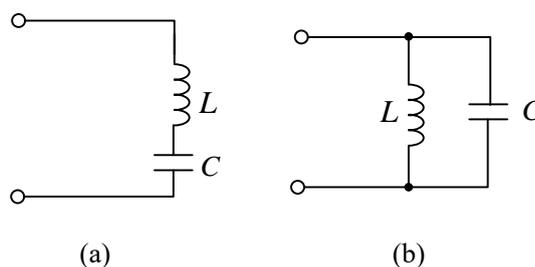
与えられた交流回路で、各部の電圧や電流のフェーザを複素平面上に関連づけて描いたものを**フェーザ図**という。数学のベクトルと同じ考え方で描けるので、ベクトル図とも呼ばれる。回路の電源電圧、抵抗やインダクタンスの値等が決まらなるとフェーザ図も決まらないが、大体の図は描ける。この際、フェーザが直交するとか、同方向とか、2つのフェーザの和があるフェーザになるとか、決まっていることは正確に書く必要がある。また、フェーザは大きさ（長さ）と向きを変えなければ自由に移動して書いてもよい。フェーザの大きさは、電流は電流同士、電圧は電圧同士で比べることに意味があり、電流と電圧の大きさを比べても意味がない（もともと単位が違う）。ただし、電流と電圧の位相差（角度）は重要である。

フェーザ図は、位相の基準となる基準フェーザ（実数）を実軸にして描くことになる。この基準フェーザは回路に対し1つだけ自由に選ぶことができる。フェーザ図を描くときは、最も電源から遠い電流を基準フェーザに選び、電源電圧を最後に書くようにすれば描きやすいだろう。

フェーザ図により、回路の電圧や電流の大きさと位相がどのような関係になっているか、視覚的に把握でき、図形の公式より計算が容易になることがある。

### ○ 共振現象

ある周波数において回路のインピーダンスあるいはアドミタンスの絶対値が極値をとることを**共振**(resonance)といい、図(a)の場合を狭義の共振あるいは**直列共振**、図(b)の場合を**反共振**(antiresonance)あるいは**並列共振**という。



インピーダンスを計算すると、

$$(a) \text{ の場合} \quad Z = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (8-6)$$

$$(b) \text{ の場合} \quad Z = \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad (8-7)$$

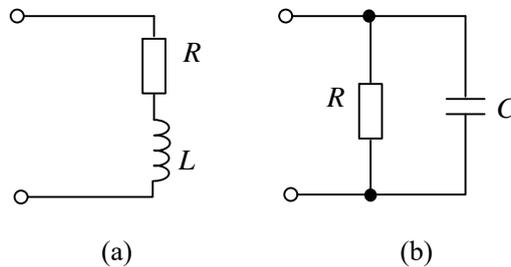
$\omega$  を変数として考えたとき、 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  のとき、(a)の $|Z|$ は極小値0、(b)の $|Z|$ は極大値 $\infty$ となる。多くの場合、インピーダンスの虚部を0か $\infty$ とおけば $\omega_0$ が得られる。

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8-8)$$

は**共振周波数**と呼ばれる。なお、(b)の場合は、アドミタンスを計算すると

$$Y = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \quad (8-9)$$

となり、 $|Y|$ の極小値から共振周波数を求める方が簡単である。直列共振の場合には、大きな電流が流れる（理想素子なら $\infty$ ）ので注意が必要である。並列共振の場合には、電源から流れる電流は、非常に小さくなる（理想素子なら0）。現実のコイルやコンデンサには損失があり、これを図のようにコイルでは直列抵抗、コンデンサでは並列抵抗として表すことが多い。



どちらの回路についても、コイルまたはコンデンサ単体の良さを表す素子の $Q$  (quality factor)が次式で定義される。(a)の抵抗は小さい程、(b)の抵抗は大きい程良い素子である。

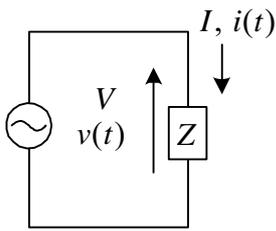
$$Q = \frac{|\text{リアクタンス分}|}{\text{抵抗分}} = \frac{|\text{サセプタンス分}|}{\text{コンダクタンス分}} \quad (8-10)$$

$$(a) \text{ の場合} \quad Q_L = \frac{\omega L}{R} \quad (8-11)$$

$$(b) \text{ の場合} \quad Z = \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{j\omega CR + 1} = \frac{R(1 - j\omega CR)}{1 + (\omega CR)^2} \quad \therefore Q_C = \omega CR \quad (8-12)$$

(b)の場合には、コンダクタンスとサセプタンスより簡単に求まるが、どちらでも求まることを示すため、あえてインピーダンスから求めてみた。 $Q_L, Q_C$ とも $\omega$ とともに増大しそうであるが、実際には抵抗が $\omega$ と共に変化するの単調増加ではない。

○ 電力と力率



図で、電圧  $v(t) = \sqrt{2}V_e \sin(\omega t + \varphi)$  (8-13)

電流  $i(t) = \sqrt{2}I_e \sin(\omega t + \varphi - \theta)$  (8-14)

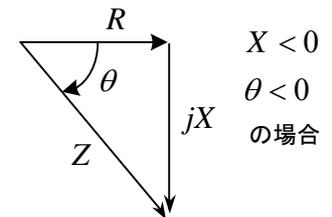
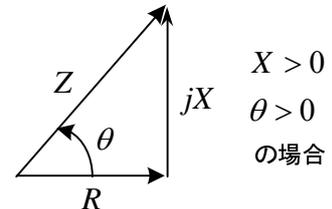
負荷のインピーダンス  $Z$  を

$$Z = R + jX \quad (8-15)$$

とすると、

$$\theta = \arg Z \quad (8-16)$$

である。 $\varphi, \theta$  は定数です。



このとき負荷のインピーダンス  $Z$  (実質  $R$ ) で消費される

**平均電力** (average power) (または**有効電力**(active power)

あるいは単に**電力**ともいう) を  $P$  とすると、

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt \quad T = 2\pi / \omega : \text{周期}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T 2V_e I_e \sin(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi - \theta) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T V_e I_e (\cos \theta - \cos(2\omega t + 2\varphi - \theta)) dt$$

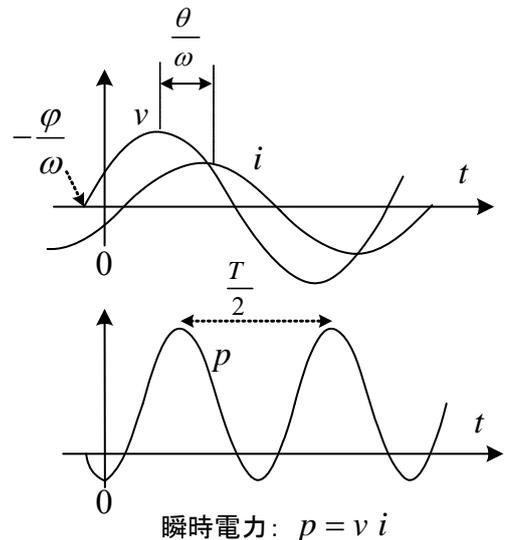
$$= V_e I_e \cos \theta \quad (8-17)$$

となる。ここで、 $\cos \theta$  は負荷の**力率**(power factor)と呼ばれている。 $P$  はいろいろな式で表せる。

$$P = V_e I_e \cos \theta = |V| |I| \cos \theta \quad (8-18)$$

$$= R I_e^2 = R |I|^2 \quad (8-19)$$

$$= \frac{R |V|^2}{R^2 + X^2} = G |V|^2 \quad (8-20)$$



これらの式は、フェーズに関する以下の式から導出できるが、覚えておこう。

(8-13)より電圧のフェーズ:  $V = V_e e^{j\varphi} \quad \therefore \text{電圧の実効値 } V_e = |V|$

(8-14)より電流のフェーズ:  $I = I_e e^{j(\varphi - \theta)} \quad \therefore \text{電流の実効値 } I_e = |I|$

**力率**  $\cos \theta = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad (X = 0 \text{ で抵抗分だけなら力率 } 1, R = 0 \text{ なら力率 } 0)$

$V = ZI, |V| = |Z| |I| \quad \therefore |V| \cos \theta = |Z| |I| \cos \theta = |I| R \quad \text{また, } |I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{|V|}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

アドミタンス  $Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}$

ところで、電圧と電流のフェーザが求まっている場合、電圧の共役複素数と電流の積である複素電力と呼ばれる量を計算すると、有効電力や無効電力が簡単に求められる。

複素電力(complex electric power)は、次式で定義される。

$$P_c \equiv \bar{V} I \quad (8-21)$$



(8-13) の電圧と(8-14)の電流をフェーザ表示して代入すると複素電力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_c &= V_e e^{-j\varphi} I_e e^{j(\varphi-\theta)} = V_e I_e e^{-j\theta} \\ &= V_e I_e \cos \theta - j V_e I_e \sin \theta \\ &= |V| |I| (\cos \theta - j \sin \theta) \\ &\equiv P + j P_r \end{aligned} \quad (8-22)$$

実部  $P = V_e I_e \cos \theta$  : 平均電力(有効電力あるいは単に電力)である。単位 W (ワット)

虚部  $P_r = -V_e I_e \sin \theta$  : 無効電力(reactive power)という。単位 Var (ヴァール)

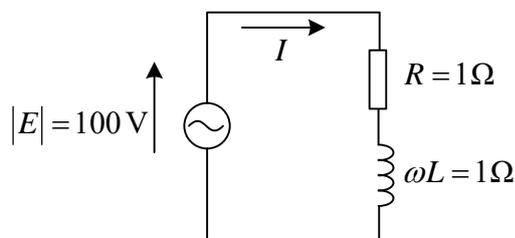
誘導性負荷なら  $\theta > 0$  ,  $P_r < 0$  , 容量性負荷なら  $\theta < 0$  ,  $P_r > 0$

絶対値  $P_a = V_e I_e = |P_c| = \sqrt{P^2 + P_r^2}$  : 皮相電力(apparent power)または容量という。単位は

VA(ボルトアンペア)を用いる。

複素電力の実部と虚部はそれぞれ有効電力と無効電力である。無効電力はコイルやコンデンサと電源の間でやりとりされる(消費されない)エネルギーの目安になる。なお、瞬時電力のフェーザが複素電力ではない。もともと瞬時電力は電圧と電流の積だからフェーザを定義できない。

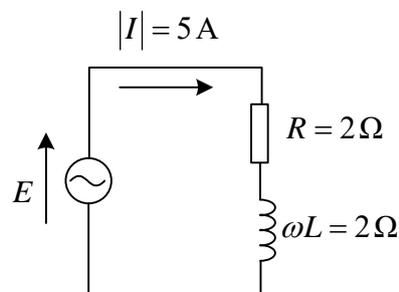
#### 電力の計算例



$E$  を基準にとると、 $E = 100$  とおける。複素電力  $P_c$  は

$$\begin{aligned} P_c &= \bar{E} I = 100 \cdot \frac{100}{R + j\omega L} \\ &= \frac{10000}{1 + j} = \frac{10000(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} \\ &= 5000 - j5000 \end{aligned}$$

$$\therefore P = 5000 \text{ W} \quad , \quad P_r = -5000 \text{ Var}$$



$I$  を基準フェーザにとると、 $I = 5$  と書ける。

$$E = (R + j\omega L) I = (2 + j2) \times 5 = 10 + j10 [\text{V}]$$

$$P_c = \bar{E} \cdot I = (10 - j10) \times 5 = 50 - j50$$

$$\therefore P = 50 \text{ W} \quad , \quad P_r = -50 \text{ Var}$$

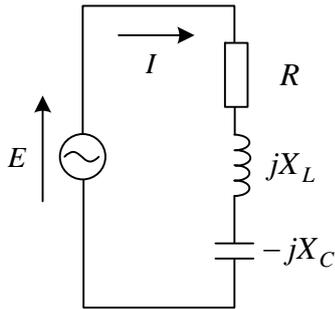
有効電力だけを計算する場合、 $P = R |I|^2 = 2 \times 5^2 = 50 \text{ W}$

として求めた方が簡単だ。 $\theta = \tan^{-1} 2/2 = \pi/4$  だから、負荷の力率は  $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$  である。

例題1 図の回路で、電源電圧  $E$  と電流  $I$  の位相が下記の条件を満たすとき  $R, X_L, X_C$  の関係式を求めよ。

- (1)  $I$  の位相が  $E$  の位相より  $\theta_0$  (正) だけ遅れる。
- (2)  $I$  の位相が  $E$  の位相より  $\theta_0$  (正) だけ進む。
- (3)  $E, I$  が同相である。

(はじめにちょっと一言) コイルの  $jX_L$  は  $\omega L = X_L$  の意味で、コンデンサの  $-jX_C$  は  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  の意味で書いている。



(解) 回路のインピーダンスを  $Z$  とおくと、  

$$Z = R + j(X_L - X_C) \quad \dots \dots \textcircled{1}$$
 電流  $I$  は、次式で求まる。  

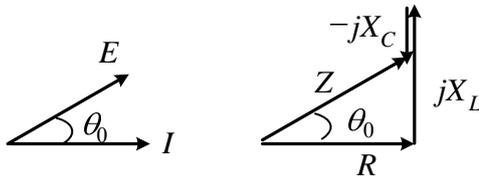
$$Z = \frac{E}{I} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$
 ②より、  

$$\arg Z = \arg E - \arg I \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

(1) 題意より、 $\arg E - \arg I = \theta_0 \quad \dots \dots \textcircled{4}$

③, ④より、 $\arg Z = \theta_0$

故に、 $\tan \theta_0 = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (X_L > X_C)$

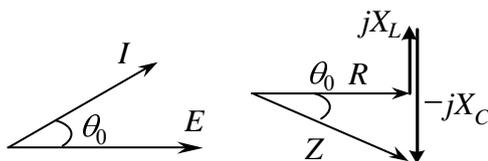


\* 誘導性負荷に相当する。

(2) 題意より、 $\arg I - \arg E = \theta_0 \quad \dots \dots \textcircled{5}$

③, ⑤より、 $\arg Z = -\theta_0 \quad (\arg Z < 0)$

故に、 $\tan \theta_0 = \frac{X_C - X_L}{R} \quad (X_C > X_L)$



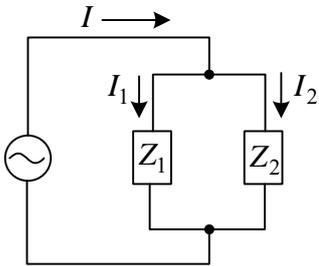
\* 容量性負荷に相当する。

(3) 同相なので  $\arg E = \arg I$  だから ③より  $\arg Z = 0$  よって、①より  $X_L = X_C$

\* 共振している。純抵抗負荷に相当する。

例題2 図の回路で、 $|I_1|=5\text{A}$ 、 $|I_2|=10\text{A}$ で、 $I_2$ が $I_1$ より $30^\circ$ 進んでいるという。

$|I|$ は何Aか。また、 $I$ 、 $I_1$ 、 $I_2$ の関係をフェーザ図に書け。



交流電流計で測ると、 $I_1$ 、 $I_2$ はそれぞれ5A、10Aを表示する。  
電流計は線を切って入れる。

(解)  $I_1$ を基準フェーザ(実数)にとると、

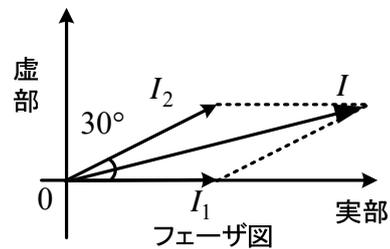
$$I_1 = 5, \quad I_2 = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$$

とおける。故に、

$$I = I_1 + I_2 = 5 + 10(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6})$$

$$= 5 + 5\sqrt{3} + j5$$

$$\therefore |I| = 5\sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + 1} = 14.5 \text{ A}$$



$I$ を求めるには平行四辺形を作る。



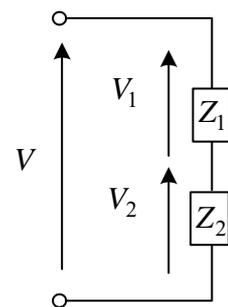
$I = I_1 + I_2$ は成立するけど、 $|I| = |I_1| + |I_2|$ は成立しません。だから、 $I$ を電流計で測っても、15Aでなく、14.5Aが表示されます。交流電流計や交流電圧計は、実効値すなわちフェーザの絶対値を表示するように作られとります。

○  $|V_1|=5\text{V}$ 、 $|V_2|=10\text{V}$ で、 $V_2$ が $V_1$ より $30^\circ$ 進んでいるという。

$|V|$ は何Vか。

この問題も全く同様に考えることができる。

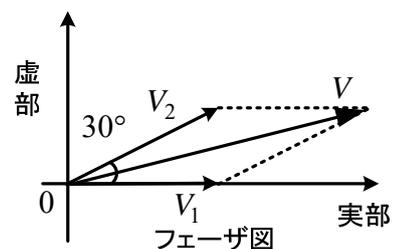
$|V|=14.5\text{V}$ となる。絶対値が電圧計の読み。



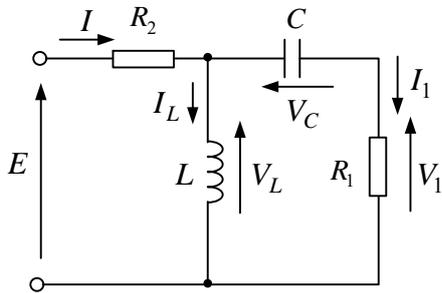
やはり、 $V = V_1 + V_2$ は成立するが、 $|V| = |V_1| + |V_2|$

は成立しない。

\*フェーザ図を基に、実際の電圧がどうなるか正弦波を書いてみよう。フェーザ図の有難さが理解できよう。



例題3 図の回路のフェーザ図を書け。書いた順番に番号を記せ。



(a)

(解)

$$V_1 = R_1 I_1 \quad \dots \textcircled{1} \quad (V_1 \text{ と } I_1 \text{ は同相})$$

$$V_C = \frac{I_1}{j\omega C} \quad \dots \textcircled{2} \quad (V_C \text{ は } I_1 \text{ より } \frac{\pi}{2} \text{ 遅れる})$$

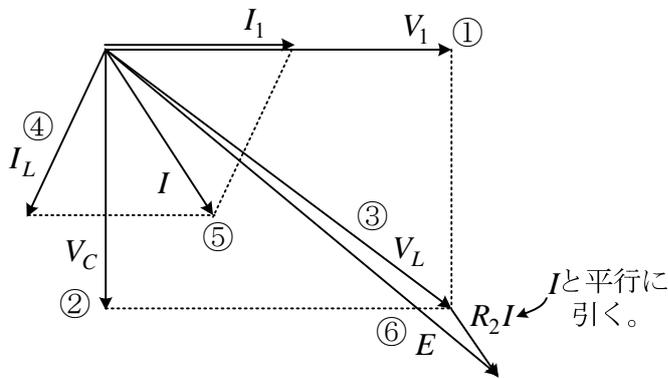
$$V_L = V_1 + V_C \quad \dots \textcircled{3}$$

$$I_L = \frac{V_L}{j\omega L} \quad \dots \textcircled{4} \quad (I_L \text{ は } V_L \text{ より } \frac{\pi}{2} \text{ 遅れる})$$

$$I = I_1 + I_L \quad \dots \textcircled{5}$$

$$E = R_2 I + V_L \quad \dots \textcircled{6}$$

$I_1$  を基準フェーザ (実数) としてフェーザ図を書く。



$R_1, R_2, \omega, C, L$  はいずれも正である。

$j$  を掛けると反時計回り  $90^\circ$  回転

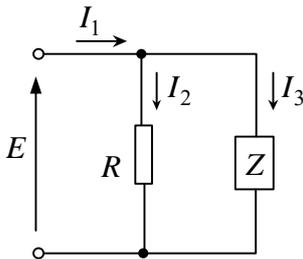
$j$  で割ると時計回り  $90^\circ$  回転

\* 回路図内の  $V_1$  と  $I_1$  の矢印は逆だがフェーザ図では同じ向き。

回路図の矢印は測定の向き。

\* 長さは定数  $R, L, C$  でいろいろ変化するため、自分で適当に書く部分もある。

(解)



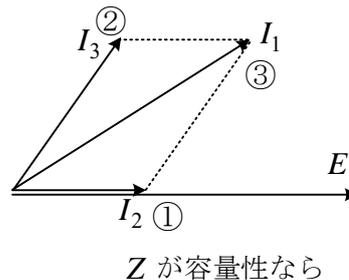
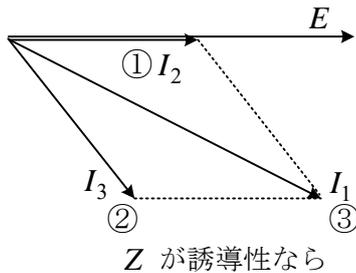
(b)

$$I_2 = \frac{E}{R} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$I_3 = \frac{E}{Z} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad \dots \textcircled{3}$$

$E$  を基準フェーザとする。



例題 4 図の直列共振回路で、共振角周波数を  $\omega_0$ 、電流の大きさが共振時の  $1/\sqrt{2}$  になるときの角周波数を  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  とする。 $R$  がコイルとコンデンサ両方の損失を表す抵抗のとき、直列共振回路の  $Q$  は次式で定義される\*。

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

$Q$  を  $\omega_0$ 、 $\omega_1$ 、 $\omega_2$  で表せ。但し、 $\omega_1 < \omega_2$  とする。

\*  $Q = 1/(\omega_0 CR)$  に等しい。 $R$  は小さいほど良い。

(解) 合成インピーダンス  $Z$  は、 $Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

となり共振角周波数は、 $Z$  の虚部を 0 とおき

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \therefore \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{①}$$

である。電流の大きさは、電圧の大きさ  $E$  (実効値) を用いて次式で与えられる。

$$|I| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad \text{②}, \quad I_0 = \frac{E}{R} \quad (\text{共振時}) \quad \text{③}$$

②, ③より

$$\frac{|I|}{I_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR})^2}} \quad \text{④}$$

題意より  $\omega_1$ 、 $\omega_2$  で  $\frac{|I|}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ⑤ となる。④, ⑤より

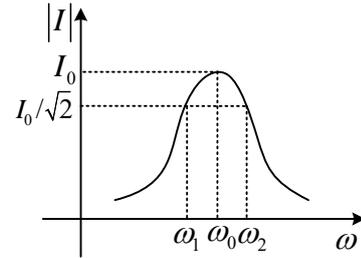
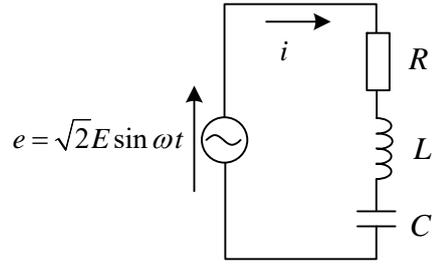
$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = \pm 1 \quad (\text{この式を満足する正の } \omega \text{ が } \omega_1, \omega_2 \text{ になる})$$

$$(1) \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = 1 \text{ のとき, } \omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad \omega > 0 \text{ より } \omega_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\}$$

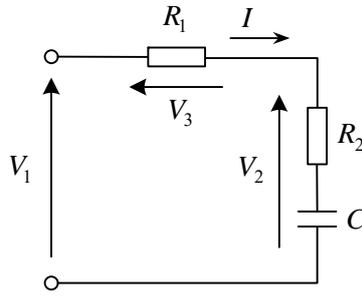
$$(2) \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} = -1 \text{ のとき, } \omega^2 + \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0 \quad \omega > 0 \text{ より } \omega_1 = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right\}$$

$$\text{よって, (1),(2)より } \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \text{故に, } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

\*  $Q$  が大きいほど損失が小さく理想的な共振特性に近い。つまり図の電流特性が鋭い程良い。共振の利用として時計などに使われている水晶振動子の  $Q$  は  $10^4 \sim 10^6$  程度である。



例題 5 図の回路で,  $R_2$  で消費される電力  $P$  を  $|V_1|, |V_2|, |V_3|, R_1$  で表せ。

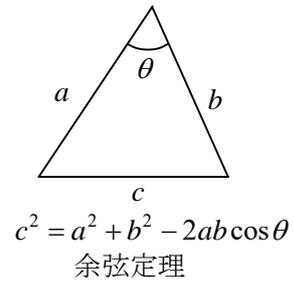
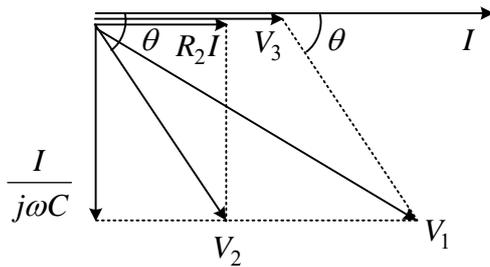


(解) 図より,  $V_2 = (R_2 + \frac{1}{j\omega C})I \quad \dots \textcircled{1}$

$V_3 = R_1 I \quad \dots \textcircled{2}$

$V_1 = V_2 + V_3 \quad \dots \textcircled{3}$

$I$  を基準フェーザとしてフェーザ図を書く。



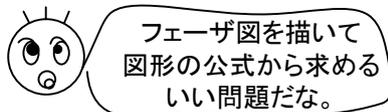
$P = |V_2||I| \cos \theta$  で与えられる。

図より,

$$|V_1|^2 = |V_2|^2 + |V_3|^2 - 2|V_2||V_3| \cos(\pi - \theta)$$

また, ②より  $|I| = \frac{|V_3|}{R_1} \quad \therefore P = \frac{|V_2||V_3|}{R_1} \cos \theta$

故に,  $P = \frac{|V_1|^2 - |V_2|^2 - |V_3|^2}{2R_1}$



例題 6 図に示すように、力率80%の誘導性負荷  $Z_1$  と力率60%の容量性負荷  $Z_2$  に電圧100Vを加えると、 $Z_1$  に10A、 $Z_2$  に5Aが流れた。この負荷全体の有効電力  $P$ 、無効電力  $P_r$ 、力率  $\cos \theta$  および全電流を求めよ。

(解) 複素電力  $P_c$  を計算する。(8-22)参照せよ。

$$\begin{aligned} P_c &= \bar{E}I \\ &= \bar{E}(I_1 + I_2) \\ &= \bar{E}I_1 + \bar{E}I_2 \\ &= |E||I_1|(\cos \theta_1 - j \sin \theta_1) \\ &\quad + |E||I_2|(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2) \end{aligned}$$

但し、 $\theta_1 = \arg Z_1$  ,  $\theta_2 = \arg Z_2$

題意より、

$$|E|=100 \quad , \quad |I_1|=10 \quad , \quad |I_2|=5$$

$Z_1$  は誘導性負荷なので  $\theta_1 > 0$        $\cos \theta_1 = 0.8$  より  $\sin \theta_1 = 0.6$

$Z_2$  は容量性負荷なので  $\theta_2 < 0$        $\cos \theta_2 = 0.6$  より  $\sin \theta_2 = -0.8$

故に、

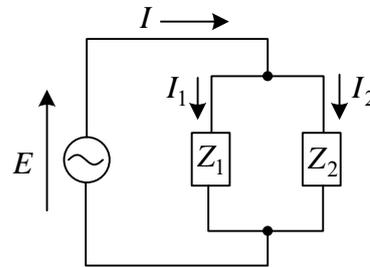
$$P_c = 100 \times 10 \times (0.8 - j0.6) + 100 \times 5 \times (0.6 + j0.8) = 1100 - j200$$

有効電力  $P = 1100 \text{ W}$  ,    無効電力  $P_r = -200 \text{ Var}$

皮相電力 (容量)  $P_a = |E||I| = |P_c| = \sqrt{1100^2 + 200^2} = 1118 \text{ VA}$

全電流  $|I| = \frac{P_a}{|E|} = \frac{1118}{100} = 11.18 \text{ A}$

力率  $= \frac{P}{P_a} = \frac{1100}{1118} = 0.98$



$E$  を基準フェーズに選ぶと  $E = 100$  と書けます。 $I_1, I_2, I$  のフェーズを求める。

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = \frac{100}{|Z_1| e^{j\theta_1}} = \frac{100}{|Z_1|} e^{-j\theta_1} = |I_1|(\cos \theta_1 - j \sin \theta_1) = 10 \times (0.8 - j0.6) = 8 - j6$$

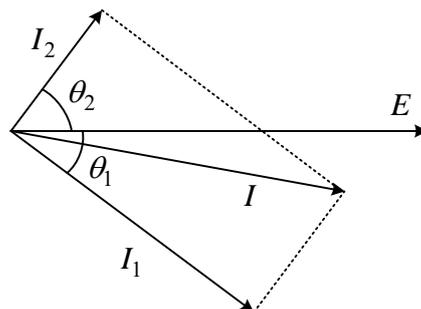
(sin の前のマイナスは、電流のフェーズ  $I$

がインピーダンス  $Z$  で割るから出てくる)

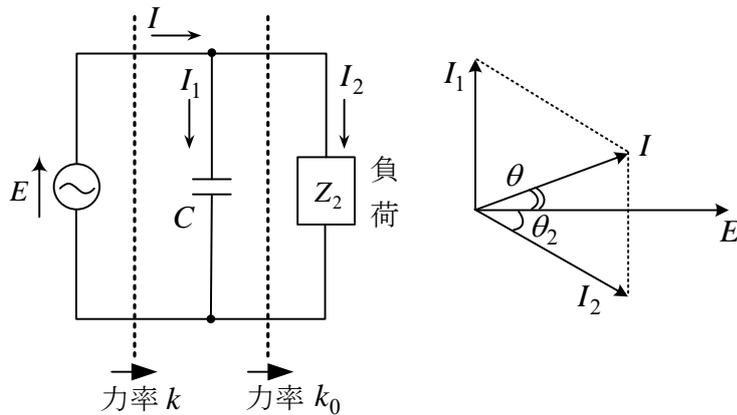
同様に

$$I_2 = 5 \times (0.6 + j0.8) = 3 + j4$$

$$\therefore I = I_1 + I_2 = 11 - j2$$



例題7 有効電力  $P$ [kW], 力率  $k_0$  の誘導性負荷に並列に, 容量 (皮相電力)  $Q$ [kVA] のコンデンサを入れて, 力率を  $k (> k_0)$  にしたい。  $Q$  を求めよ。



### 力率改善

$E$  と  $I$  の位相差  $\theta$  を小さくして, 力率  $\cos \theta = k$  を 1 に近づける。これにより, 出力は同じであるが, 電源から流れる電流が減少し, 電源の設備と電源 (送電線) の内部抵抗の和  $R$  で消費される電力を小さくできる。力率が悪いと, 電力会社に割増料金を払う必要がある。



(解) 図のように,  $E, I, I_1, I_2$  をとる。複素電力  $P_C$  は,

$$P_C = \bar{E}I$$

$$= \bar{E}I_1 + \bar{E}I_2$$

$$= |E||I_1|(\cos \theta_1 - j \sin \theta_1) + |E||I_2|(\cos \theta_2 - j \sin \theta_2)$$

$$\text{但し, } \theta_1 = \arg\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \arg Z_2$$

$$\text{よって, } \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos \theta_1 = 0, \quad \sin \theta_1 = -1$$

$$\text{題意より } \cos \theta_2 = k_0, \quad \text{誘導性負荷だから } \theta_2 > 0 \quad \therefore \sin \theta_2 = \sqrt{1 - k_0^2}$$

$$\text{また, 題意より } |E||I_2| \cos \theta_2 = P \text{ [kW]}, \quad |E||I_1| = Q \text{ [kVA]}$$

$$\text{故に, } P_C = P + j\left(Q - \frac{P\sqrt{1 - k_0^2}}{k_0}\right) \quad \text{公式として覚えておくと便利!}$$

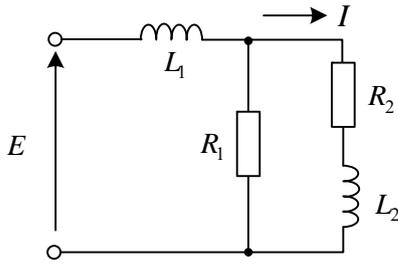
(有効電力は負荷分  $P$  のみ, 無効電力はコンデンサ分  $Q$  と負荷分  $\sin \theta_2$ )

従って, 全体の力率  $k$  は,

$$k = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{\text{Re}(P_C)}{|P_C|} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + \left(Q - \frac{P\sqrt{1 - k_0^2}}{k_0}\right)^2}}$$

$$\text{これより, } Q = \frac{P\sqrt{1 - k_0^2}}{k_0} \pm \frac{P\sqrt{1 - k^2}}{k} \text{ [kVA]}$$

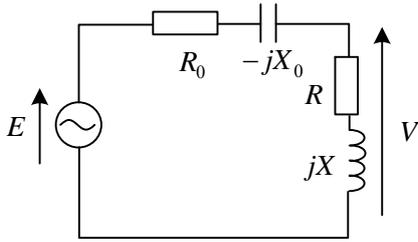
問題1 図の回路において、 $I$  を  $E$  より  $90^\circ$  遅らせるための条件を求めよ。



(答)  $R_1 R_2 = \omega^2 L_1 L_2$

\*  $E$  を基準フェーザにとると、 $I$  の実部は 0  
 まず、フェーザ  $I$  を求めよ。57 ページ例題 6 参照

問題2 図の回路で、 $V$  が  $E$  より  $30^\circ$  進み、 $|V| = |E|$  であるとき、 $R_0, X_0$  を  $R, X$  で表せ。



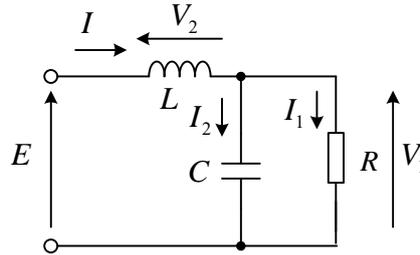
(答)  $R_0 = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + \frac{X}{2}$

$X_0 = \frac{R}{2} + X\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

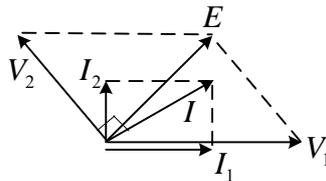
\*  $V = e^{j\frac{\pi}{6}} E$  である。(8-4)参照

$V/E = (a + jb)/(c + jd)$  なら  $a + jb = (c + jd)e^{j\pi/6}$  で実部、虚部比較

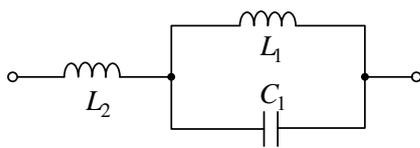
問題3 図の回路のフェーザ図を書け。



(答)  $I_1$  を基準フェーザとして書き始める。

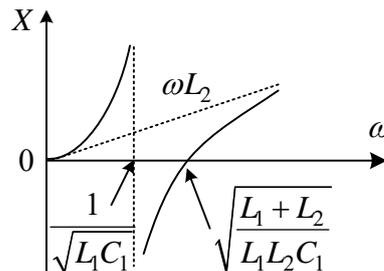


問題4 横軸に  $\omega$  をとり、図の回路のリアクタンス  $X$  のグラフを書け。また、 $X = 0$  となる直列共振周波数と  $X = \pm\infty$  となる並列共振周波数を求めよ。

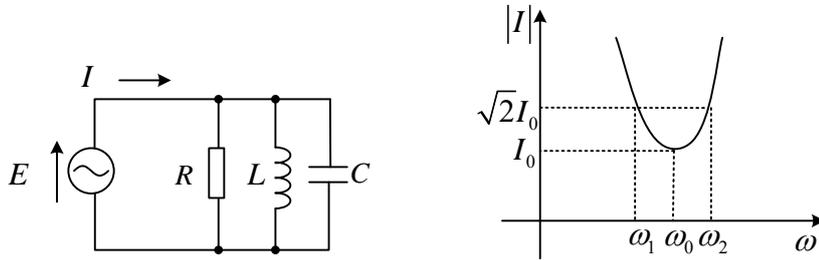


$X = \omega L_2 + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}$

(答)



問題 5 図の並列共振回路で、共振角周波数を  $\omega_0$ 、電流の大きさが共振時の  $\sqrt{2}$  倍になるときの角周波数を  $\omega_1, \omega_2$  とする。 $R$  がコイルとコンデンサ両方の損失を表す抵抗のとき、並列共振回路の  $Q$  は  $Q = R\omega_0 C$  で定義される。 $Q$  を  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  で表せ。

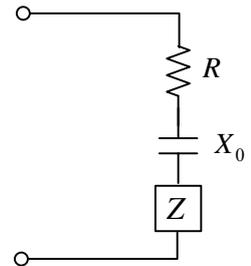


(答) 共振時アドミタンスの虚部が 0 となることから  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  を得る。 $I_0 = |E|/R$

$$\frac{|I|}{I_0} = \sqrt{1 + (\omega RC - \frac{R}{\omega L})^2} \quad \therefore \quad \omega RC - \frac{R}{\omega L} = \pm 1 \quad Q = R\omega_0 C = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

\*  $R$  は大きいほど良い。

問題 6 図のインピーダンス  $Z$  は力率 0.8 の容量性負荷である。これに、抵抗  $R_0 = 2\Omega$  と容量リアクタンス  $X_0 = 5\Omega$  を直列に接続したところ、全体の力率は 0.6 になった。 $Z$  を求めよ。

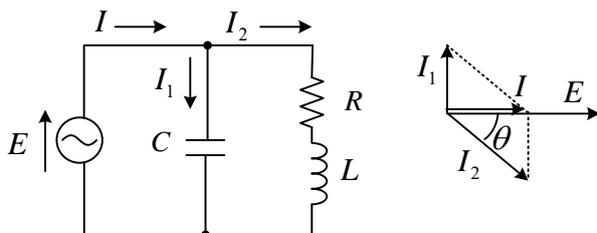


(答) 容量性なので  $Z = R - jX$  (但し,  $X > 0$ ) とおく。力率  $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 0.8$  だから

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -0.6 \quad (\theta < 0 \text{ だから}) \quad \text{故に, } \tan \theta = \frac{-X}{R} = \frac{-0.6}{0.8} = \frac{-3}{4}$$

$$\text{故に } \frac{X}{R} = \frac{3}{4} \quad \text{同様に考えて } \frac{-(X_0 + X)}{R_0 + R} = \frac{-0.8}{0.6} = \frac{-4}{3} \text{ より, } Z = 4 - j3[\Omega]$$

問題 7 力率 80%, 皮相電力 (容量) 5kVA の  $RL$  負荷に並列にコンデンサを接続し、電源からみた力率を 100% にしたい。接続するコンデンサの静電容量  $C$  を求めよ。ただし、電源は 60Hz, 2kV とする。



(答) 回路図より  $|I_1| = \omega C |E|$

力率 1 ( $E, I$  が同じ向き) のフェーザ図より

$$|I_1| = |I_2| \sin \theta \quad \text{また, 題意より}$$

$$|E| |I_2| = 5 \times 10^3, \cos \theta = 0.8, |E| = 2 \times 10^3$$

$$\text{などから } C = 2 \mu\text{F}$$

# 第9章 三相交流

120度ずつ位相がずれた a, b, c 相の3つの電源に負荷をつないだ三相回路の解析を学ぶ。フェーザ図を書いて大きさや位相を考えると計算が楽である。三相回路は電力の供給やモータの運転などで用いられ、また交流理論の演習としても大変役に立つ。

## ○ 三相起電力(three-phase electromotive force)の発生

固定した三相コイル a, b, c の中で磁石を回転させると実効値が等しく 120度ずつ位相のずれた図の三相交流起電力  $e_a, e_b, e_c$  が発生する (対称電源という)。磁極 N, S がコイル片を通過するとき最も高い電圧が出る\*。  $\omega$  [rad/s] は磁石の角速度で  $\omega t = 2\pi$  で1回転する。

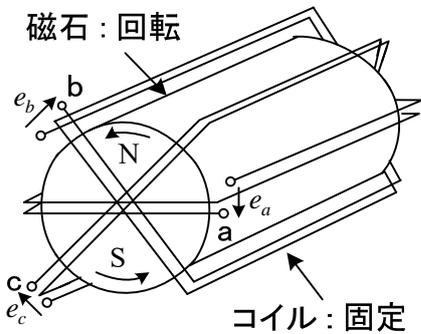


図 9-1  $\omega t = 0$  での磁極の位置

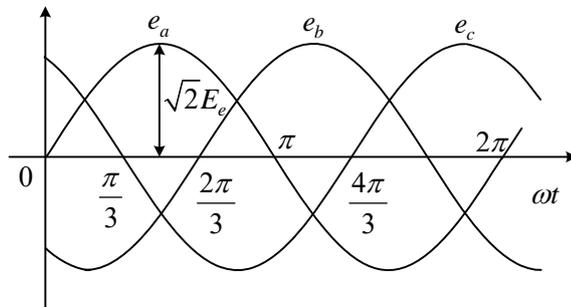


図 9-2 磁石の回転でコイルに生じる起電力 (電圧)

三相起電力 (瞬時値) は次式で表わせる。このとき、相順は a, b, c の順であるという。

$$\begin{cases} e_a = \sqrt{2}E_e \sin \omega t \\ e_b = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \\ e_c = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \end{cases} \quad (9-1)$$

起電力の最大値を見ると、時間の経過とともに、 $e_a, e_b, e_c$  の順になっている。

$\leftarrow \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi)$  と同じ。

↓ 各電圧をフェーザ表示すると

$$\begin{cases} E_a = E_e \\ E_b = E_e e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ E_c = E_e e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{cases} \quad (9-2)$$

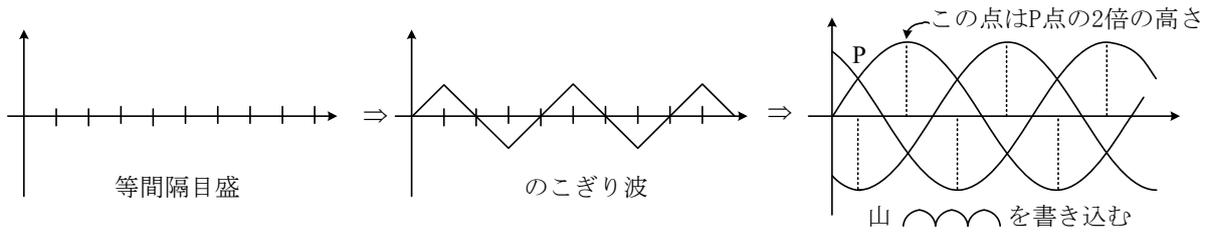
$e^{j\frac{2\pi}{3}}$  を掛けると  $\frac{2}{3}\pi$  回転。

ここで、

$$e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9-3)$$

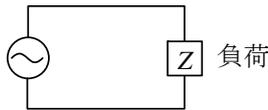
\* 電源の内部抵抗を無視するので、起電力は電源の電圧に等しい。

☆ 三相交流の書き方



○ 三相起電力の結線

単相の場合



三相の場合

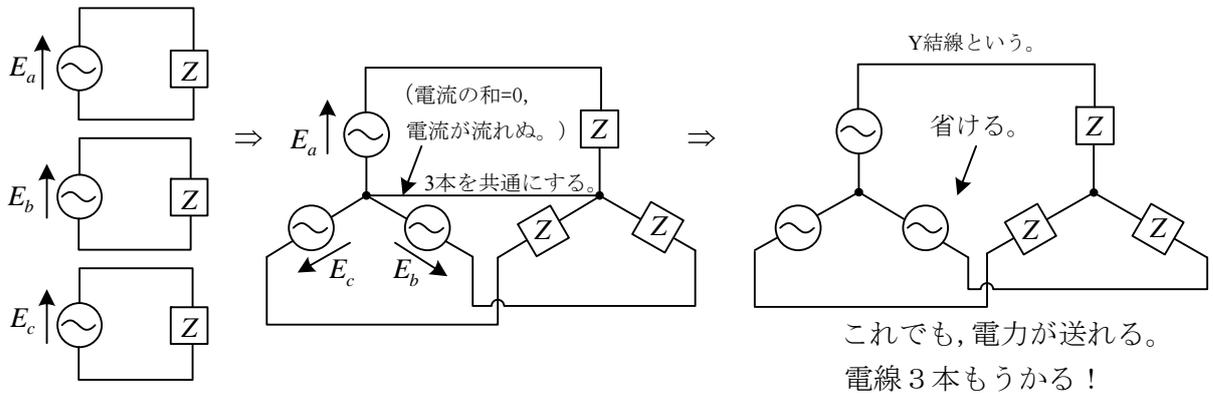


図 9-3 三相電源と負荷の結線

Y 結線の電源（Y 形電源）の相電圧(phase voltage)と線間電圧(line voltage)

$E_a, E_b, E_c$  を相電圧,  $E_{ab}, E_{bc}, E_{ca}$  を線間電圧と呼ぶ。電力を送る場合,  $a, b, c$  の端子に電線が接続され, 負荷に供給される。線間電圧には電線の間の電圧という意味がある。また, 線間電圧は直接測定が可能で, 普通“三相電圧 200V”と言うと, 線間電圧の実効値が 200V ということの意味する。図の相電圧と線間電圧のフェーザ図は必ず書けるようになる。

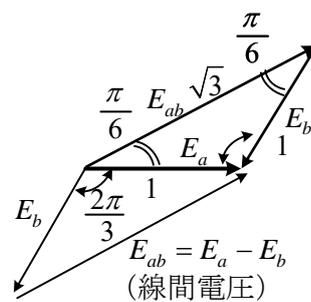
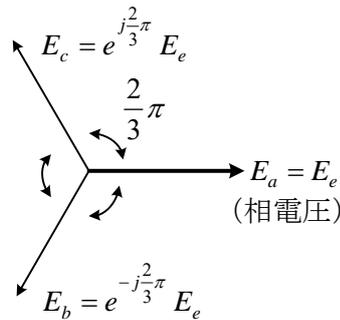
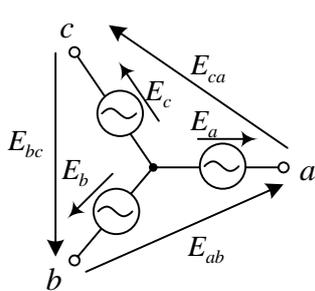


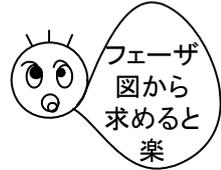
図 9-4 相電圧と線間電圧

図 9-5 相電圧のフェーザ図

図 9-6 相電圧と線間電圧のフェーザ図

対称電源の性質 1.  $E_a + E_b + E_c = 0$   $e_a + e_b + e_c = 0$  (9-4)

2. 線間電圧 =  $\sqrt{3}$  × 相電圧 (9-5)  
(実効値) (実効値)



(9-4)は、44 ページの問題 2 を参照のこと。(9-5)については、図 9-6 より 30 度、30 度、120 度の二等辺三角形なので、辺の長さの比は  $1:1:\sqrt{3}$  で、 $E_{ab}$  は  $E_a$  より  $\pi/6$  回転しているから

$$E_{ab} = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (9-6)$$

となる (覚えるのではなく理解する)。直接(9-2),(9-3)で  $E_a - E_b$  を計算し確かめよ。

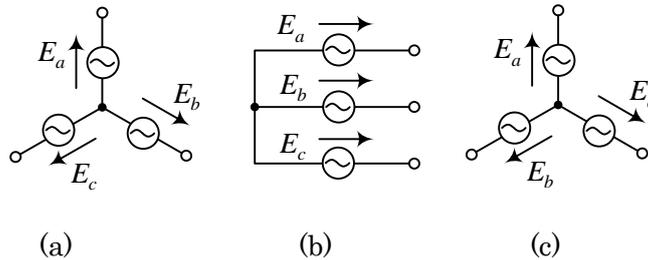
$$\therefore |E_{ab}| = \sqrt{3}|E_a| |e^{j\pi/6}| = \sqrt{3}|E_a| = \sqrt{3}E_e \quad (\text{フェーザの絶対値=実効値})$$

同様に、相電圧のフェーザ図に  $E_{bc}, E_{ca}$  のフェーザを書き込むことで次式が得られる。

$$E_{bc} = \sqrt{3}E_a e^{-j\frac{\pi}{2}} (= E_{ab} e^{-j\frac{2\pi}{3}}) \quad (9-7)$$

$$E_{ca} = \sqrt{3}E_a e^{j\frac{5\pi}{6}} (= E_{ab} e^{j\frac{2\pi}{3}}) \quad (9-8)$$

☆ 質問 何故、三相電源は下の図(a)の様に書くのか？



(答) どの様に書いてもよい。例えば、右図(b),(c)。図(a)はフェーザ図が、 $2\pi/3$  ずつずれるのが視覚的にはつきし、フェーザ図とも対応している (本テキストではこれを主に使用する)。図(c)は、発電機やモータの解析で良く用いられる。理由は、一般に角度の正方向は反時計方向であり、起電力の発生で示したコイルの空間的配置をそのまま図示した場合に対応するからである。

☆ 線間電圧の瞬時値はどんな波形になるのですか？

(答) 例えば、線間電圧  $e_{ab} = e_a - e_b$  は右図のようになります。大きさは相電圧  $e_a$  の  $\sqrt{3}$  倍で位相は  $e_a$  より  $\pi/6$  進みます。 $e_{bc}, e_{ca}$  はそれぞれ  $e_{ab}$  より  $2\pi/3, 4\pi/3$  遅れた波形になります。フェーザ図と比べよ。

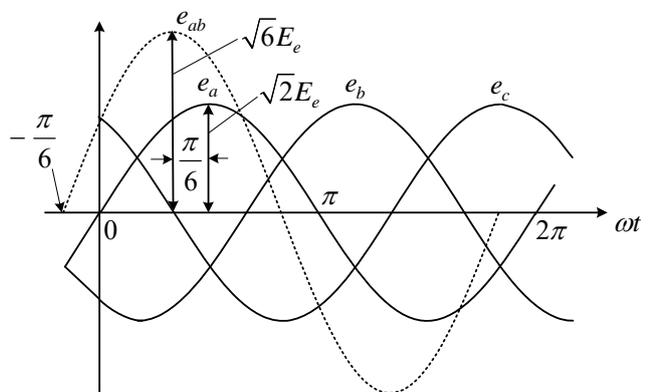
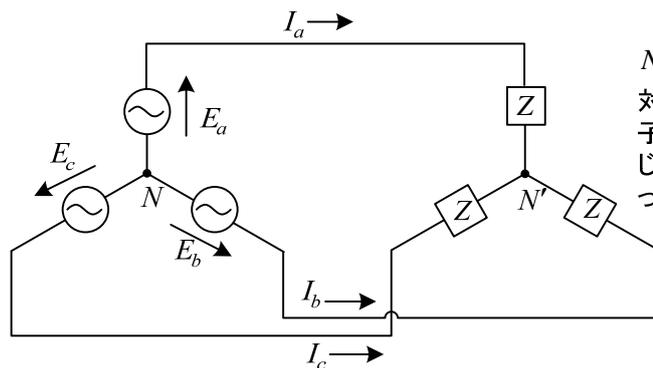


図 9-7 相電圧と線間電圧の波形

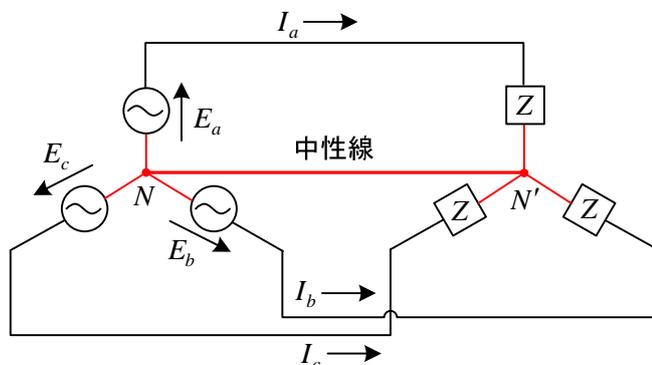
○ 対称 Y-Y 回路 . . . . . 対称 Y 形電源に対称 Y 形負荷を接続した回路



$N, N'$  を中性点という。  
対称負荷とは、三つの端子の間に区別がなく、同じインピーダンスがつながっている負荷のこと。

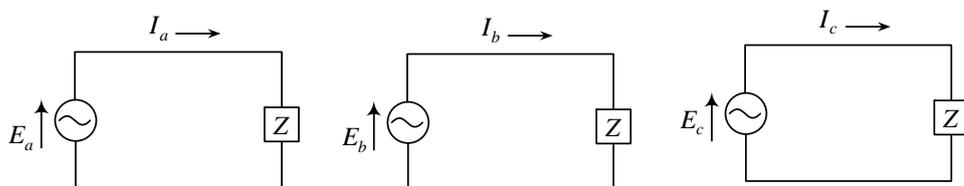
図 9-8 対称 Y-Y 回路

まず、中性点  $N - N'$  を導線で結んだ図の回路を考えてみよう。



各相に流れる電流を相電流、線路に流れる電流を線電流と呼ぶ。  
Y形電源では、両者は等しい。

$N - N'$  が接続されているので、回路は各相に分離して解くことができる。すなわち、



$$\left\{ \begin{array}{l} e_a = \sqrt{2}E_e \sin \omega t \\ e_b = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_c = \sqrt{2}E_e \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \end{array} \right. \text{ のフェーザは, } \left\{ \begin{array}{l} E_a = E_e \\ E_b = E_e e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ E_c = E_e e^{j\frac{2}{3}\pi} \end{array} \right. \text{ であるから,}$$

$$\text{電流のフェーザは, } \left\{ \begin{array}{l} I_a = E_a / Z = I_e e^{-j\theta} \\ I_b = E_b / Z = I_e e^{-j(\theta + \frac{2}{3}\pi)} \\ I_c = E_c / Z = I_e e^{-j(\theta - \frac{2}{3}\pi)} \end{array} \right. \text{ ただし, } I_e = \frac{E_e}{|Z|} \quad (9-9)$$

$$\theta = \arg Z$$

となる。よって、電流の瞬時値は次式となる。

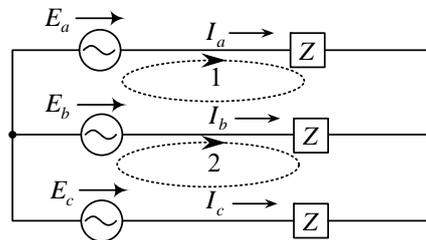
$$\begin{aligned}
 i_a &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta) \\
 i_b &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta - \frac{2\pi}{3}) \\
 i_c &= \sqrt{2}I_e \sin(\omega t - \theta + \frac{2\pi}{3})
 \end{aligned}
 \tag{9-10}$$

電圧が $2\pi/3$ ずつずれて、負荷は同じなので、当然の結果である。この結果、 $i_a + i_b + i_c = 0$ （または、 $I_a + I_b + I_c = 0$ ）だから、 $N-N'$ 間には電流は流れない。よって、 $N-N'$ の導線を取り除いても回路の電流は変化しない。以上により、 $N-N'$ を導線で結んだ回路と結ばない回路は等価であると考えられる。従って対称Y-Y回路では、 $N-N'$ 間は導線で結ばれていないが、これを結んで考えることにより簡単に電流を求めることができる。

注意事項： $N-N'$ を結んで考えて良いのは、対称Y-Y回路だけで、三相交流で各相電圧の実効値が等しく、位相が $2\pi/3$ ずつずれていること、負荷のインピーダンスが各相とも同じである場合に限る。例えば、 $N-N'$ を結んでいない最初の回路で仮に $e_a = e_b = e_c$ の場合は、対称性から $i_a = i_b = i_c$ で、電流則より $i_a + i_b + i_c = 0$ だから $i_a = i_b = i_c = 0$ となる。この場合、 $N-N'$ を結ぶと電流が流れるから、結ぶと等価でなくなる。

対称Y-Y回路をキルヒホッフの法則を使った方法で解いてみる。

図の回路で、 $E_a = E_e$  ,  $E_b = e^{-j\frac{2}{3}\pi} E_e$  ,  $E_c = e^{j\frac{2}{3}\pi} E_e$  のとき、 $I_a, I_b, I_c$ を求める。



図より、

$$I_a + I_b + I_c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{閉路 1 : } E_a - E_b = ZI_a - ZI_b \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{閉路 2 : } E_b - E_c = ZI_b - ZI_c \quad \dots \textcircled{3}$$

$I_a, I_b, I_c$ が未知数で、独立な式が3つあるので解ける。

$$\textcircled{2} \text{より, } I_a = \frac{E_a - E_b + ZI_b}{Z}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } I_c = \frac{-E_b + E_c + ZI_b}{Z}$$

$$\textcircled{1} \text{に代入して, } \frac{E_a - E_b + ZI_b}{Z} + I_b + \frac{-E_b + E_c + ZI_b}{Z} = 0$$

$$\therefore 3ZI_b + E_a - 2E_b + E_c = 0$$

$$\therefore I_b = \frac{2E_b - E_a - E_c}{3Z} \quad (E_a + E_b + E_c = 0 \text{ より})$$

$$= \frac{E_b}{Z} \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} \text{を} \textcircled{2} \text{に代入して, } I_a = \frac{E_a}{Z}$$

$$\textcircled{4} \text{を} \textcircled{3} \text{に代入して, } I_c = \frac{E_c}{Z}$$

このように、三相回路の知識が無くても解くことができる。しかし、 $N-N'$ を結ぶと、3つの回路に分離できて簡単に答えが求まる。三相回路で新しく勉強した重要なポイントだ。

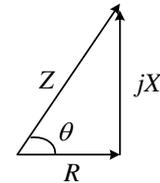


### 電力の計算 (対称 Y-Y 回路)

$$P = |E_a||I_a|\cos\theta + |E_b||I_b|\cos\theta + |E_c||I_c|\cos\theta$$

$$= 3|E_a||I_a|\cos\theta \quad (9-11)$$

$$\left( \begin{array}{l} \because |E_a| = |E_b| = |E_c| = E_e \\ |I_a| = |I_b| = |I_c| = \frac{E_e}{|Z|} = I_e \end{array} \right)$$



$$Z = R + jX$$

ここで、 $\cos\theta$  : 負荷の力率

実際にメータで測定できるのは、線間電圧だから、線間電圧を用いて  $P$  を求めておく。

$$|E_{ab}| = \sqrt{3}|E_a| \text{ より,}$$

$$P = \sqrt{3}|E_{ab}||I_a|\cos\theta$$

$$= \sqrt{3} \times \text{線間電圧} \times \text{線電流} \times \text{力率} \quad (9-12)$$

$P$  は三相電力計で測れる。よって、この式より力率を求めることができる。

次に、瞬時電力を求める。

$$p = e_a i_a + e_b i_b + e_c i_c$$

$$= 2E_e I_e \left\{ \sin\omega t \sin(\omega t - \theta) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right\}$$

$$= E_e I_e \left\{ \cos\theta - \cos(2\omega t - \theta) + \cos\theta - \cos\left(2\omega t - \theta - \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\theta - \cos\left(2\omega t - \theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right\}$$

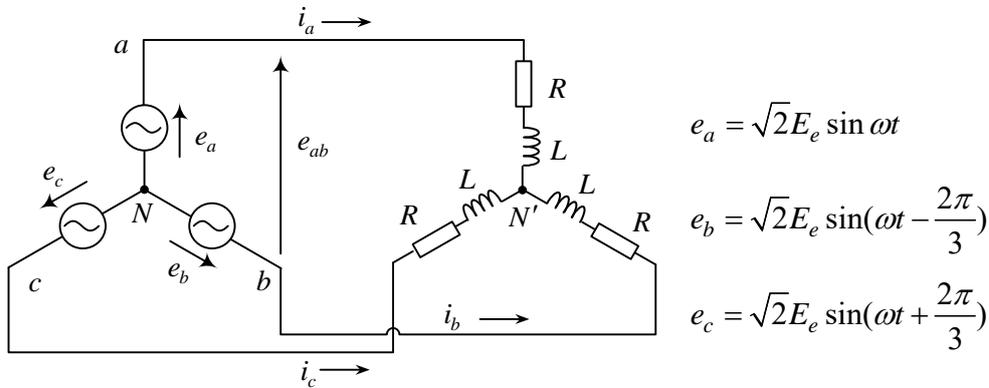
$$= 3E_e I_e \cos\theta \quad (9-13)$$

瞬時電力は脈動せず、一定値である。 $p = P$  (平均値) が成立する。

(注) 電力の計算法は、いろいろある。抵抗分と電流が既知なら  $P = 3R|I_a|^2$  が速い。三相電源が供給する電力は当然三相負荷で消費される電力と等しい。

例題1 図のような対称三相交流回路で相電圧の瞬時値が以下様に与えられている。

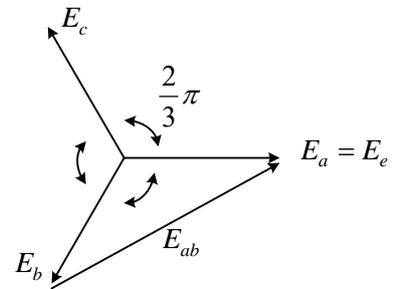
- (1) 線間電圧のフェーザ  $E_{ab}$  と瞬時値  $e_{ab}$  を求めよ。  
 (2) 線電流のフェーザ  $I_a, I_b, I_c$  と瞬時値  $i_a, i_b, i_c$  を求めよ。



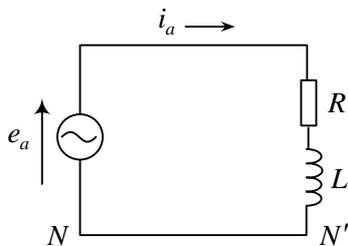
(解) (1) 相電圧  $E_a, E_b, E_c$  と線間電圧  $E_{ab}$  のフェーザ図を書くと図のようになる。図より、

$$E_{ab} = \sqrt{3} E_e e^{j\frac{\pi}{6}}$$

よって、瞬時値は  $e_{ab} = \sqrt{6} E_e \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$



(2) 回路が対称なので、 $N, N'$  を結んでも電流は流れず、そのように考える。このとき、各相は独立となる。フェーザで考えると、



$$I_a = \frac{E_a}{R + j\omega L} = \frac{E_e}{R + j\omega L} = I_e e^{-j\theta}$$

ただし、 $I_e = \frac{E_e}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$  ,  $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$

従って、 $i_a = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \theta)$

b, c 相については、それぞれ a 相より  $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  遅れるから\*

$$I_b = I_e e^{-j(\frac{2}{3}\pi + \theta)}, \quad I_c = I_e e^{-j(\frac{4}{3}\pi + \theta)}$$

$$i_b = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \theta), \quad i_c = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t - \frac{4}{3}\pi - \theta)$$

\*c 相については、 $\frac{2}{3}\pi$  進むとし、 $I_c = I_e e^{j(\frac{2}{3}\pi - \theta)}$  ,  $i_c = \sqrt{2} I_e \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi - \theta)$  でも同じ。

○ 対称  $\Delta-\Delta$  回路 . . . . 対称  $\Delta$  形電源に対称  $\Delta$  形負荷を接続した回路

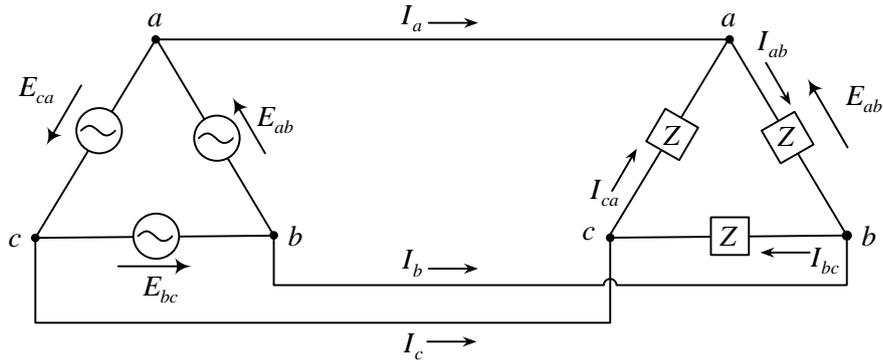
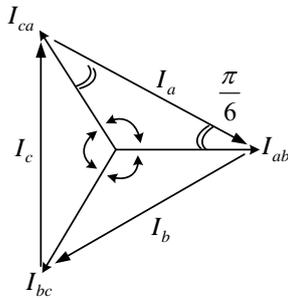


図 9-8 対称  $\Delta-\Delta$  回路

負荷について、図の回路より（同電位の線を色で塗ってみよう）、

$$I_{ab} = \frac{E_{ab}}{Z}, \quad I_{bc} = \frac{E_{bc}}{Z} = e^{-j\frac{2}{3}\pi} I_{ab}, \quad I_{ca} = \frac{E_{ca}}{Z} = e^{j\frac{2}{3}\pi} I_{ab} \quad (9-14)$$



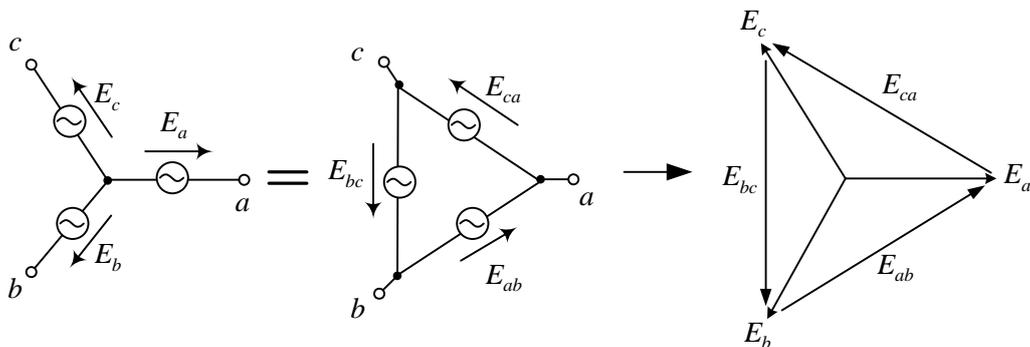
左図より,  $I_a = I_{ab} - I_{ca} = \sqrt{3} I_{ab} e^{-j\frac{\pi}{6}}$  (9-15)

また,  $|I_a| = \sqrt{3} |I_{ab}|$  (9-16)

線電流 =  $\sqrt{3}$  ×  $\Delta$  電流



対称 Y 形電源は等価な対称  $\Delta$  形電源に書き換えることができる。

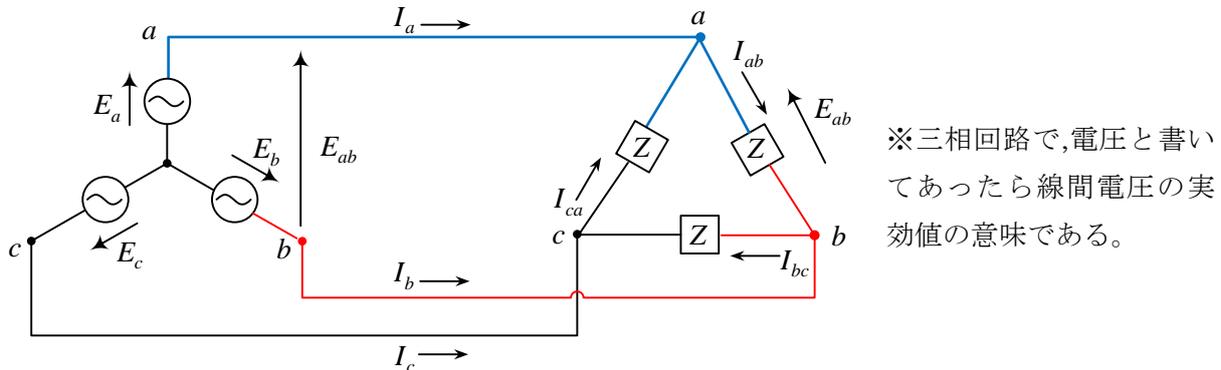


すなわち,  $E_{ab} = E_a - E_b = \sqrt{3} E_a e^{j\frac{\pi}{6}}$ ,  $E_{bc} = E_b - E_c = \sqrt{3} E_b e^{-j\frac{2}{3}\pi}$ ,  $E_{ca} = E_c - E_a = \sqrt{3} E_c e^{j\frac{2}{3}\pi}$

のとき a,b,c の端子に関して等価となる。もちろん,  $E_a$  と  $E_{ab}$  を流れる電流は異なる。

対称  $\Delta$  形電源では,  $E_{ab}, E_{bc}, E_{ca}$  の中の 1 つの電源が無くても負荷にかかる電圧は変わらず流れる電流  $I_a, I_b, I_c$  に変化は無い。V 結線と呼ばれ, 電源が 1 つ故障した場合でも電力を送ることができる。対称 Y- $\Delta$  回路では, Y- $\Delta$  変換を用いて対称  $\Delta$  形負荷を対称 Y 形負荷に変換すると計算が簡単になる。対称  $\Delta-\Delta$  回路ではすぐに電流を計算できるから Y- $\Delta$  変換の必要性はない。なお, 負荷に  $\Delta$  形と Y 形が混在している場合にはどちらかの形の負荷に統一すると計算しやすい。Y- $\Delta$  変換については第 13 章例題 3 を参照のこと。

例題2 電源がY結線で、負荷がΔ結線なるY-Δ対称回路がある。線電流 $I_a, I_b, I_c$ 及び負荷側相電流 $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$ を求めよ。ただし、電圧200Vで、 $Z = 36 + j27 \Omega$ とする。



(解)  $E_{ab}$ を基準フェーザと考えると、次式のようにおける。

$$E_{ab} = 200 \quad , \quad E_{bc} = 200e^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad , \quad E_{ca} = 200e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

負荷側の相電流は、

$$I_{ab} = \frac{E_{ab}}{Z} = \frac{200}{36 + j27} = \frac{40}{9}e^{-j\theta} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

$I_{bc}, I_{ca}$ は位相がそれぞれ $\frac{2}{3}\pi$ 遅れ、 $\frac{2}{3}\pi$ 進みであるから、

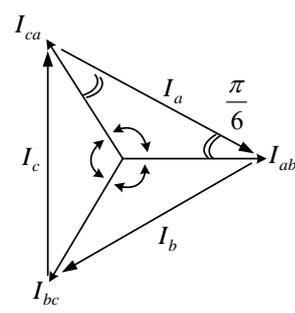
$$I_{bc} = I_{ab}e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40}{9}e^{-j(\theta + \frac{2}{3}\pi)} \quad , \quad I_{ca} = I_{ab}e^{j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40}{9}e^{-j(\theta - \frac{2}{3}\pi)}$$

線電流 $I_a$ は、フェーザ図より $I_{ab}$ の $\sqrt{3}$ 倍で、位相は $\frac{\pi}{6}$ 遅れる。よって、

$$I_a = \sqrt{3}I_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta + \frac{\pi}{6})}$$

$$I_b = I_a e^{-j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta + \frac{5\pi}{6})}$$

$$I_c = I_a e^{j\frac{2}{3}\pi} = \frac{40\sqrt{3}}{9}e^{-j(\theta - \frac{\pi}{2})}$$



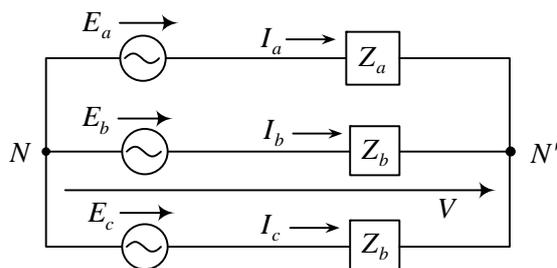
(検討) フェーザ図が書けると大きさと位相の関係がすぐわかるので、楽に答えを出すことができる。問題が“線電流と負荷電流を求めよ。”の場合には答えは以下のように簡単になる。

$$|I_{ab}| = \left| \frac{E_{ab}}{Z} \right| = \frac{|E_{ab}|}{|Z|} = \frac{200}{|36 + j27|} = \frac{40}{9} \text{ A}$$

線電流 $I_a$ の大きさは、 $I_{ab}$ の $\sqrt{3}$ 倍だから、 $|I_a| = \sqrt{3}|I_{ab}| = \frac{40}{9}\sqrt{3} \text{ A}$

メータの読み=実効値=フェーザの絶対値 を忘れるな！

○ 非対称三相回路



$N, N'$  : 中性点

図 9-9 非対称三相回路

非対称回路では、 $E_a, E_b, E_c$  及び  $Z_a, Z_b, Z_c$  が任意の値をもつ。この場合には、3つの回路には分離できず、

$$I_a = \frac{E_a}{Z_a} \quad \longleftarrow \quad \text{成立せず!!}$$

として計算することはできない。従って、キルヒホッフの法則より求めるしかない。閉路方程式を立てて解くこともできるが、一番うまい方法は中性点間の電圧  $V$  を用いる方法で、これを紹介しよう。

$$\text{図より, } I_a = \frac{E_a - V}{Z_a}, \quad I_b = \frac{E_b - V}{Z_b}, \quad I_c = \frac{E_c - V}{Z_c} \quad (9-17)$$

$N$  点において、 $I_a + I_b + I_c = 0$  だから

$$\frac{E_a - V}{Z_a} + \frac{E_b - V}{Z_b} + \frac{E_c - V}{Z_c} = 0 \quad (9-18)$$

$$Y_a(E_a - V) + Y_b(E_b - V) + Y_c(E_c - V) = 0 \quad (9-19)$$

$$\text{但し, } Y_a = \frac{1}{Z_a}, \quad Y_b = \frac{1}{Z_b}, \quad Y_c = \frac{1}{Z_c} \quad : \text{アドミタンス} \quad (9-20)$$

$$\therefore V = \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \quad (9-21)$$

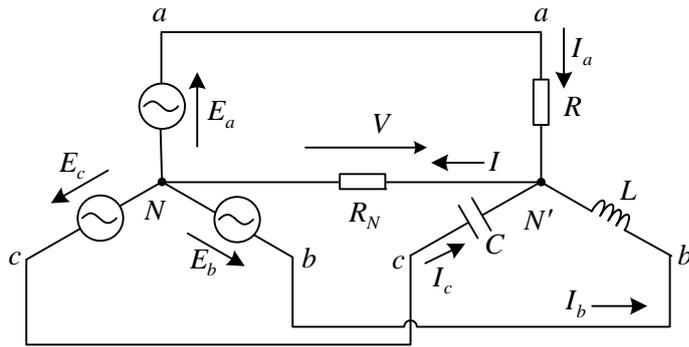
従って、

$$\begin{aligned} I_a &= Y_a(E_a - V) \\ &= Y_a \cdot \frac{Y_b(E_a - E_b) + Y_c(E_a - E_c)}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned} \quad (9-22)$$

$I_b, I_c$  も同様に求まる。

(注意) 非対称といっても、電源電圧の周波数は三相とも同じである。これが違うと、各フェーズ同士の演算が意味をなさない。非対称電源は、各相電圧の実効値と初期位相が違う。対称電源、対称負荷では  $Y_a = Y_b = Y_c$ ,  $E_a + E_b + E_c = 0$  だから  $V = 0$  となる ( $N, N'$  が結べる)。

例題3 非対称電源に非対称負荷が図のように接続されている。また、中性点  $N, N'$  は抵抗  $R_N$  の中性線をつないでいる。線電流  $I_a, I_b, I_c$  及び、中性線を通る電流  $I$  を求めよ。



$$\begin{aligned} e_a &= E_1 \sin(\omega t - \theta_1) \\ e_b &= E_2 \sin(\omega t - \theta_2) \\ e_c &= E_3 \sin(\omega t - \theta_3) \end{aligned}$$

とする。

(解)  $e_a, e_b, e_c$  のフェーズを  $E_a, E_b, E_c$  とすると、

$$E_a = \frac{E_1}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_1}, \quad E_b = \frac{E_2}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_2}, \quad E_c = \frac{E_3}{\sqrt{2}} e^{-j\theta_3} \quad \dots \textcircled{1}$$

各相及び中性線のアドミタンスをそれぞれ  $Y_a, Y_b, Y_c, Y_N$  とおくと、

$$Y_a = \frac{1}{R}, \quad Y_b = \frac{1}{j\omega L}, \quad Y_c = j\omega C, \quad Y_N = \frac{1}{R_N} \quad \dots \textcircled{2}$$

$N$  から見た  $N'$  点の電圧を  $V$  とおくと、

$$\begin{aligned} I_a &= Y_a(E_a - V), \quad I_b = Y_b(E_b - V), \quad I_c = Y_c(E_c - V) \\ I &= Y_N V \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

$N$  点では、キルヒホッフの法則より、

$$I_a + I_b + I_c = I \quad \dots \textcircled{4}$$

③を④に代入して、

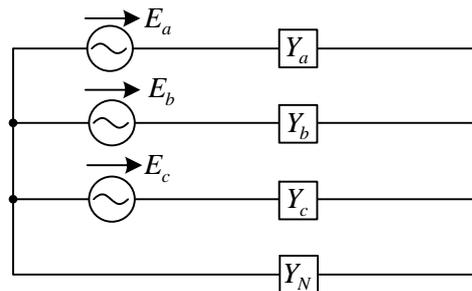
$$\begin{aligned} Y_a(E_a - V) + Y_b(E_b - V) + Y_c(E_c - V) &= Y_N V \\ \therefore V &= \frac{Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N} \end{aligned}$$

$V$  が求まると、③式より  $I_a, I_b, I_c, I$  が求まる。

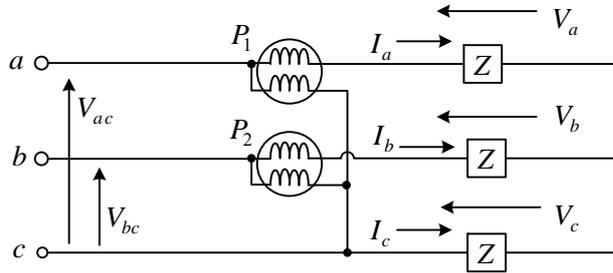
$$I_a = \frac{Y_a Y_b (E_a - E_b) + Y_a Y_c (E_a - E_c) + Y_a Y_N E_a}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N}$$

図の回路は、次のように書ける。

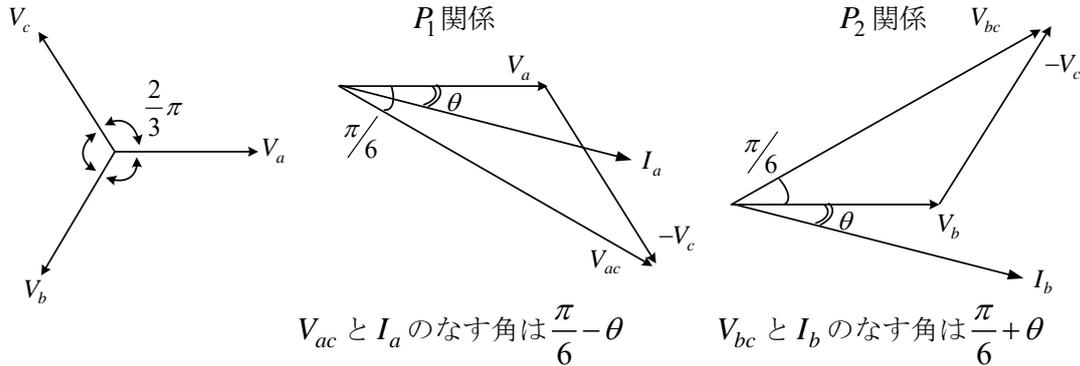
計算に使うなら、この方が見やすい。



例題 4 対称三相電源に対称な負荷が接続されており、電力計  $P_1, P_2$  を図のように接続して電力を測定した。 $|V_a|, |I_a|, \theta (= \arg Z)$  を用いて  $P_1$  を、 $|V_b|, |I_b|, \theta (= \arg Z)$  を用いて  $P_2$  を表せ。また負荷全体で消費される全電力を  $P_1, P_2$  で示せ。



(解) フェーザ図を考える。 $Z$  は誘導性負荷とし、 $I_a$  が  $V_a$  より遅れるとして書いた。



電力計は、電流×電圧× $\cos \varphi$  ( $\varphi$  は電流と電圧の位相差) を表示するので、

$$P_1 = |V_{ac}| |I_a| \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \sqrt{3} |V_a| |I_a| \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$P_2 = |V_{bc}| |I_b| \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) = \sqrt{3} |V_b| |I_b| \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

$|V_a| = |V_b|$  ,  $|I_a| = |I_b|$  であるから、①, ②より、

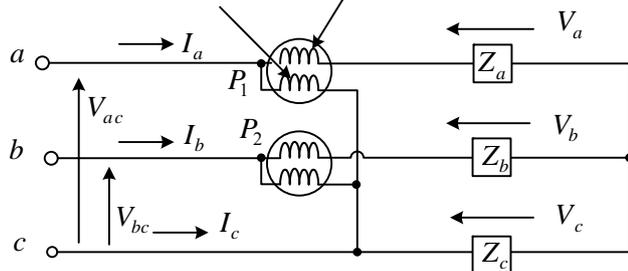
$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \sqrt{3} |V_a| |I_a| \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \right\} \\ &= \sqrt{3} |V_a| |I_a| \cdot 2 \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta = 3 |V_a| |I_a| \cos \theta = P \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

よって、三相負荷で消費される電力は  $P_1 + P_2$  で求まる。

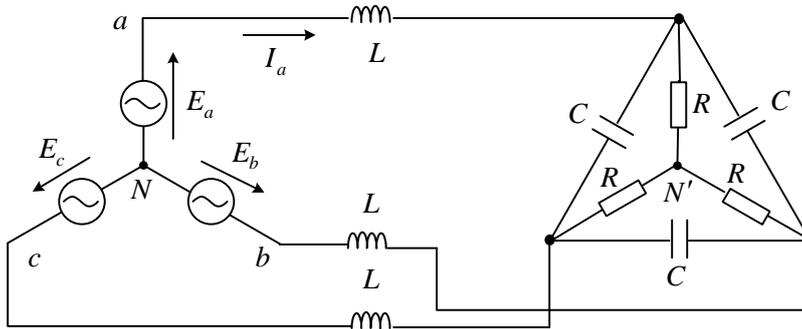
$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\bar{V}_a I_a + \bar{V}_b I_b + \bar{V}_c I_c) \\ &= \text{Re}(\bar{V}_a I_a + \bar{V}_b I_b - \bar{V}_c (I_a + I_b)) \\ &= \text{Re}((\bar{V}_a - \bar{V}_c) I_a + (\bar{V}_b - \bar{V}_c) I_b) \\ &= \text{Re}(\bar{V}_{ac} I_a + \bar{V}_{bc} I_b) \\ &= P_1 + P_2 \end{aligned}$$

この様に③の結果は当然で、対称三相負荷でなくても成り立つ。

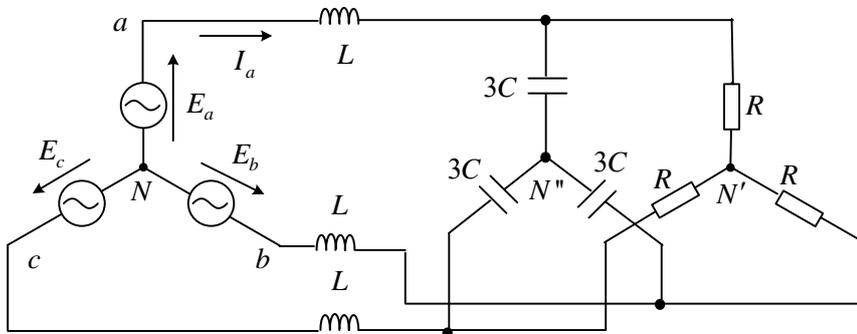
端子間の電圧を測る。電流を測る。抵抗0  
抵抗無限大で電流は0 と考える。



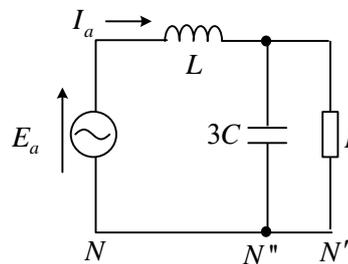
例題 5 対称三相電源に図の回路が接続されている。a 相に流れる電流  $I_a$  を求めよ。



(解) コンデンサ  $C$  で構成される  $\Delta$  回路を Y 結線に変換すると図の回路が得られる。



いま中性点  $N, N', N''$  を導線で接続する。このとき  $a, b, c$  相の電源に対して、 $L, 3C, R$  のつながり方は各相とも同じ条件である。つまりどこかの相の電流が流れ易くなるといったことは考えられない。 $a, b, c$  相の電源電圧は大きさが等しく位相が  $2\pi/3$  ずつずれているだけなので、 $L, 3C, R$  に流れる電流も各相につながる順に位相が  $2\pi/3$  ずれると考えられる。 $2\pi/3$  位相のずれた電流の和は常に 0 である。よって  $N, N', N''$  を結んだ導線には電流が流れず、この導線は省いても電流の変化は無い。以上のことから図の  $N, N', N''$  は同電位で、これを導線で結んで考えても良いことが判った。導線で結ぶと回路は相ごとに分離でき以下の回路で電流が求められる。



図より、

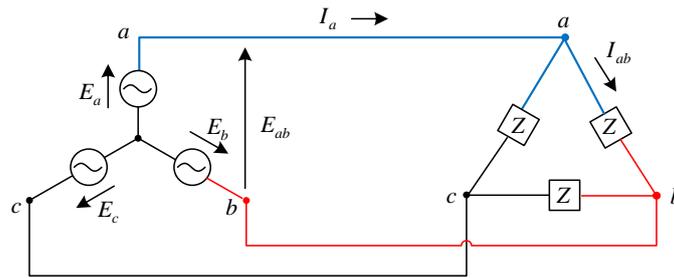
$$I_a = \frac{E_a}{j\omega L + \frac{R/(j3\omega C)}{R+1/(j3\omega C)}} = \frac{E_a}{j\omega L + \frac{R}{j3\omega CR+1}} = \frac{(j3\omega CR+1)E_a}{R-3\omega^2 LCR+j\omega L}$$

(注)非対称電源の場合も  $N', N''$  だけは導線で結ぶことが可能である。問題の回路で  $R$  を  $\Delta$  回路に変換して  $C$  とインピーダンス合成し、その後 Y 回路に変換すればよい (これは電源に無関係)。

問題 1. 各相のインピーダンスが、 $6 + j8 \Omega$  である星形負荷(Y)を  $200V$  の対称三相電源に接続する。線電流の実効値及び全消費電力を求めよ。(注)  $200V$  は線間電圧の実効値を意味する。

(答) 線電流の実効値  $= \frac{200/\sqrt{3}}{|6 + j8|} = \frac{20}{\sqrt{3}} A$  , 電力  $= 3 \times \frac{200}{\sqrt{3}} \times |I| \cos \theta = 2400 W$

問題 2. 電源電圧のフェーズが、 $E_a = 100 V, E_b = 100 e^{-j\frac{2}{3}\pi} V, E_c = 100 e^{j\frac{2}{3}\pi} V$  , 負荷のインピーダンスが、 $Z = 1 + j \Omega$  である図の三相回路について、電圧  $E_{ab}$  , 電流  $I_{ab}$  ,  $I_a$  を求めよ。答えは、指数関数形式 ( $re^{j\theta}$ ) の形に整理せよ。



(答)  $E_{ab} = 100\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}} V$  ,  $I_{ab} = 100\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-j\frac{\pi}{12}} A$  ,  $I_a = \sqrt{3}I_{ab}e^{-j\frac{\pi}{6}} = \frac{300}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}} A$

(注)  $I_a$  だけを求めるなら、負荷の Y- $\Delta$  変換を利用すると簡単である。

問題 3.  $200V$  の対称三相電源に、図に示す負荷が接続されている。線電流  $|I_a|$  を求めよ。

(答)  $I_a = \frac{Y_a Y_b (E_a - E_b) + Y_a Y_c (E_a - E_c)}{Y_a + Y_b + Y_c}$  (9-22)

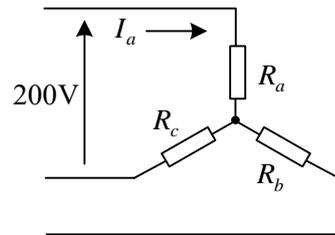
$Y_a = 1, Y_b = 2, Y_c = 4$

$E_a - E_b = 200$  (基準フェーズに選ぶ)

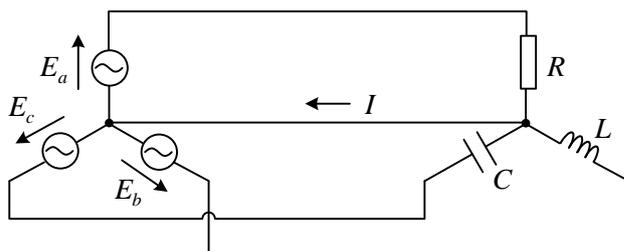
$E_a - E_c = 200e^{-j\frac{\pi}{3}}$  より

$|I_a| = \frac{400\sqrt{7}}{7} A$

$R_a = 1 \Omega \quad R_b = 0.5 \Omega \quad R_c = 0.25 \Omega$



問題 4. 図のように対称三相交流電圧  $E_a, E_b, E_c$  を加えたとき、中性線電流  $I$  が 0 となる条件を求めよ。(ヒント: 各相の電流を求め、その和  $I$  の実部と虚部を 0 とおく)



$I = \frac{E_e}{R} + \frac{E_e}{j\omega L} e^{-j\frac{2}{3}\pi} + j\omega C E_e e^{j\frac{2}{3}\pi}$

(答)

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  ,  $R = \sqrt{\frac{L}{3C}}$

# 第 10 章 変成器 (変圧器)

変成器は主として、交流電圧を高くしたり、低くしたりする用途に用いられ、変圧器 (トランス) とも呼ばれる。鉄心に 2 つのコイルを巻いて作り、一般にこれらのコイルはお互いに絶縁されている。鉄心の中は空気中に比べ磁束が通り易い。

## ○ 変成器 (変圧器) (transformer) とは

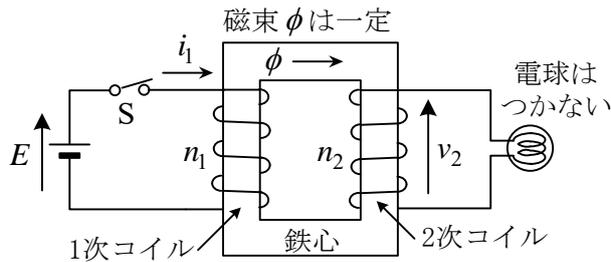


図 10-1 変成器 (直流電源接続)

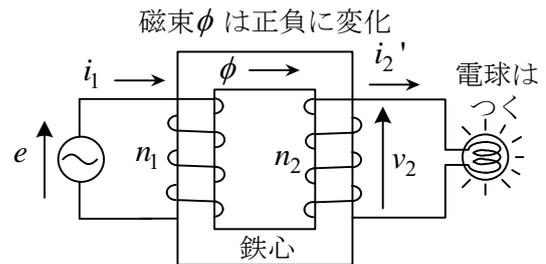


図 10-2 変成器 (交流電源接続)

図 10-1 の場合には電球はつかないが図 10-2 の場合には電球がつく。この理由は、図 10-2 の場合、交流電圧  $e$  によって交流電流  $i_1$  が流れ、それが変化する磁束  $\phi$  を作り、磁束が変化すると、電磁誘導の法則により **二次コイル** に電圧  $v_2$  が発生するからである。図 10-1 の場合にも、スイッチ  $S$  を入れると  $i_1$  が流れ磁束  $\phi$  ができるが、 $\phi$  は時間的に変化しないので電圧  $v_2 = 0$  であり、電球はつかない。図 10-1 でも、スイッチ  $S$  を入れたり、切ったりした瞬間には、電流や磁束が変化し、電球に短時間電流が流れる。ただ、コイルはスイッチを切るとき火花が出るので注意がいる。

さて、図 10-2 で**一次コイル**の巻数を  $n_1$ 、2 次コイルの巻数を  $n_2$  とすると、理想的には、電圧は  $e : v_2 = n_1 : n_2$  (巻数に比例) が成立する。また、電流は、 $i_1 : i_2' = n_2 : n_1$  (巻数に反比例)、電力は、 $e i_1 = v_2 i_2'$  が成立する。そこで**理想変成器**を図 10-3 のように表示し、次式が成り立つとする。

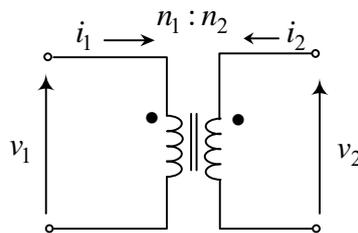


図 10-3 理想変成器(ideal transformer)の表示

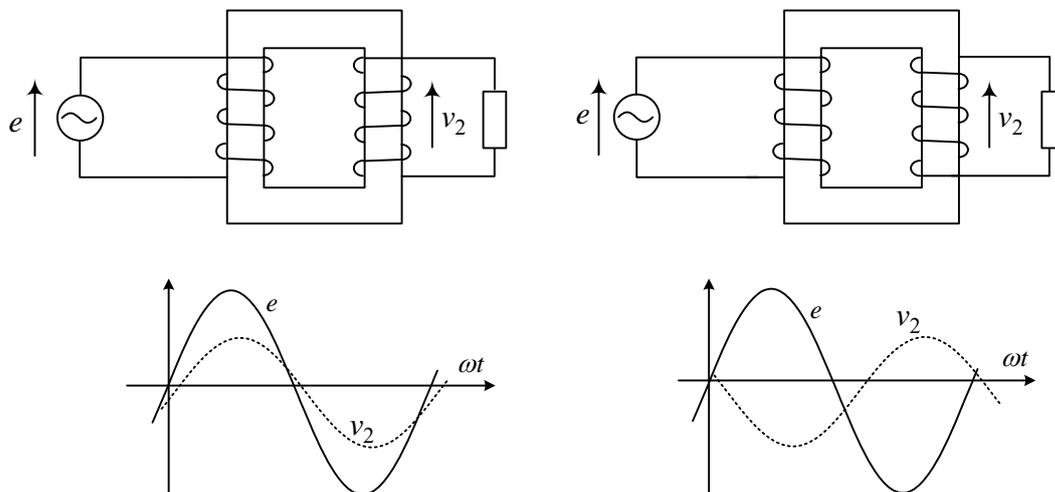
電圧 (交流) の関係式:  $v_1 : v_2 = n_1 : n_2$  (10-1)

電流 (交流) の関係式:  $n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$  (10-2)

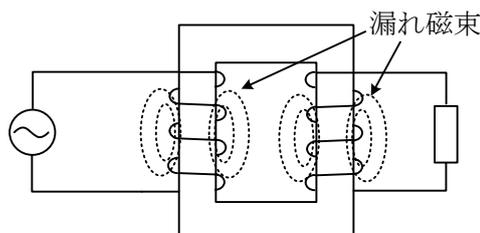
(10-1)は**密結合の条件**、(10-2)は**励磁電流(exciting current) 0 の条件**とも呼ばれる。ただし、図のドット (• 印) のところに電圧の矢印の先端をとり、電流は•印のところから変成器に入る向きに矢印を選ぶものとする (矢印を逆に選ぶとその分マイナスがつく)。これらの式は電圧、電流が時間とともに変化することが必要で、交流回路やスイッチを入れた後の直流回路で成立する。

以上で、話が終わりならいいのだけれど、現実には作られている変成器は理想通りにはいかない。何が理想からずれてくるのか、その話をしよう。

1. 理想的で無くなった訳ではないが、コイルの巻き方で、電圧  $v_2$  の極性が違ってくる。これをドット（●印）で表現する（後述）。両方逆巻きなら電圧と電流の関係は変わらない。

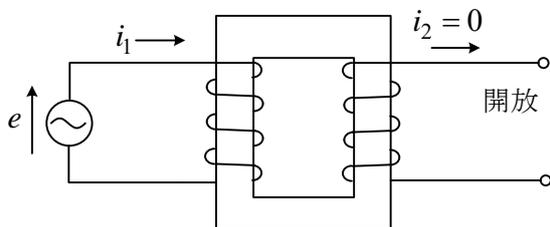


2. 鉄心の外に少し漏れる磁束線（磁束）がある。回路では**漏れ磁束** (leakage flux)として式を作る。電圧の比と巻数の比が完全には一致しなくなる原因の1つとなる。漏れ磁束がない場合を**密結合**といい、後で述べるように、 $L_1 L_2 = M^2$  が成立する。磁束の大部分は空気より鉄心の中を通る。



3. **巻線抵抗**がある。電圧の比と巻数の比が完全には一致しなくなる原因の1つとなる。また、損失を生じる。電気回路では最初から巻線抵抗は除いて考える。

4. **励磁電流**が流れる。2次コイルを開放した状態（無負荷）では、二次コイルはあっても、無くても同じことである。この場合、一次コイルのみで  $i_1$  が決まる。この  $i_1$  を**励磁電流**  $i_0$  という。鉄心の**透磁率**  $\mu$  の大きい材料ではインダクタンスが大きく、 $i_0$  は小さな値となる。励磁電流が流れると、 $i_1 : i_2 = n_2 : n_1$  が成立しなくなる。

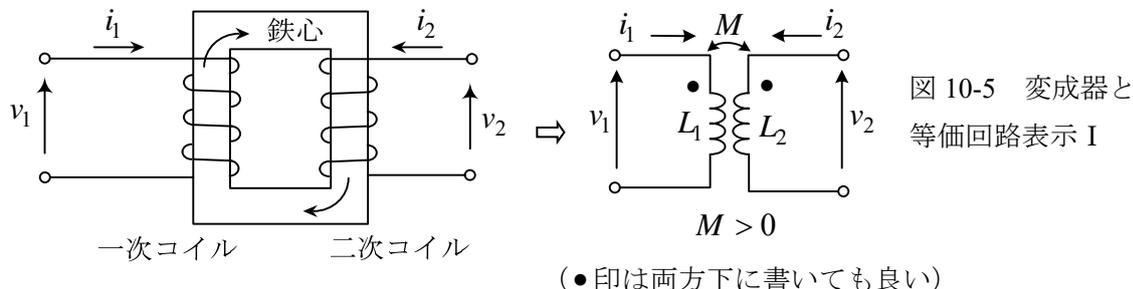


回路では、一次コイルの**自己インダクタンス**  $L_1$ 、二次コイルの**自己インダクタンス**  $L_2$ 、**相互インダクタンス**  $M$ （●印付き）を用いて変成器を表現する。この中に、上記1, 2, 4の情報が含まれる。後で述べるが、理想変成器の場合には、密結合、巻線抵抗 0、励磁電流 0 であり、単に●印と巻数比だけで表現される。理想変成器には、インダクタンスの成分は何も残らない。

変成器は話が複雑だから、まず、約束を覚えて、変成器の式が立てられるようになろう。

## ○ 変成器の基本式

回路では変成器を，一次コイルの**自己インダクタンス**  $L_1$  [H]，二次コイルの**自己インダクタンス**  $L_2$  [H]，**相互インダクタンス**  $M$  [H]（●印付き）を用いて表現する。

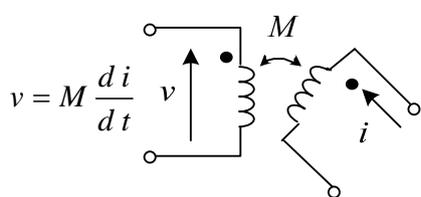


電圧，電流の矢印（測定の向き）を図のようにとると，次式が成り立つ。

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (10-3)$$

一次コイルの**鎖交磁束**  $\psi_1$ （プサイ）は  $\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  で，二次コイルの**鎖交磁束**  $\psi_2$  は  $\psi_2 = L_2 i_2 + M i_1$  であり，それらを微分するとそれぞれ電圧  $v_1, v_2$  となっている。

ドット（●印）は， $M$  の測定方向を示すものである。図 10-5 のように，●の所から変成器に入る向きに電流  $i$  を定義するとき，相手のコイルの●印に矢の先端がある電圧  $v$  を測り，その係数から  $M$ （正とは限らぬ）を求める。図のように矢印を選ぶと  $M$  の項にマイナスが付かない。 $L_1, L_2$  の項はコイルの関係式で●印は関係ない（(10-3)で  $M = 0$  としたら別々のコイルの式だ）。

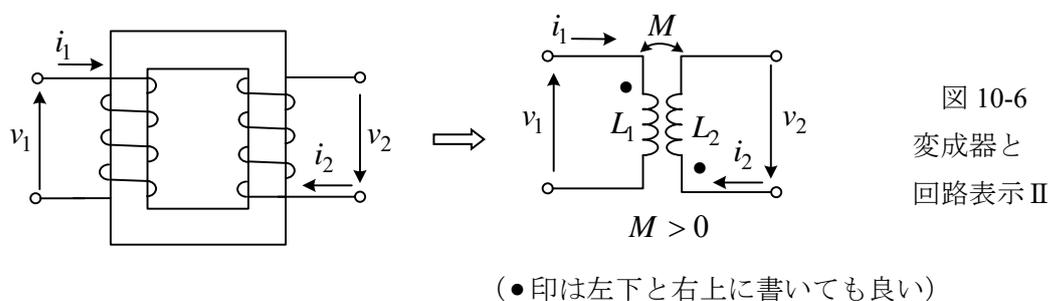


- 印のところから変成器に電流が流れ込む向きに電流  $i$  を定義すると，相手方の
- 印に電圧の矢の先端がある向きに電圧  $M \frac{di}{dt}$  が発生する。
- 印は  $M$  だけに関係する。



図 10-5 相互インダクタンスの式の立て方

巻き方が図 10-6 の場合も，電圧，電流の矢印を図のようにとると，(10-3)が成り立つ。

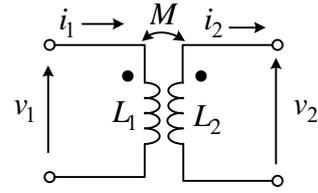


(注) 図 10-5 と図 10-6 の回路で， $i_2$  と  $v_2$  の矢印を逆向きに定義しているのでも，全く同じ式となっている。I と II では 2 次の電圧と電流の符号が反転するだけで，大きな差がある訳ではない。

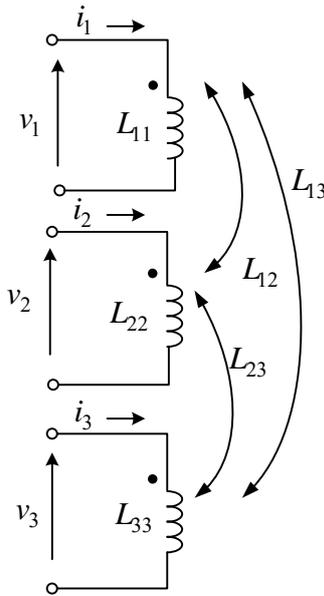
問題：図の変成器で電圧と電流の矢印を図のように定義したとき、  
成り立つ式を書け。

(答)

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



3個のコイルから成る変成器に成り立つ式を以下に示す。



瞬時値 (交流, 直流, 定常, 過渡に関係なく常に成立)

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + L_{13} \frac{di_3}{dt} \quad (10-4)$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt} \quad (10-5)$$

$$v_3 = L_{13} \frac{di_1}{dt} + L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt} \quad (10-6)$$

$L_{11}, L_{22}, L_{33}$  : 自己インダクタンス (常に正である)

$L_{12}, L_{23}, L_{13}$  : 相互インダクタンス (正とは限らぬ)

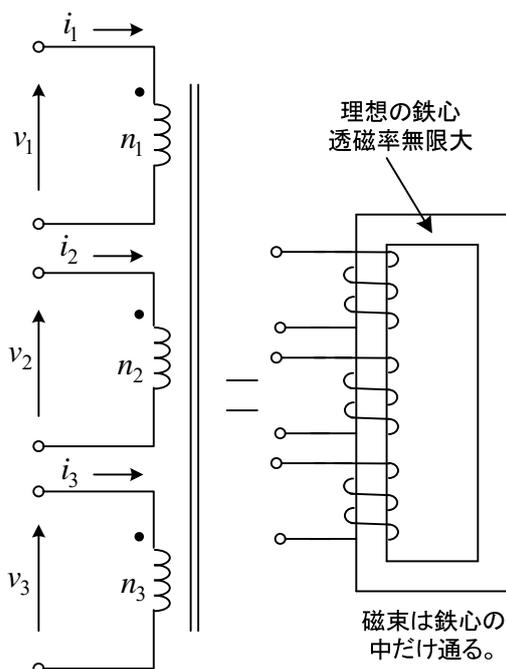
フェーザ表示 (交流の定常状態のみで成立)

$$V_1 = j\omega L_{11}I_1 + j\omega L_{12}I_2 + j\omega L_{13}I_3 \quad (10-7)$$

$$V_2 = j\omega L_{12}I_1 + j\omega L_{22}I_2 + j\omega L_{23}I_3 \quad (10-8)$$

$$V_3 = j\omega L_{13}I_1 + j\omega L_{23}I_2 + j\omega L_{33}I_3 \quad (10-9)$$

理想変成器については以下の式が成り立つ。



図の理想変成器は、同じ鉄心に3個のコイル (巻数  $n_1, n_2, n_3$ ) が巻かれており、巻数だけで電圧と電流の関係が決まる。

瞬時値 (交流回路で常に成立)

・密結合の条件

$$v_1 : v_2 : v_3 = n_1 : n_2 : n_3 \quad (10-10)$$

・励磁電流0の条件

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0 \quad (10-11)$$

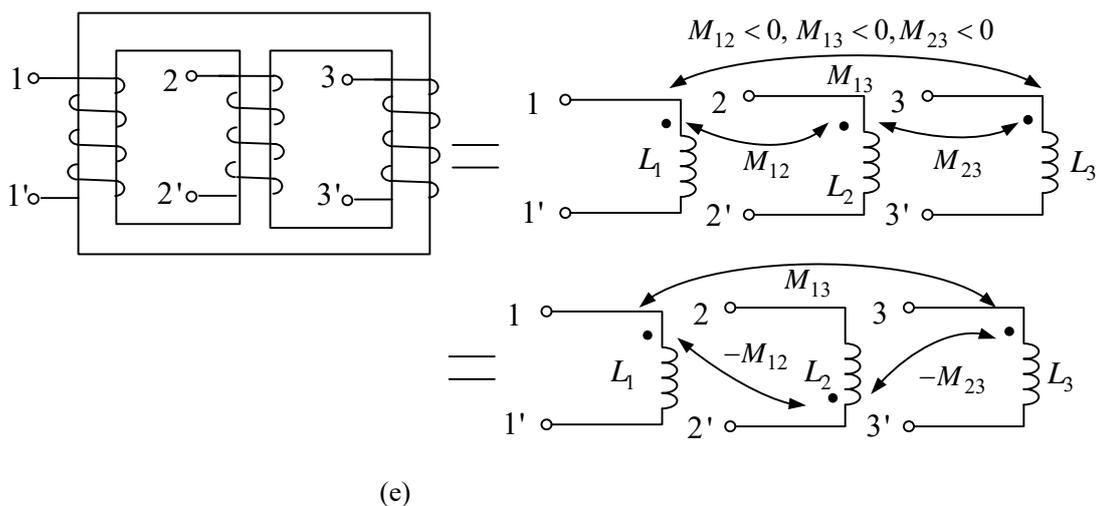
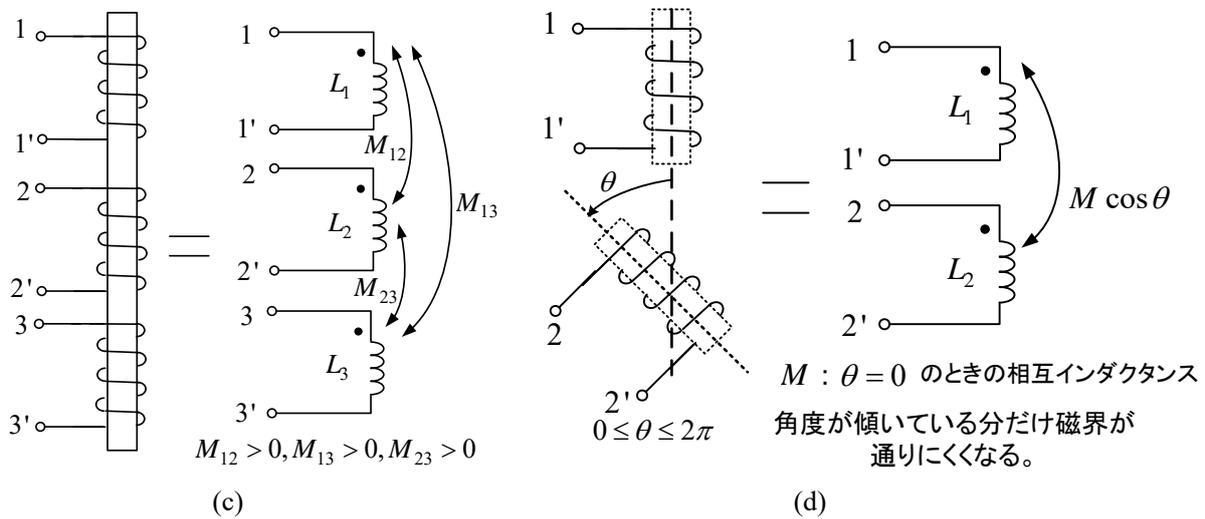
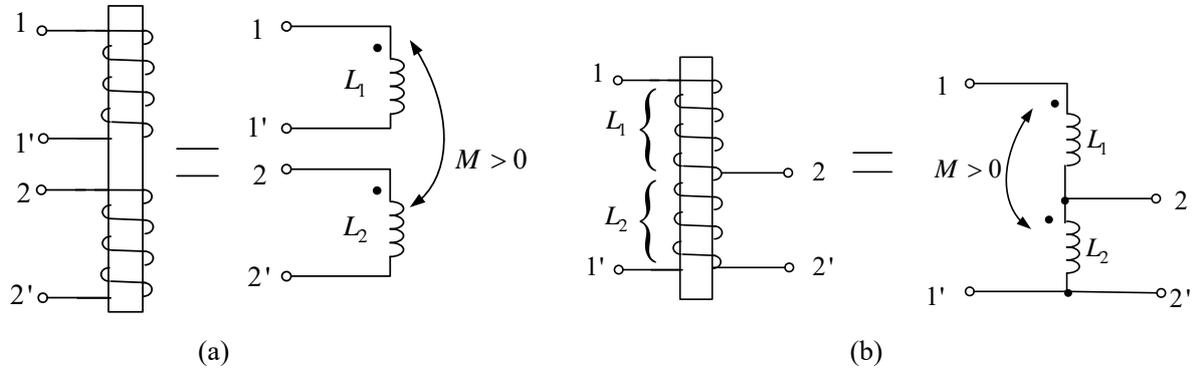
フェーザ表示 (交流の定常状態のみで成立)

$$V_1 : V_2 : V_3 = n_1 : n_2 : n_3 \quad (10-12)$$

$$n_1 I_1 + n_2 I_2 + n_3 I_3 = 0 \quad (10-13)$$

・印と電圧, 電流の矢印の選び方に注意せよ。矢印を逆に選ぶとその分マイナスが必要である。

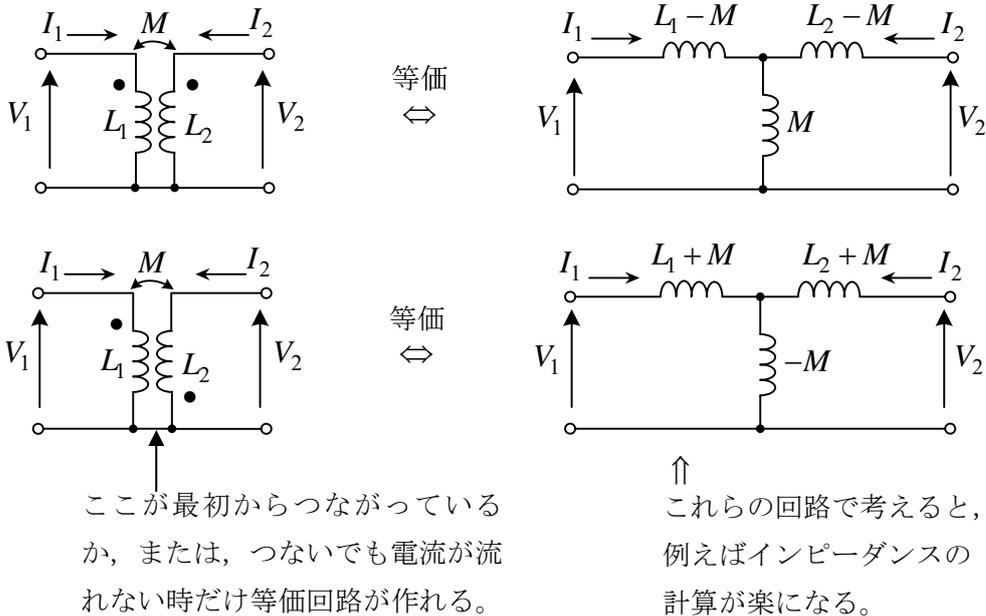
鉄心にコイルを巻いた種々の変成器を、回路でどのように表現するかを以下に示す。回路の表し方は1つには決らない。●印をどのようにつけるかは、相互インダクタンスの測定の仕方に関係する。●印の位置を変えて、その分相互インダクタンスにマイナスをつけると、それも1つの表し方である。以下では、標準的と考えられる回路を示す。



2つのコイルで、●印の所からコイルに電流が流れ込んだとき鉄心にできる磁界が強めあうなら、その相互インダクタンスは正となる。(a)~(c)の場合は図のように●印を選んで相互インダクタンスは全て正にできる。(d)の場合は、 $\theta = \pi$  のとき相互インダクタンスは $-M$ となる。(e)の場合は、どのように●印を選んでも相互インダクタンスを全て正にすることはできない。

○ 変成器の等価回路(equivalent circuit)

変成器をコイルだけの等価回路で表すと計算が容易になることがある。



上段の回路について説明しよう。左右の回路で式を立てるとそれぞれ次式が得られる。

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

$$V_1 = j\omega(L_1 - M)I_1 + j\omega M(I_1 + I_2)$$

$$= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega(L_2 - M)I_2 + j\omega M(I_1 + I_2)$$

$$= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

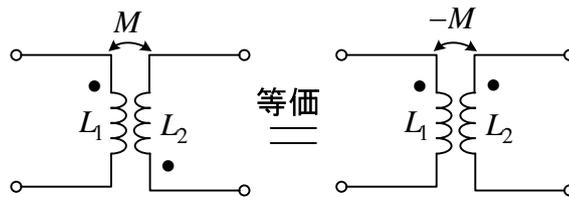
両者の関係が等しいので等価である。

下段の回路については次式が成立する。

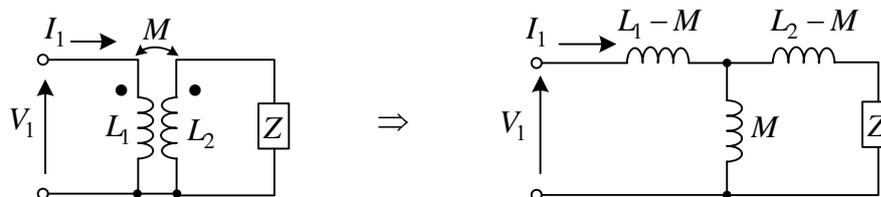
$$V_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1$$

右の図のように・印を動かして  $-M$  にすれば等価である。

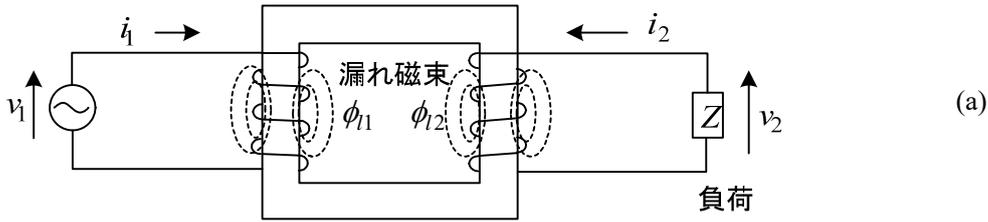


\* 入力インピーダンス  $Z_0 = \frac{V_1}{I_1}$  は等価回路を使うと以下のように計算できる。

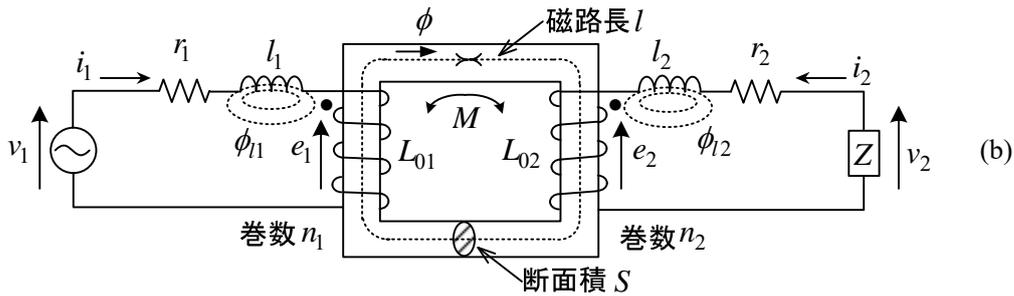


$$Z_0 = j\omega(L_1 - M) + \frac{j\omega M \{j\omega(L_2 - M) + Z\}}{j\omega(L_2 - M) + j\omega M + Z} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z}$$

実際に使われている変圧器の等価回路を示す。以下の回路は最後の1つを除き全て等価である。回路で使う変成器や理想変成器と実際の変圧器の違いが明確となる。



巻線抵抗  $r_1, r_2$  と漏れ磁束を作るインダクタンス (漏れインダクタンス  $l_1, l_2$ ) を変圧器の外に出す。



残りの変圧器は漏れ磁束がないので、密結合変圧器である。このとき、インダクタンスは、

$$L_{01} = \frac{n_1^2}{R_m}, \quad L_{02} = \frac{n_2^2}{R_m}, \quad M = \frac{n_1 n_2}{R_m} \quad (10-14)$$

但し、 $R_m$  は磁気抵抗と呼ばれ、 $R_m = l/(\mu S)$ 、 $\mu$  : 鉄心の透磁率(permeability)

$l$  : 鉄心の磁路長 (有効長さ)、 $S$  : 鉄心の断面面積 ((10-14)は電磁気学で習う)  
 で与えられ、 $L_{01}L_{02} = M^2$  (密結合条件) が成立する。また、(10-14)より次の関係もある。

$$\frac{L_{01}}{M} = \frac{M}{L_{02}} = \frac{n_1}{n_2} = a \quad (\text{巻数比 turn ratio}) \quad (10-15)$$

図のように、 $i_1, i_2, e_1, e_2$  及び磁束  $\phi$  の測定の向きを選ぶと、コイルの巻き方を考慮して

$$\phi = \frac{F}{R_m} = \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{R_m} \quad \text{ここで、} F : \text{起磁力} \text{と呼ばれる。} \quad (10-16)$$

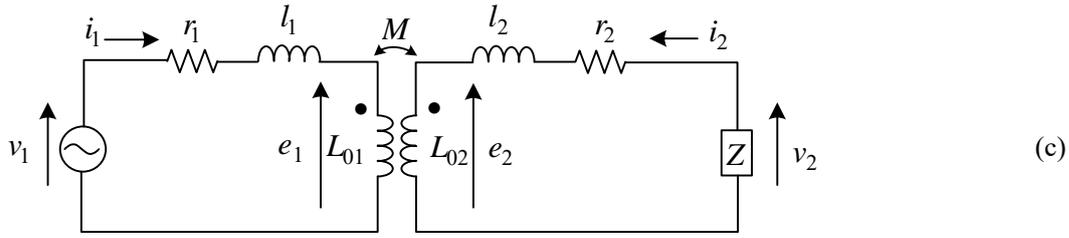
$$e_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt}, \quad e_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (10-17)$$

(10-16), (10-17)より

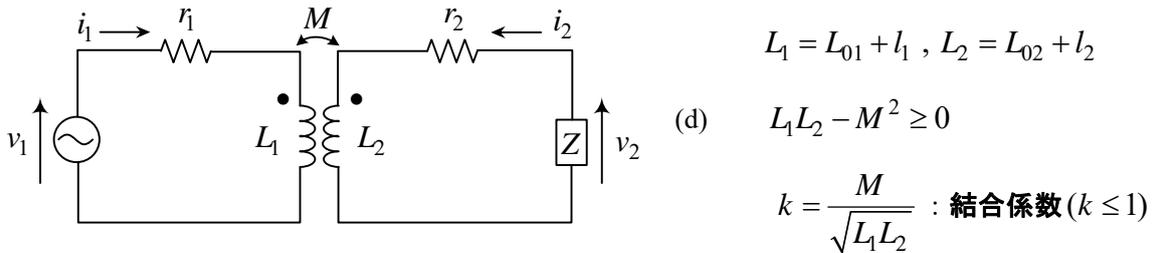
$$e_1 = \frac{n_1^2}{R_m} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1 n_2}{R_m} \frac{di_2}{dt} = L_{01} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (10-18)$$

$$e_2 = \frac{n_1 n_2}{R_m} \frac{di_1}{dt} + \frac{n_2^2}{R_m} \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_{02} \frac{di_2}{dt} \quad (10-19)$$

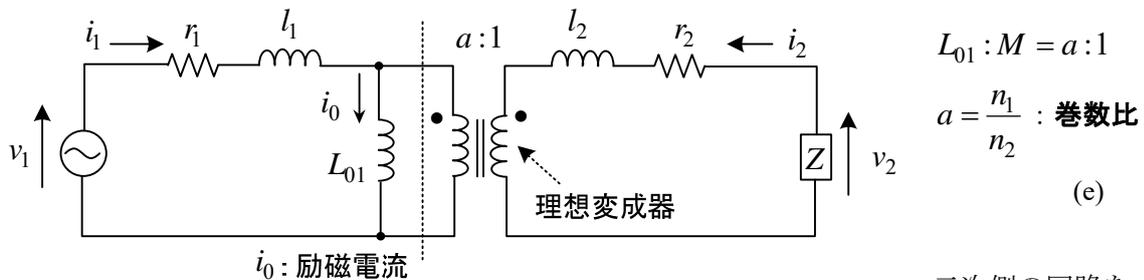
(b)の回路は鉄心を省いて、



と書ける。電気回路で用いる変成器(中央部)は、 $l_1$ と $L_{01}$ 、 $l_2$ と $L_{02}$ をまとめて次のように書く。

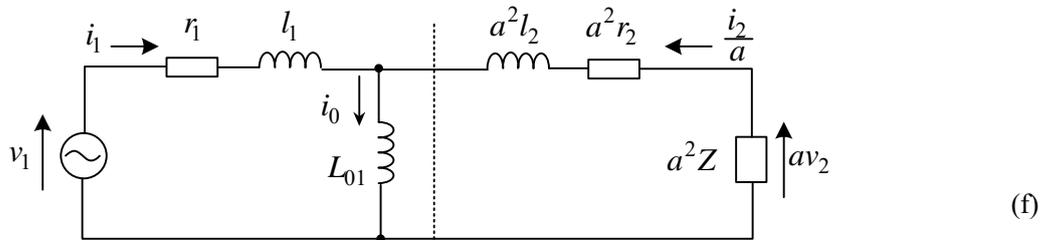


(c)の回路は、理想変圧器を用いると、次のように書ける(例題2で証明する)。

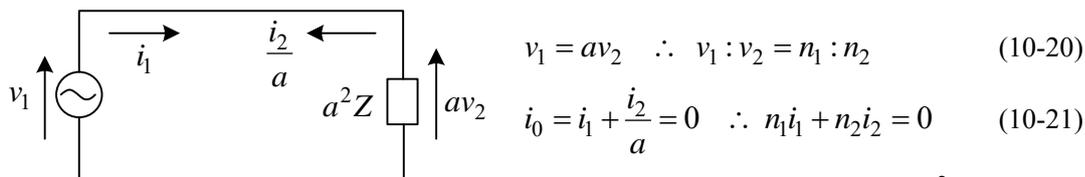


二次側の回路を一次側

に換算すると、(f)の実用上重要な回路を得る。(記憶しておきたい回路)



理想変成器は、 $r_1 = r_2 = 0$ 、 $l_1 = l_2 = 0$ 、 $L_{01} = \infty$ であるから、



一次側から見たインピーダンス  $a^2 Z$

理想変成器には何も残らず、電圧、電流を巻数比に変換するのみである。漏れ磁束がなければ、 $l_1 = l_2 = 0$  だから、(10-20)は密結合(漏れがない)の条件といえる。(10-21)は励磁電流  $i_0$  を 0 と置いた式で励磁電流 0 の条件と言える。励磁電流は鉄心の中に磁束を作るための電流で、 $L_{01}$  が大きいとほとんど流れない。励磁電流は等価回路を書かないと理解しにくい。

例題1 図の理想変成器の回路で、 $e = 100\sqrt{2} \sin \omega t$  と

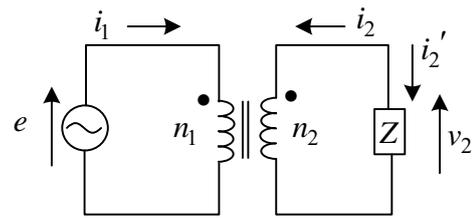
する。このとき、 $i_1, i_2, i_2', v_2$  を求めよ。

但し、次の2つの場合について答えよ。

(i)  $Z = R = 10 \Omega$

(ii)  $Z = R + j\omega L = 2 + j2 [\Omega]$

巻数は、 $n_1 = 50$  回、 $n_2 = 100$  回とする。



(解) (i) 密結合の条件より、 $e : v_2 = n_1 : n_2$

$$\therefore v_2 = \frac{n_2}{n_1} e = 200\sqrt{2} \sin \omega t \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\text{励磁電流 } 0 \text{ の条件より、} n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\text{負荷 } Z \text{ について、} v_2 = R i_2' = -R i_2 \quad (i_2 = -i_2')$$

$$\therefore i_2' = \frac{v_2}{R} = 20\sqrt{2} \sin \omega t \quad , \quad i_2 = -20\sqrt{2} \sin \omega t \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より、} i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2 = 40\sqrt{2} \sin \omega t \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

(ii)  $Z = 2 + j2$  の場合、フェーザ (大文字使用) で考える。 $e$  のフェーザ  $E$  は、 $E = 100$  と表せる。密結合の条件より、 $E : V_2 = n_1 : n_2$

$$\therefore V_2 = \frac{n_2}{n_1} E = 200 \quad \therefore v_2 = 200\sqrt{2} \sin \omega t$$

$$\text{負荷 } Z \text{ について、} V_2 = Z I_2'$$

$$I_2' = \frac{V_2}{Z} = \frac{200}{2 + j2} = \frac{100}{1 + j} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore i_2' = 100 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) \quad \therefore i_2 = -i_2' = -100 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

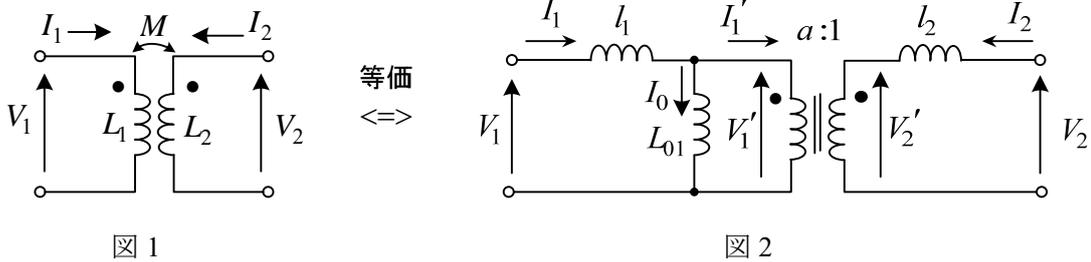
$$\text{励磁電流 } 0 \text{ の条件より、} n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$$

$$\therefore I_1 = -\frac{n_2}{n_1} I_2 = -2 I_2 \quad \therefore i_1 = -2 i_2 = 200 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$



抵抗負荷の③と④を見たら、 $i_1$  と  $i_2'$  が同相で変化しております。 $i_2$  にはマイナスがついとる。計算するときには、 $i_2$  と  $i_2'$  のどちらで計算しても構わんとです。 $i_2'$  を使うなら  $n_1 i_1 = n_2 i_2'$  となる。コイルが2つのときは  $i_2'$  の方が判りやすいけど、3つになったら●印に入る方に電流を選んだほうが励磁電流0の条件が少し美しい。ぼってん好みの問題です。

例題 2 図 1 の一般の変成器に対し、図 2 の巻数比  $a:1$  の理想変成器を使った等価回路が良く用いられる。図 1 の  $L_1, L_2, M$  を図 2 のパラメータで表せ。



(解) 図のように電圧、電流を定義する。

図 1 より、

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \quad \dots \textcircled{2}$$

図 2 より、

$$\text{理想変成器に対し, } aI_1' + I_2 = 0 \quad \dots \textcircled{3} \quad \leftarrow \text{励磁電流 } 0 \text{ の条件}$$

$$V_1' : V_2' = a : 1 \quad \dots \textcircled{4} \quad \leftarrow \text{密結合の条件}$$

また、 $V_1 = j\omega l_1 I_1 + j\omega L_{01}(I_1 - I_1')$

$$= j\omega l_1 I_1 + j\omega L_{01}\left(I_1 + \frac{I_2}{a}\right) \quad \leftarrow \textcircled{3} \text{ を代入}$$

$$= j\omega(l_1 + L_{01})I_1 + j\omega \frac{L_{01}}{a} I_2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$V_2 = j\omega l_2 I_2 + V_2' = j\omega l_2 I_2 + \frac{V_1'}{a}$$

$$= j\omega l_2 I_2 + \frac{j\omega L_{01}(I_1 - I_1')}{a}$$

$$= j\omega \frac{L_{01}}{a} I_1 + j\omega\left(l_2 + \frac{L_{01}}{a^2}\right) I_2 \quad \dots \textcircled{6}$$

①と⑤、②と⑥をそれぞれ比較して、

$$L_1 = L_{01} + l_1$$

$$L_2 = \frac{L_{01}}{a^2} + l_2$$

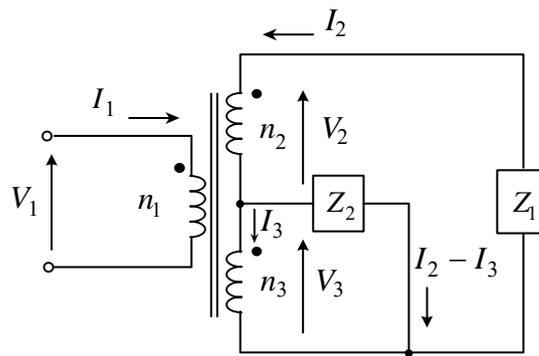
$$M = \frac{L_{01}}{a}$$

$I_0$  : 励磁電流  
 $L_{01} = \infty$  のとき、 $I_0 = 0$   
 で、 $aI_1 + I_2 = 0$  が  
 成立する。(図 2 を見よ。)

$l_1 = l_2 = 0$  (漏れなし) なら、  
 $L_1 L_2 = M^2$  が成立し、密結合  
 と呼ばれる。 $V_1 : V_2 = a : 1$  が  
 成立する。(図 2 を見よ。)

※ 一般の変成器では、巻線抵抗  $r_1, r_2$  及び鉄損抵抗  $r_{鉄損}$  を図 2 の回路に付加して用いられる。  
 $l_1, l_2$  はそれぞれ一次漏れインダクタンス、二次漏れインダクタンスと呼ばれる。

例題 3 図の回路の入力インピーダンスを求めよ。



(解) 図のように、フェーザ  $V_1, I_1, V_2, I_2, V_3, I_3$  を定義する。

密結合の条件から

$$V_1 : V_2 = n_1 : n_2 \quad \therefore V_2 = n_2 V_1 / n_1 \quad \dots \textcircled{1} \quad \cdot \text{印に矢の先端がどちらもあるとき, プラス (+)}$$

$$V_1 : V_3 = n_1 : n_3 \quad \therefore V_3 = n_3 V_1 / n_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

励磁電流  $0$  の条件から

$$n_1 I_1 + n_2 I_2 + n_3 I_3 = 0 \quad \dots \textcircled{3} \quad \cdot \text{印に入る電流のとき, プラス (+)}$$

$Z_1$  についての電圧方程式より

$$V_2 + V_3 = -Z_1 I_2 \quad \dots \textcircled{4} \quad Z_1 \text{ について電圧と電流の矢が同じ向きなので, マイナス (-)}$$

同様に  $Z_2$  について

$$V_3 = Z_2 (I_2 - I_3) \quad \dots \textcircled{5}$$

①, ②, ④より

$$I_2 = -\frac{n_2 + n_3}{n_1 Z_1} V_1$$

②, ⑤より

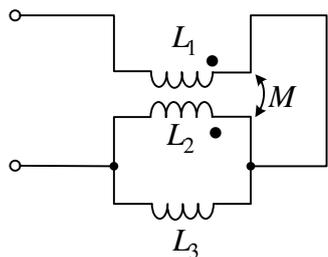
$$I_3 = I_2 - \frac{n_3}{n_1 Z_2} V_1 = -\frac{n_2 + n_3}{n_1 Z_1} V_1 - \frac{n_3}{n_1 Z_2} V_1$$

$I_2, I_3$  を③に代入して

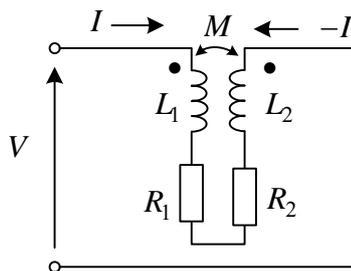
$$I_1 = n_2 \frac{(n_2 + n_3)}{n_1^2 Z_1} V_1 + n_3 \frac{(n_2 + n_3)}{n_1^2 Z_1} V_1 + \frac{n_3^2}{n_1^2 Z_2} V_1$$

$$\text{入力インピーダンス: } \frac{V_1}{I_1} = \left\{ \frac{(n_2 + n_3)^2}{n_1^2 Z_1} + \frac{n_3^2}{n_1^2 Z_2} \right\}^{-1}$$

例題4 図(a), (b)の回路の入力インピーダンスを求めよ。



(a)



(b)

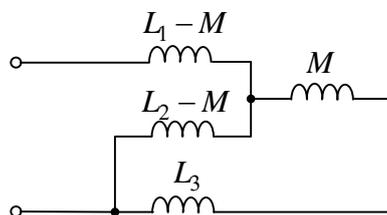
(解)

(a) 図の等価回路が得られる。

入力インピーダンス  $z$  は,

$$z = j\omega(L_1 - M) + \frac{(j\omega L_3 + j\omega M)j\omega(L_2 - M)}{j\omega L_3 + j\omega M + j\omega(L_2 - M)}$$

$$= j\omega(L_1 - M) + j\omega \frac{(L_3 + M)(L_2 - M)}{L_2 + L_3}$$



(b) 図のように,  $V, I$  を定義すると,

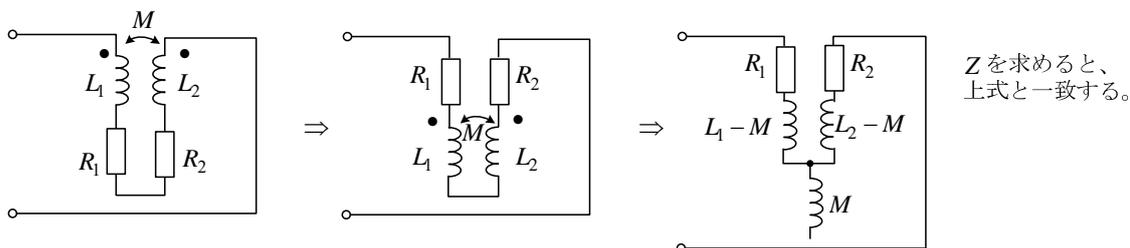
$$V = j\omega L_1 I - j\omega M I + (R_1 + R_2)I + j\omega L_2 I - j\omega M I$$

$$= \{ R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) \} I$$

従って, 入力インピーダンス  $Z$  は,

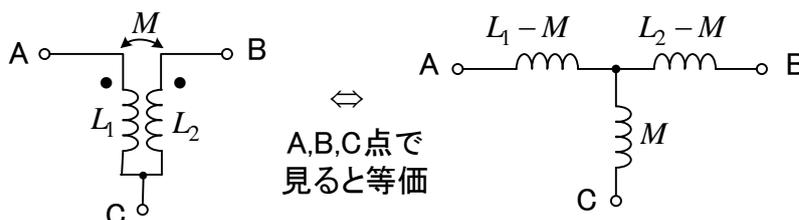
$$z = \frac{V}{I} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)$$

(注) この場合, 等価回路を作ろうと思えば, 次のようになる。

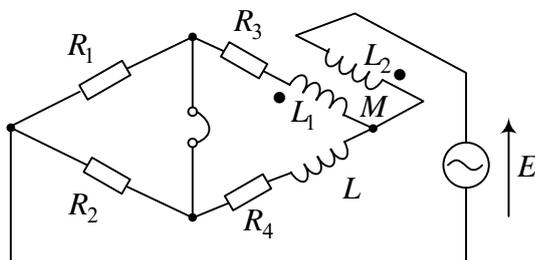


$Z$  を求めると、  
上式と一致する。

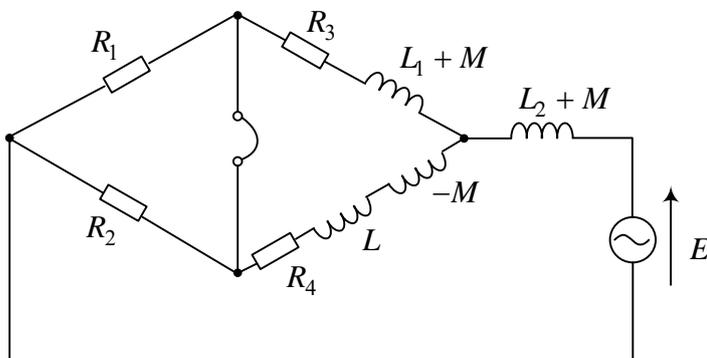
\* 等価回路を作るときは3つの点を見つけて丸を書け。



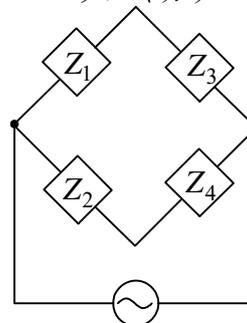
例題5 図のブリッジの平衡条件から、 $R_4, L$ を求める式を導出せよ。



(解) 変成器を等価回路で置き換えると、次の様になる。



※ブリッジの平衡条件  
 $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$   
 タスキガケ



$L_2 + M$  は、ブリッジの平衡には無関係である。

(何故なら、 $L_2 + M$  まで含まれて電源電圧と考えてよいから)

ブリッジの平衡条件より

$$R_1(R_4 + j\omega L - j\omega M) = R_2(R_3 + j\omega L_1 + j\omega M)$$

両辺の実部と虚部が等しいから、

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad , \quad R_1(L - M) = R_2(L_1 + M)$$

$$\therefore R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad , \quad L = M + \frac{R_2}{R_1}(L_1 + M)$$

(注意)  $a + jb = 0$  のとき、 $a = 0$  ,  $b = 0$  である。

$a_1 + jb_1 = a_2 + jb_2$  のとき、

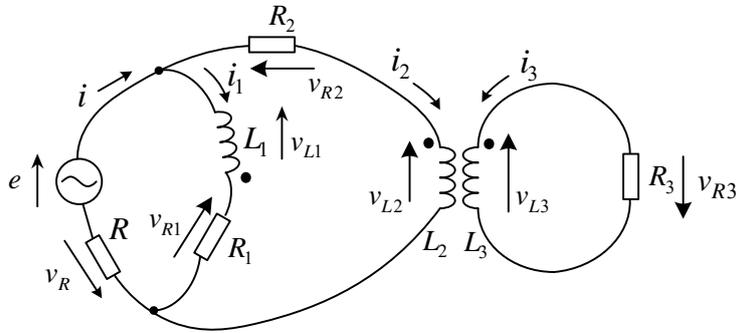
$(a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) = 0$  だから

$a_1 = a_2$  ,  $b_1 = b_2$

例題 6 図の回路について以下の問に答えよ。

- (1) 枝電流を定義して、独立な微分方程式を書け。(小文字を使え。)
- (2) 定常解を求めるフェーザ表示を用いた式を書け。(大文字を使え。)

但し、 $e$  は  $100\text{V}$  の交流電圧とする。また、各コイル間には相互インダクタンス  $M_{12}, M_{23}, M_{13}$  があるものとする。



- (1) 図のように枝電流  $i, i_1, i_2, i_3$  を定義する。

図の電源、 $L_1, R_1, R$  の閉路に対し、

$$\begin{aligned} e &= v_{L1} + v_{R1} + v_R \\ &= L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt} + R_1 i_1 + R i \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

$i_2$  は  $\cdot$  に入り+だが  $v_{L1}$  の矢の根が  $\cdot$  印にあるため

図の電源、 $R_2, L_2, R$  の閉路に対し、

$$\begin{aligned} e &= v_{R2} + v_{L2} + v_R \\ &= R_2 i_2 - M_{12} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_3}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R i \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

$i_1$  が  $\cdot$  印から出る方向

図の  $R_3, L_3$  閉路に対し、

$$\begin{aligned} 0 &= v_{L3} + v_{R3} \\ &= L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{電流について } i = i_1 + i_2 \quad \dots \textcircled{4}$$

①～④が成立する独立な式である。

- (2) ①～④より、小文字→大文字 (フェーザ),  $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$  として

$$100 = j\omega L_1 I_1 - j\omega M_{12} I_2 - j\omega M_{13} I_3 + R_1 I_1 + R I$$

$$100 = R_2 I_2 - j\omega M_{12} I_1 + j\omega M_{23} I_3 + j\omega L_2 I_2 + R I$$

$$0 = j\omega L_3 I_3 - j\omega M_{13} I_1 + j\omega M_{23} I_2 + R_3 I_3$$

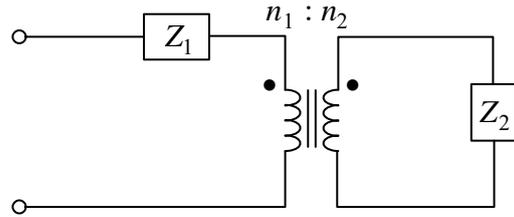
$$I = I_1 + I_2$$

(注)  $e$  の位相を基準にとると、 $e$  のフェーザ  $E$  は  $E = 100$  となる。 $e = 100\sqrt{2} \sin \omega t$  と考えることを意味する。

問題 1 図の回路の入力インピーダンス  $Z$  を求めよ。

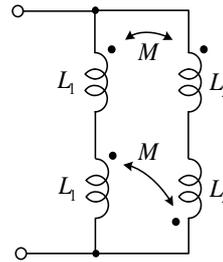
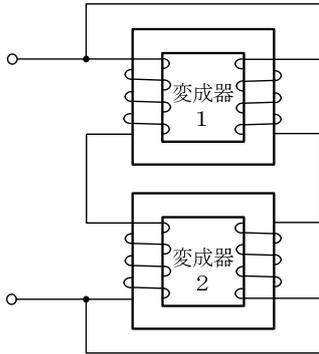
(答)  $Z = Z_1 + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_2$  ( $Z_1$ を省いた変成

器の部分は覚えておくと便利)



問題 2 変成器 1 の自己インダクタンスを  $L_1$  (一次巻線) 及び  $L_2$  (二次巻線), 相互インダクタンスを  $M$  とする。変成器 2 は, 二次巻線の巻き方だけが変成器 1 と異なる。回路図を示し, 入力インピーダンス  $Z$  を求めよ。(等価回路利用)

(答)

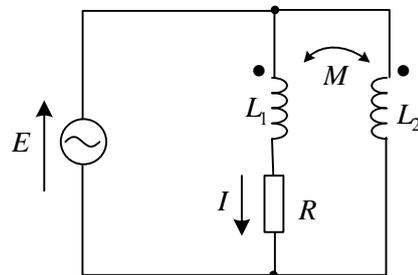


$$Z = j\omega \frac{2L_1L_2}{L_1 + L_2}$$

問題 3 図の回路で, 電流の実効値  $|I|$  を求めよ。  $E, I$  はフェーザである。(等価回路利用)

(答)  $I = \frac{L_2 - M}{RL_2 + j\omega(L_1L_2 - M^2)} E$

$$|I| = \frac{|L_2 - M| |E|}{\sqrt{(RL_2)^2 + \omega^2(L_1L_2 - M^2)^2}}$$



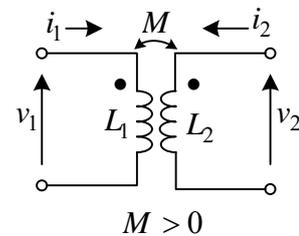
問題 4 図の変成器で時刻  $t$  の電流が  $i_1(t), i_2(t)$  のとき, 変成器に蓄えられているエネルギー  $W$  を求めよ。

(答)  $W = \int_0^t (v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t)) dt$

$$= \int_0^t (L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}) dt$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2) \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i_2 + L_2 i_2^2) \quad (\text{電流の初期値は } 0 \text{ として求められる})$$



# 第11章 回路網方程式

回路素子の瞬時電圧や瞬時電流について成立する式は、第6章の表にまとめており、特に変成器については第10章で詳しく述べた。また、キルヒホッフの法則については直流回路に対し第2章で述べたが、交流回路においても全く同様に成立し、これまでも度々利用した。交流回路の定常解析ではフェーザを用いるが、この場合の回路素子の式も、第6章の表にまとめており、また変成器については第10章で述べた。キルヒホッフの法則に関しては、電圧または電流についての加減算であるから、瞬時値をフェーザに置き換えることで全く同様に式を立てることができ、これについてもこれまで度々利用してきた。ところで回路の問題を解く場合、未知数の数だけ独立な式があればよい。これまで、回路素子の式やキルヒホッフの法則を用いて、全ての素子の電圧や電流が含まれるようにして、未知数の数だけ独立な式を立てて問題を解いてきた。

本章では、独立な式は幾つ必要なのかを考え、未知数として閉路電流を用いる方法や節点電位を用いる方法を詳しく紹介する。このためまず、木と基本閉路を理解して欲しい。

## ○ 枝, 節点, 木, 基本閉路

図11-1で、1~9を枝 (branch), ①~⑥を節点 (node) という。節点と枝からなり、枝の形状は問題にしない図1は回路のグラフと呼ばれる。回路素子, 電圧源, 電流源は枝に存在する。節点は素子と素子あるいは素子と電源の接続点に対応する。素子を直列に接続したものは、まとめて1つの枝と考える。**閉路**

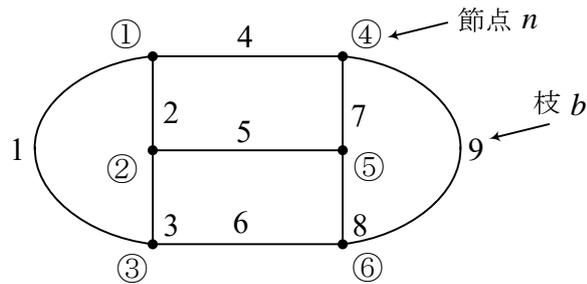


図11-1 グラフの例

とは、節点から出発して枝や他の節点を途中1回だけ通り、最初の節点にもどる道をいう。従って、節点が多いと閉路は非常に多く考えられる。節点の数 $n$ , 枝の数 $b$ のグラフで、全ての節点を結ぶ最小数の枝の集まりを木 (tree) という。最小数にするため木を作るときは閉路にならないように選ぶ。木を構成する枝の数は $n-1$ である。節点が2つのとき、1つの枝ができ、節点が1増えるごとに、それをつなぐ枝も1つずつ増える。よって、枝の数は節点より1少ないのである。なお木の形は1つには決らない。

図11-1のグラフで、木の例を図11-2に示す。節点数 $n=6$ , 枝数 $b=9$ である。木を構成する枝の数は、 $n-1=5$ となっている。

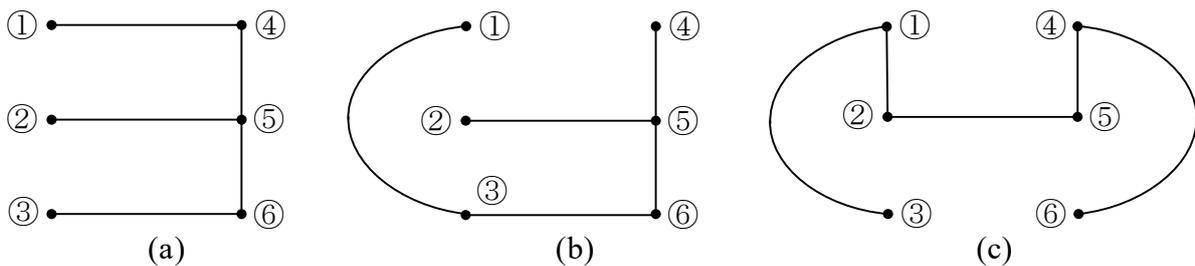


図11-2 図11-1のグラフの木の例

木に含まれない枝の数 $l$ は、全部の枝の数から木の枝の数を引けばよいから、

$$l = b - (n - 1) \quad (11-1)$$

となる。図2の各場合に書いていない枝は4本あり、 $l = 9 - 5 = 4$ と一致している。木に含まれない枝を1つだけ含み、他は木の枝からなる閉路を基本閉路 (primitive loop) という。よって、基本閉路の数は木に含まれない枝の数と等しく $l$ である。木の選び方によって基本閉路は違ってくる。

一般に、ある回路網が与えられたとき、未知数のとり方によって必要な式の数が違ってくる。回路の問題を解く基本的方法として枝電流法、閉路電流法、節点電位法がある。これらの方法は何を未知数にするかが違う。

### ○ 枝電流法

全ての枝の枝電流を未知数とする。未知数は全部で $b$ ある。キルヒホッフの第1法則（以下**電流則**と呼ぶ）は各節点について成立するが、独立な式は節点数 $n$ より1少ない $n-1$ である。1つの節点で成立する式を除いても、他の節点の式の中に全ての枝電流が含まれており独立な式が1少ない。キルヒホッフの第2法則（以下**電圧則**と呼ぶ）により得られる独立な式の数は、基本閉路と同じ $l = b - (n - 1)$ である。なぜなら、基本閉路で木以外の枝電圧は1度だけしか入らないので独立な式となる。従って、電流則と電圧則を合わせて全部で $(n-1) + l = b$ だけの式が得られ、未知数の数に等しいので解が求まる。枝電流法は式が多くなる欠点があるが、理解はしやすい。なお、回路の接続が切り替わる過渡現象の解析では枝電流法でなくてはならない。

### ○ 閉路電流法

**基本閉路**に流れる $l$ 個の閉路電流を用いると、電流則は自動的に満たされ、電圧則を用いた閉路の数 $l = b - n + 1$ だけの式で解が得られる。 $b$ 個の枝電流のうち、独立に選ぶ枝電流の数は $l = b - (n - 1)$ である。なぜなら、節点の電流則について、節点数より1少ない $n-1$ の式が立てられ、その分未知数が少なくできるからである。このように独立な枝電流は $l$ 個選べ、これが閉路電流に対応していると考えてよい。すなわち、木を選んだとき、木に含まれない枝 ( $l$ 本ある) に流れる枝電流が閉路電流と実質的に等しい。ただし、閉路電流は基本閉路を選んで、そこを巡回する電流として回路図に書き込む。まず、**木**を選んで**基本閉路**を決めることが必要である。閉路電流法は枝電流法に比べて未知数が少なく良く用いられる。

### ○ 節点電位法

節点のうちどれか1つを電位0（電位の基準、接地）とし、他の節点の電位（ $n-1$ 個あり、基準節点に対する電圧のこと）を未知数とする。このとき、電圧則は自動的に満たされ、電流則だけで式を立てることになる。電流則については、 $n-1$ の独立な式が得られるので、節点電位が計算できる。節点電位法とは呼ばないが、類似の方法として枝電圧を未知数として問題を解く場合には、独立な $n-1$ 個の木の枝電圧を未知数にすればよい。並列枝が多く電流源がつながっている回路に適する。

- ・上記の3方法以外でも、未知数の数だけ独立な式があれば解は得られる。すなわち、未知数に電圧と電流が混在してよい。要はできるだけ簡単に解けるように未知数に何を**選ぶ**かだ。

図 11-3 の回路について具体的に考えていこう。

電圧源は、

$$e_1(t) = \sqrt{2}E_{e1} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E_{e2} \sin(\omega t + \beta)$$

とする。  $\alpha, \beta$  : 初期位相

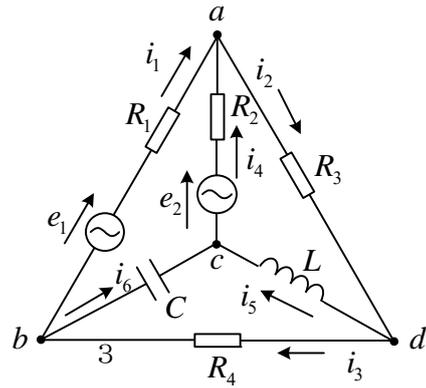


図 11-3

まず、**枝電流法**を考える。図の様に、枝電流  $i_1 \sim i_6$  を定義する。

電流則については、

$$\text{節点 } a : i_1 + i_4 = i_2 \quad \text{①}$$

$$\text{節点 } b : i_3 = i_1 + i_6 \quad \text{②}$$

$$\text{節点 } c : i_5 + i_6 = i_4 \quad \text{③}$$

$$\text{節点 } d : i_2 = i_3 + i_5 \quad \text{④}$$

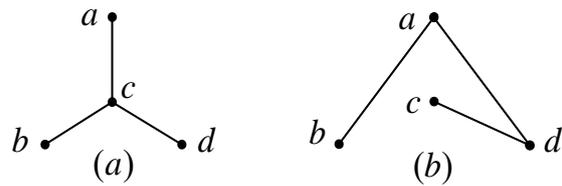


図 11-4 木の例

①~④の中で独立な式は3つで、残りの1つは他の式から導ける。木は、図 11-4 に示すように幾つか考えられる。図 11-4 の木に対し、木以外の枝1つと他は全て木からなる基本閉路はそれぞれ図 11-5 の様に決まる。

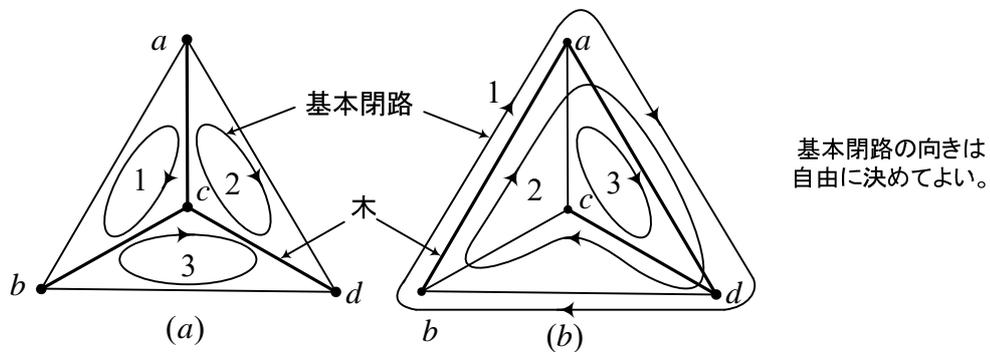


図 11-5 基本閉路

図 11-5 (a)で電圧則は、次のようになる。

$$\text{閉路1} : e_1 = R_1 i_1 - R_2 i_4 + e_2 - \frac{1}{C} \int i_6 dt \quad \text{⑤}$$

$$\text{閉路2} : e_2 = R_2 i_4 + R_3 i_2 + L \frac{di_5}{dt} \quad \text{⑥}$$

$$\text{閉路3} : 0 = \frac{1}{C} \int i_6 dt - L \frac{di_5}{dt} + R_4 i_3 \quad \text{⑦}$$

電流の矢印と逆方向に素子の電圧の矢印を考え (すると素子の式にマイナスはない)、電圧の矢印をベクトルのように考えて符号をつけるとよい。例えば、⑤で  $-R_2 i_4$  のマイナスは  $i_4$  が閉路 1 と逆方向に定義されているから。閉路の方向は左辺の電源電圧の方向にしている (私の好み)。

電源電圧が与えられると、未知数  $i_1 \sim i_6$  の 6 個に対し、独立な式が①～④の中から 3 つ及び⑤～⑦の合計 6 つあるので電流が求められる。

交流回路の定常解析を行う場合にはフェーザ（太文字で表示）を用いれば良く、以下の式が得られる。

$$I_1 + I_4 = I_2 \quad \text{①'}$$

$$I_3 = I_1 + I_6 \quad \text{②'}$$

$$I_2 = I_3 + I_5 \quad \text{④'}$$

$$E_{e1}e^{j\alpha} = R_1 I_1 - R_2 I_4 + E_{e2}e^{j\beta} - \frac{1}{j\omega C} I_6 \quad \text{⑤'}$$

$$E_{e2}e^{j\beta} = R_2 I_4 + R_3 I_2 + j\omega L I_5 \quad \text{⑥'}$$

$$0 = \frac{1}{j\omega C} I_6 - j\omega L I_5 + R_4 I_3 \quad \text{⑦'}$$

次に、**閉路電流法**について考える。

図 11-5 (a) の基本閉路を考え、閉路電流  $i_1, i_2, i_3$  を未知数とする。

電圧則だけを考えれば良いので、各閉路について以下の式が得られる。

考え方：(1) できるだけ電源電圧の向きに閉路電流の向きをとる。(2) 左辺は閉路の向きの電源電圧である。閉路と逆向きならマイナスをつける。(3) 右辺は素子の式、考えている閉路の閉路電流の項は全てプラス、他の項は電流の向きで決る。

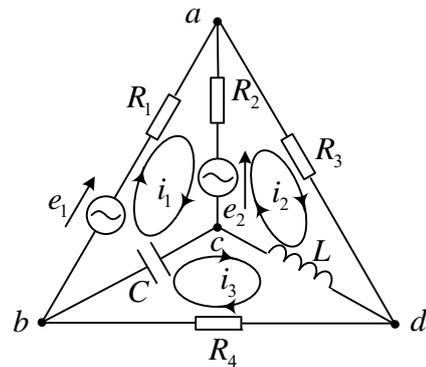


図 11-6 閉路電流

$$\text{閉路1: } e_1 - e_2 = (R_1 + R_2) i_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt - R_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt \quad \text{⑧}$$

$$\text{閉路2: } e_2 = (R_2 + R_3) i_2 + L \frac{di_2}{dt} - R_2 i_1 - L \frac{di_3}{dt} \quad \text{⑨}$$

$$\text{閉路3: } 0 = R_4 i_3 + L \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} \int i_3 dt - \frac{1}{C} \int i_1 dt - L \frac{di_2}{dt} \quad \text{⑩}$$

フェーザ表示については、

$$E_{e1}e^{j\alpha} - E_{e2}e^{j\beta} = \left( R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) I_1 - R_2 I_2 - \frac{1}{j\omega C} I_3 \quad \text{⑧'}$$

$$E_{e2}e^{j\beta} = (R_2 + R_3 + j\omega L) I_2 - R_2 I_1 - j\omega L I_3 \quad \text{⑨'}$$

$$0 = \left( R_4 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I_3 - \frac{1}{j\omega C} I_1 - j\omega L I_3 \quad \text{⑩'}$$

となる。⑧、⑨、⑩や⑧'、⑨'、⑩' は**閉路方程式**(loop equation)と呼ばれる。

フェーザ表示の場合を例にとり、枝電流法を比べてみよう。図 11-3 と図 11-6 を比べると、両者

の電流  $I_1, I_2, I_3$  は、たまたま同じ記号で等しい。すなわち、木以外の枝電流が閉路電流と等しい。従って、閉路電流法の式は、①', ②', ④' より  $I_4, I_5, I_6$  を  $I_1, I_2, I_3$  で表し、⑤', ⑥', ⑦' に代入した式と同じになる (各自試みよ)。

この様に、閉路電流法は未知数が少なくて便利である。⑧', ⑨', ⑩' を回路を見ただけで書けるようになって欲しい。

**節点電位法**については、簡単のためフェーザ表示の場合を例に取り説明する。

$J_1, J_2$  は電流源のフェーザ,  $Y_1, Y_2, Y_3$  はアドミタンスである。3つの節点 1, 2, 3 の電位をそれぞれ  $V_1, V_2, V_3$  とする。

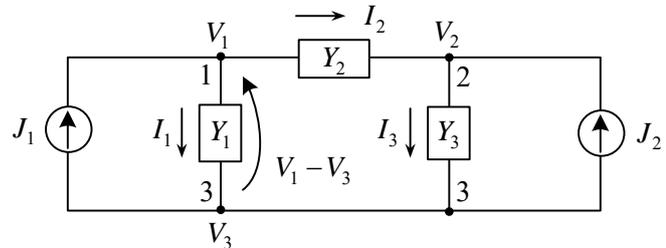


図 11-7

このとき、電流  $I_1, I_2, I_3$  は次式で与えられる。

$$I_1 = Y_1(V_1 - V_3) \quad \text{①}$$

$$I_2 = Y_2(V_1 - V_2) \quad \text{②}$$

$$I_3 = Y_3(V_2 - V_3) \quad \text{③}$$

節点 1, 2, 3 でそれぞれ電流則を適用すると、

$$\text{節点 1 : } J_1 = I_1 + I_2 \quad \text{④}$$

$$\text{節点 2 : } J_2 = -I_2 + I_3 \quad \text{⑤}$$

$$\text{節点 3 : } I_1 + I_3 = J_1 + J_2 \quad \text{⑥}$$

⑥は、④、⑤より得られるので、独立な式として④、⑤を考える。④、⑤に①、②、③を代入して

$$J_1 = Y_1(V_1 - V_3) + Y_2(V_1 - V_2) \quad \text{⑦}$$

$$J_2 = -Y_2(V_1 - V_2) + Y_3(V_2 - V_3) \quad \text{⑧}$$

ここで、電位の基準として節点 3 を考えると、 $V_3 = 0$  とできる。⑦、⑧に代入して

$$J_1 = (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2V_2 \quad \text{⑨}$$

$$J_2 = (Y_2 + Y_3)V_2 - Y_2V_1 \quad \text{⑩}$$

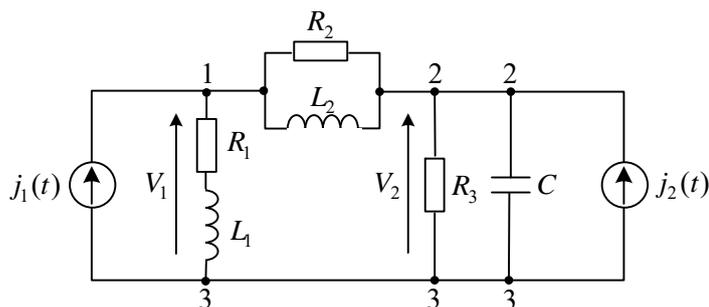
⑨、⑩は以下の様に記憶すると、回路より直接書き下せる。⑨を例に取り説明する。左辺は、節点 1 に流入する電流源の和である。右辺第 1 項は節点 1 につながるアドミタンスの和に節点 1 の電位を掛けたもので (符号は正)、第 2 項は節点 1 と隣りあっている節点 2 との間のアドミタンスに接点 2 の電位を掛けたもの (符号は負) である。⑨、⑩は**節点方程式**(nodal equation)と呼ばれる。

例題1 電流源が,

$$j_1(t) = \sqrt{2}J_{e1} \sin(\omega t + \alpha)$$

$$j_2(t) = \sqrt{2}J_{e2} \sin(\omega t + \beta)$$

のとき, 節点電位法を用いて,  
節点方程式を求めよ。  
フェーザ表示を用いよ。



(解) アドミタンスが必要なので,  $R_1, L_1$  の直列回路のアドミタンス  $Y_1$  をまず求める。

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega L_1}$$

並列回路のアドミタンスは各アドミタンスの和だから容易に求まる。

節点1の電位を  $V_1$ , 節点2の電位を  $V_2$  とし, 節点3の電位を  $0$  とする。

節点1について,

$$J_{e1}e^{j\alpha} = \left( \frac{1}{R_1 + j\omega L_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_1 - \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_2 \quad \text{①}$$

節点2について

$$J_{e2}e^{j\beta} = \left( \frac{1}{R_3} + j\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_2 - \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L_2} \right) V_1 \quad \text{②}$$

(検討) 難しそうな事をしているようだが, 節点3を基準にした電位とは図に示す電圧  $V_1, V_2$  に他ならない。節点1で, **電流則**を適用すれば,  $R_2, L_2$  の電圧が  $V_1 - V_2$  だから, 電流を求めることで①を導出できる。節点2で, ②も同様に求められる。節点電位法ではそれを機械的に書き下せるのであるが, それを知らなくても簡単に出せる。重要な点は, この様に並列枝が多く, 電流源が含まれるような回路(例えばトランジスタ回路)では, 電圧を未知数として回路を解く方法が簡単であるということである。なお, 電圧源と電流源が同時に存在する場合には, 次章で述べる重ね合わせの理を用いる方法が便利である。もちろん, 多少複雑になっても電圧, 電流を未知数としてキルヒホッフの法則を用いれば解けないことはない。

問題1 図の回路で閉路電流法により閉路方程式を求めよ。フェーザ表示を用いよ。

(解) 木を図のように選ぶと、基本閉路が得られ、閉路電流が図の様に定義できる。

閉路1 :

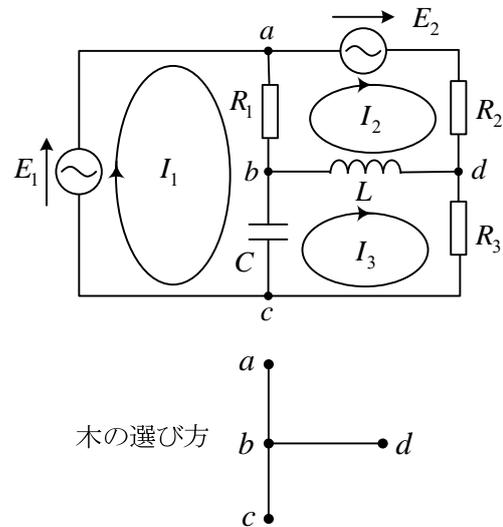
$$E_1 = \left( R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) I_1 - R_1 I_2 - \frac{1}{j\omega C} I_3$$

閉路2 :

$$E_2 = (R_1 + R_2 + j\omega L) I_2 - R_1 I_1 - j\omega L I_3$$

閉路3 :

$$0 = \left( R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I_3 - \frac{1}{j\omega C} I_1 - j\omega L I_2$$



問題2 図の回路で節点電位法により、節点方程式を求めよ。フェーザ表示を用いよ。

(解) 節点4を基準にとり、 $V_4 = 0$ とする。節点1, 2, 3の電位をそれぞれ $V_1, V_2, V_3$ とする。 $R_3 C_3$

のアドミタンスは $\frac{j\omega C_3}{j\omega C_3 R_3 + 1}$ だから

節点1 :

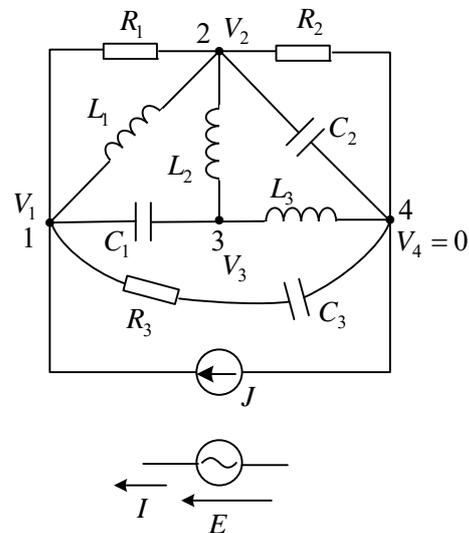
$$J = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + j\omega C_1 + \frac{j\omega C_3}{1 + j\omega C_3 R_3} \right) V_1 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} \right) V_2 - j\omega C_1 V_3$$

節点2 :

$$0 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} + \frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2 + \frac{1}{R_2} \right) V_2 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L_1} \right) V_1 - \frac{1}{j\omega L_2} V_3$$

節点3 :

$$0 = \left( \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{j\omega L_3} + j\omega C_1 \right) V_3 - j\omega C_1 V_1 - \frac{1}{j\omega L_2} V_2$$



(検討) もし、電流源の代わりに電圧源  $E$  (図参照) が与えられたときには、上式で  $J = I$ ,  $V_1 = E$  とおいた式が成立する。 $I, V_2, V_3$  が未知数となり解を求めることになる。

# 第12章 回路の諸定理

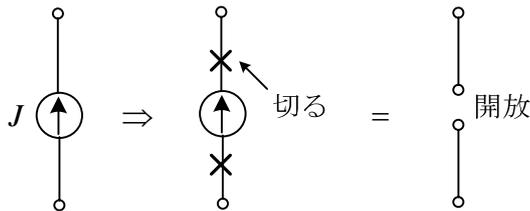
この章では、電気回路の問題を解くときによく利用される重ね合わせの理、テブナンの定理、ノートンの定理、供給電力最大の法則について学ぶ。

## ○ 重ね合わせの理(superposition law)

電圧源や電流源が多く含まれる回路の解析を行う場合、全部の電源を一度に考えるのではなく、一つ一つの電源について解を求め、最後に加え合わせるという方法である。その際、注目している電源以外の電源は殺しておく必要がある、電圧源は短絡、電流源は開放する。



電圧=0は短絡することで達成される。開放しても電圧は発生する。電池には、開放しても1.5Vが出ている。もちろん、図のように実際に短絡してはいけない。

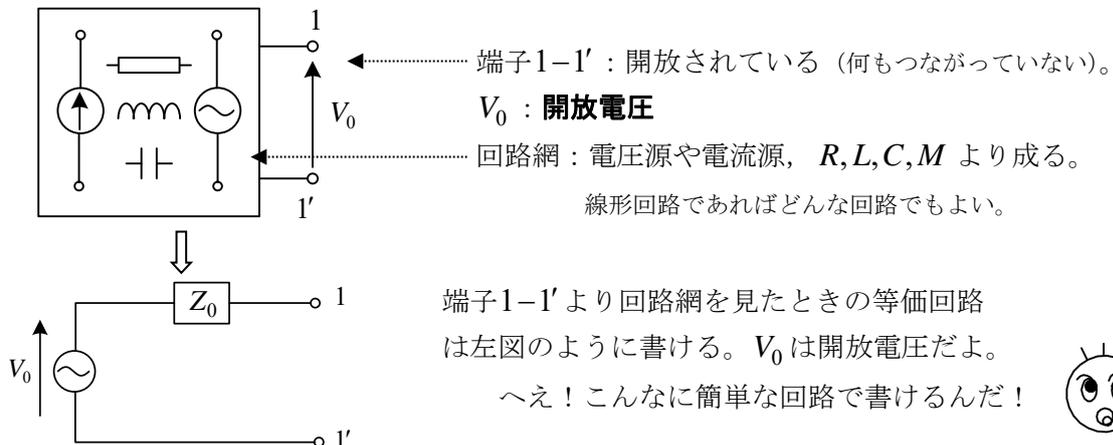


直流電流源と交流電流源は同じ記号である。 $J$ は一定の直流かフェーザ表示のいずれかである。本章は主として後者を考える。

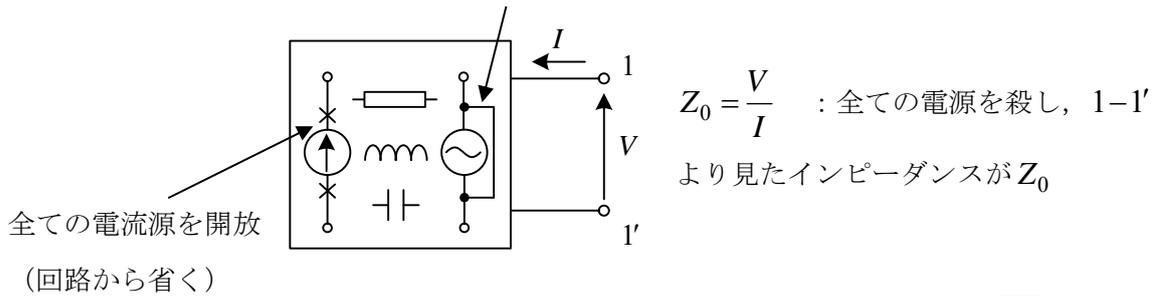
電流=0は開放して線を切る（実際にはしないこと）ことで達成される。短絡しても $J$ が流れる。

重ね合わせの理が使える回路は、定数の $R, L, C, M$ から成る回路（線形回路）である。 $R, L, C, M$ の値が電圧や電流で変化する回路やダイオード・トランジスタを含む回路は非線形だから使えない。しかし、トランジスタ増幅回路では、動作点の近傍で線形回路とみなせるので使える。なお、電源は入力量だから直流と交流が混在してもよく、ひずみ波でも構わない。

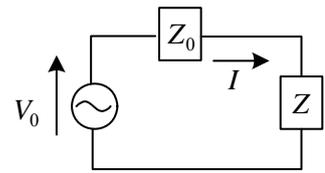
## ○ テブナンの定理(Thévenin's law) (等価電圧源定理ともいう)



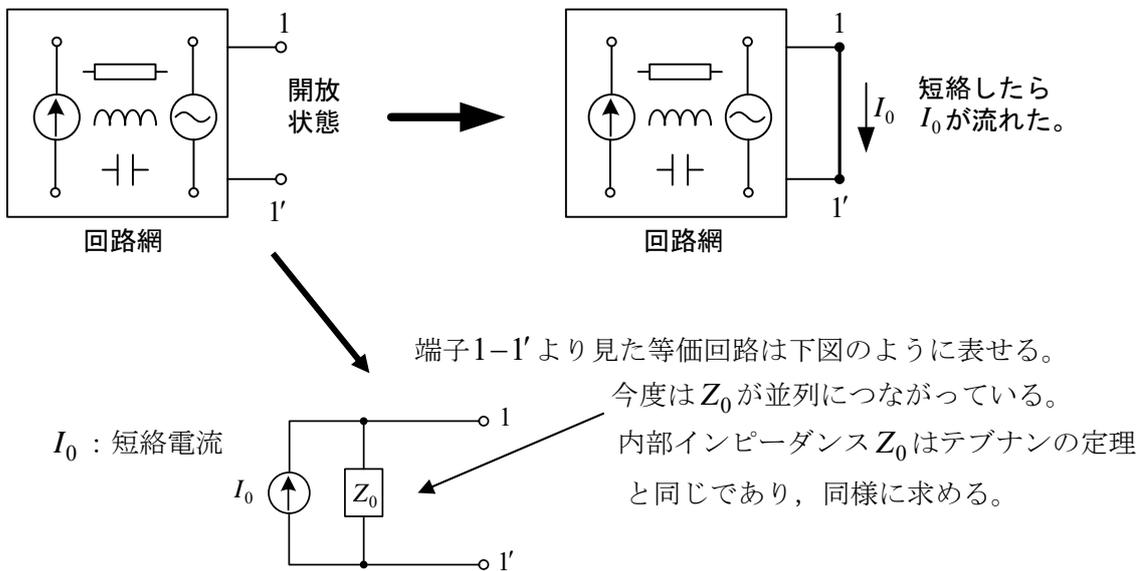
$Z_0$ の求め方を図に示す。 全ての電圧源を短絡（導線で置き換える）



1-1'にインピーダンス  $Z$  をつないだ時, 流れる電流  $I$  は,  $I = V_0 / (Z_0 + Z)$  となる。これを**テブナンの定理**という。テブナンの定理の本質は“どんな複雑な回路も, 電圧源と**内部インピーダンス**  $Z_0$ の直列回路として表現できる”と言っている点にある。

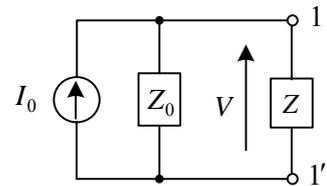


○ **ノートンの定理**(Norton's theorem) (等価電流源定理ともいう)



1-1'にインピーダンス  $Z$  をつないだ時, 端子1-1'の電圧は,

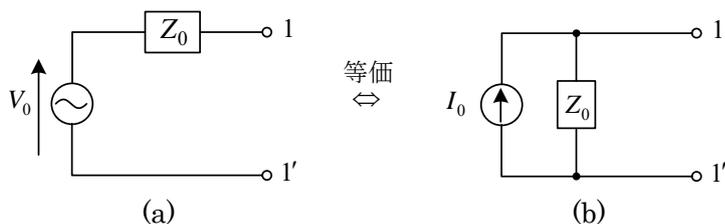
$$V = \frac{I_0 Z_0 Z}{Z_0 + Z} = \frac{I_0}{Y_0 + Y} \quad \text{但し, } Y_0 \equiv 1/Z_0, \quad Y \equiv 1/Z$$



普通, この式を**ノートンの定理**という。ノートンの定理の本質は,

“ある端子について, どんな複雑な回路も, 電流源と内部インピーダンス  $Z_0$  (または内部アドミタンス  $Y_0$ ) の並列回路として表現できる”と言っている点にある。

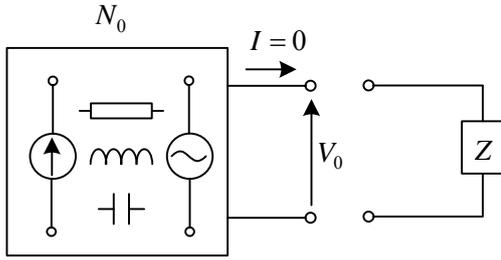
次の2つの回路は  $V_0 = Z_0 I_0$  が成立するとき, 等価である。



(a) の 1,1' を開放している時, 1,1' には  $V_0$  が発生する。(b) が等価となるためには, 開放しているとき  $V_0$  が発生しないとイケないので, (b) より  $V_0 = Z_0 I_0$  でなくてはならぬ。

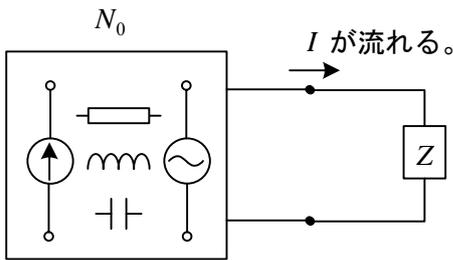
テブナンの定理を重ね合わせの理より証明しよう。

※

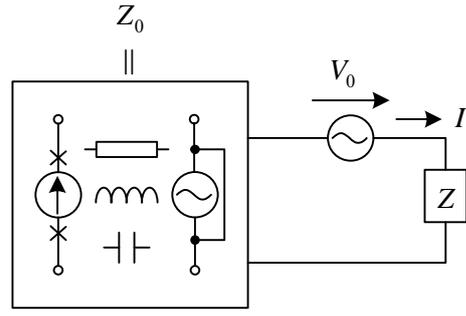


$N_0$  : 電源を含んだ回路  
 $V_0$  : 開放電圧  
 $Z$  : インピーダンス (負荷)

↓ 接続する。



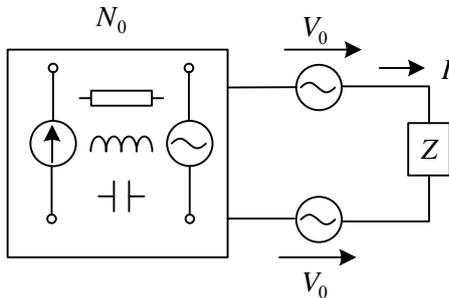
※※



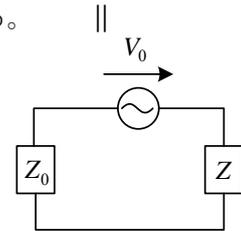
電源を殺している。

|| 等価

これが成立することがテブナンの定理

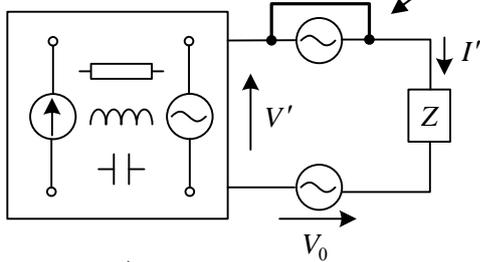


上下の $V_0$ は打ち消しあい、  
無いのと同じである。



|| 重ね合わせの理

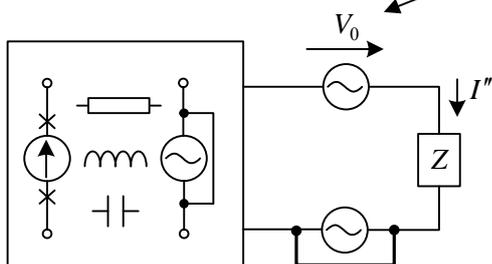
このみ殺す。



$V', I'$ を求める。 $V' = V_0, I' = 0$ とすると、  
 $V'$ と下の電源 $V_0$ が打ち消しあい、 $Z$ には電圧がかからない。よって、 $I' = 0$ となり、 $1, 1'$ を開放した最初の回路(※)の状態と同じで矛盾を生じない。故に、  
 $V' = V_0, I' = 0$

+

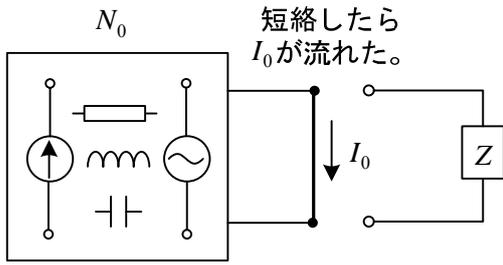
このみ生かす。



$Z$ に流れるを電流 $I''$ とする。  
 重ね合わせの理より、 $I = I' + I''$   
 $I' = 0$ より、 $I'' = I$ である。  
 左の回路はテブナンの定理で証明したい回路(※※)になっている。

ノートの定理を重ね合わせの理より証明しよう。

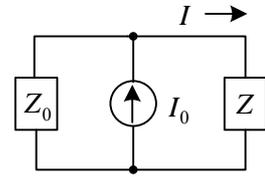
※



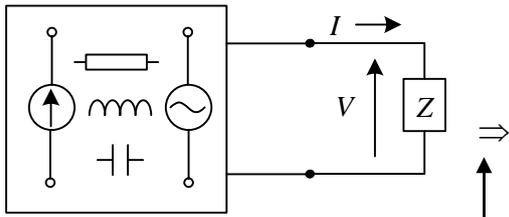
$N_0$  : 電源を含んだ回路

$I_0$  : 短絡電流

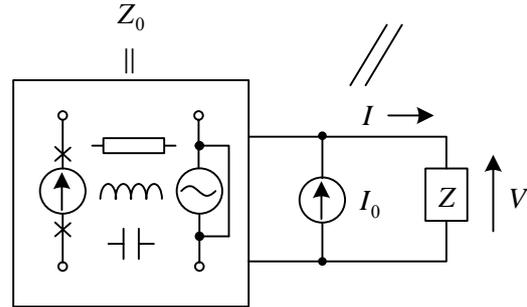
$Z$  : インピーダンス



↓  $Z$  を接続する !

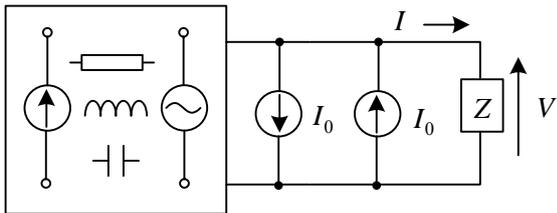


※※



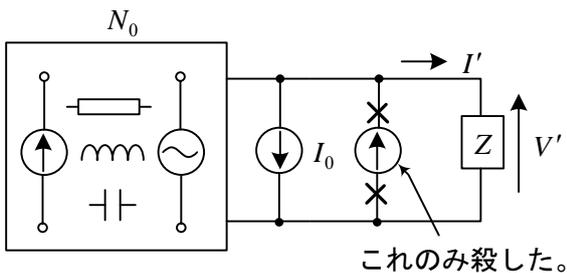
|| 等価

これが成立する  
ことがノートの定理



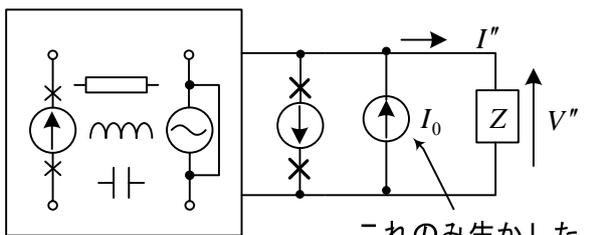
上向きの  $I_0$  と下向きの  $I_0$  は  
打ち消しあい、無いのと同じ。

|| 等価 (重ね合わせの理)



これのみ殺した。

+



これのみ生かした。

$I'$  を求める。  $I' = 0$  とすると  $V' = 0$  となり、  
 $N_0$  より短絡電流  $I_0$  が流れ、これが電流源  $I_0$   
を通して流れると考えると、※の状態と同じ  
であり、矛盾を生じない。よって、  $I' = 0$

重ね合わせの理より

$$I = I' + I''$$

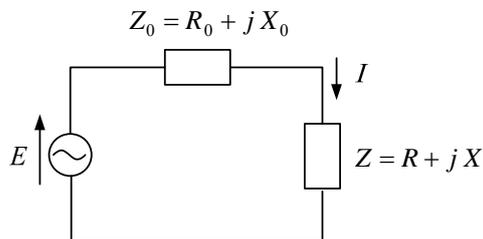
$$I' = 0 \text{ より, } I'' = I$$

$$V'' = Z I'' = Z I = V$$

左図の回路は※※と等しく、ノートの定理  
が成り立つ。

○ 供給電力最大の法則 (maximum power-transfer theorem)

図の回路で、 $R$ で消費される電力が最大となるにはどのような条件が成立するか考えよう。



$E$  : 電源電圧 (一定)  
 $Z_0 = R_0 + jX_0$  : 電源の内部インピーダンス (一定)  
 $Z = R + jX$  : 可変インピーダンス

$R$ で消費される電力を $P$ とすると、

$$P = R|I|^2$$

$$= R \cdot \frac{|E|^2}{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2}$$

$$= \frac{|E|^2}{\frac{R_0^2 + (X_0 + X)^2}{R} + 2R_0 + R}$$

$$I = \frac{E}{R_0 + R + j(X_0 + X)}$$

$$\leftarrow \therefore |I| = \frac{|E|}{|R_0 + R + j(X_0 + X)|}$$

$$= \frac{|E|}{\sqrt{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2}}$$

(A)  $R, X$  両者可変の場合

電力 $P$ が最大となる条件は次式で与えられる。これを**整合**(impedance matching)という。

$$X = -X_0, R = R_0 \quad \text{すなわち,} \quad Z = \bar{Z}_0 \quad (12-1)$$

まず、 $X$ を考えよ。整合しているとき、電源側と負荷側で消費される電力は等しい。

(B)  $R$ だけが可変の場合

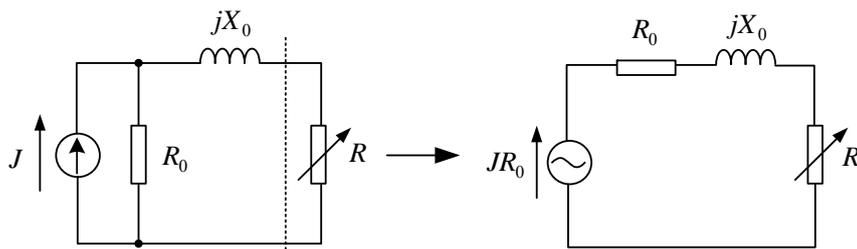
電力 $P$ が最大となる条件は分母を $R$ で微分して0とおくことにより次式で与えられる。

$$R = \sqrt{R_0^2 + (X_0 + X)^2} \quad (12-2)$$

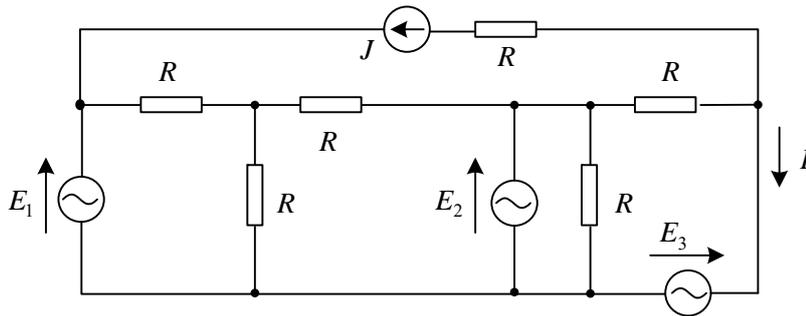
$jX$ を電源のインピーダンスに含めて考えると、負荷 $R$ と電源側のインピーダンスの絶対値が等しいとき電源から最大の電力を引き出すことができる。

上記の定理は、非常に応用範囲が広い。何故なら、どんな複雑な回路でもテブナンの定理を使うと、 $Z_0, E$ の直列回路で表現できるからである。

(例) (B)の応用例として、 $R = \sqrt{R_0^2 + X_0^2} = |Z_0|$ のとき、電力は最大となる。

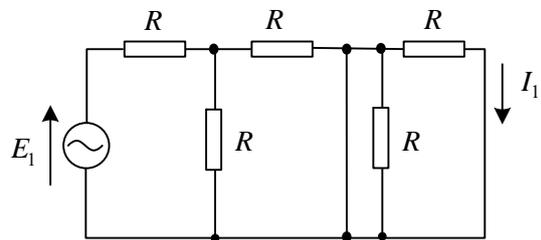


例題 1 図の回路において重ね合わせの理を用いて電流  $I$  を求めよ。



(解)  $E_1$ に着目すると,  $J$ 開放,  $E_2, E_3$ を短絡して図の回路が得られる。  
導線と並列にある抵抗には電流が流れないから,

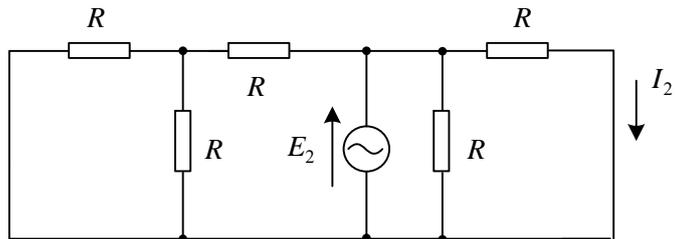
$$I_1 = 0$$



$E_2$ に着目すると,

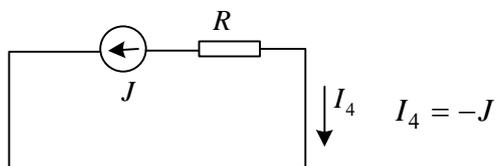
$$I_2 = \frac{E_2}{R}$$

左側の回路は  $I_2$  関係しない。



同様に,  $E_3$ に着目して  $I_3 = -\frac{E_3}{R}$

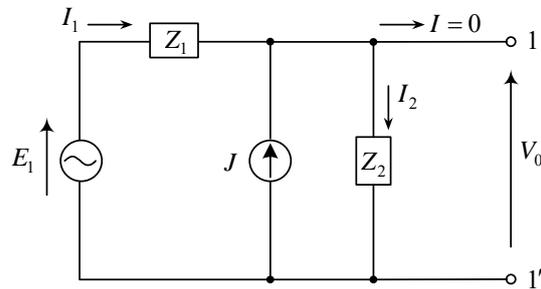
$J$ に着目すると,  $E_1, E_3$ を短絡した回路に電流が流れて



重ね合わせの理より

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{E_2}{R} - \frac{E_3}{R} - J$$

例題 2 図の回路で、1-1'は開放状態にある。端子1-1'より見た等価回路をテブナンの定理より求めよ。また、1-1'にインピーダンス  $Z$  をつないだ時の電流を求めよ。



(解) まず、開放電圧  $V_0$  を求める。  $I_1, I_2$  を図のように定義すると、

$$J + I_1 = I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$E_1 = Z_1 I_1 + V_0 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$$V_0 = Z_2 I_2 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

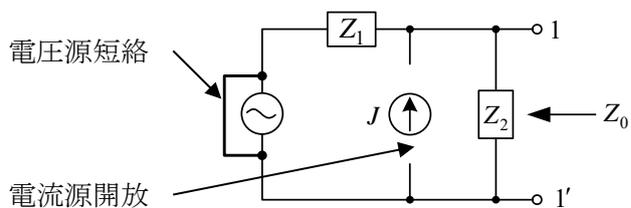
③を①に代入して、

$$I_1 = \frac{V_0}{Z_2} - J$$

$$\textcircled{2} \text{より、} V_0 = E_1 - Z_1 I_1 = E_1 - \frac{Z_1}{Z_2} V_0 + J Z_1$$

$$\therefore V_0 = \frac{E_1 + J Z_1}{1 + Z_1/Z_2} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

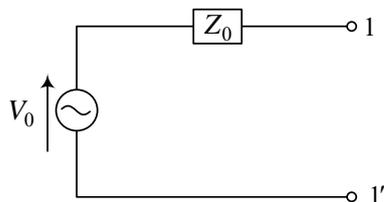
次に、1-1'より見たインピーダンス  $Z_0$  を求める。



図より、

$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

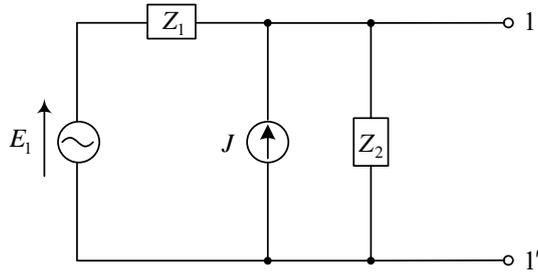
従って、等価回路は次のように書ける。  $V_0, Z_0$  は④、⑤で与えられる。



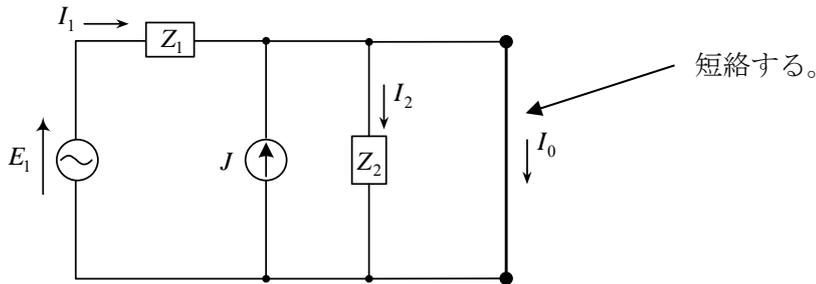
1-1'に  $Z$  をつないだ時の電流  $I$  は

$$I = \frac{V_0}{Z_0 + Z} = \frac{Z_2 (E_1 + J Z_1)}{Z_1 Z_2 + Z (Z_1 + Z_2)}$$

例題3 図の回路で、端子1-1'より見た等価回路をノートンの定理より求めよ。1-1'は開放状態にある。また、1-1'にインピーダンスZの負荷をつないだとき、流れる電流を求めよ。

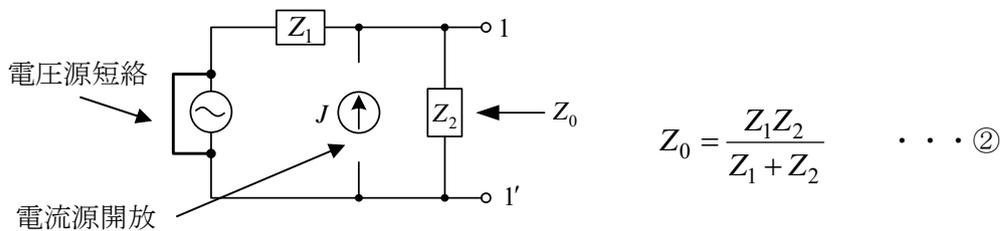


(解) まず、短絡電流  $I_0$  を求める。



$$\text{図より, } I_2 = 0, \quad I_1 = \frac{E_1}{Z_1} \quad \therefore I_0 = J + \frac{E_1}{Z_1} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

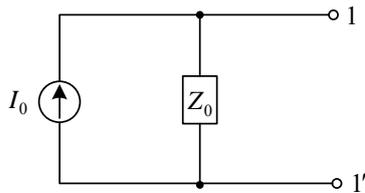
次に、1-1'より見たインピーダンス  $Z_0$  を求める。



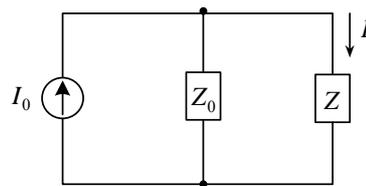
よって、1-1'より見た等価回路は(A)のように書ける。 $I_0, Z_0$ は①, ②である。

また、1-1'にZをつないだときの電流Iは等価回路(B)より求まる。

$$I = \frac{Z_0}{Z_0 + Z} I_0 = \frac{Z_2(E_1 + J Z_1)}{Z_1 Z_2 + Z(Z_1 + Z_2)} \quad \dots \dots \textcircled{3}$$



(A)



(B)

\* 例題2の結果と一致している。

例題 4 図の回路で 1,1'よりみた等価電圧源の回路をテブナンの定理より求めよ。1,1'は開放状態にある。図で、 $kI_0$ が流れる電流源は  $R_0$ に流れる電流  $I_0$ に比例して電流が変化する。

(解)

まず、開放電圧  $V_0$ を求める。

図より、 $R$ に流れる電流は  $kI_0$ だから

$$V_0 = R_0 I_0 + R k I_0 \quad \text{①}$$

$$J + k I_0 = I_0 \quad \text{②}$$

①, ②より

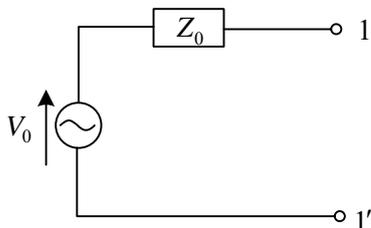
$$V_0 = \frac{R_0 + k R}{1 - k} J$$

次に、1,1'よりみたインピーダンスを  
求める。このとき電流源  $J$ を開放して  
 $I + k I' = I'$ ,  $V = (R + R_0) I'$  より

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{V}{(1 - k) I'} = \frac{R + R_0}{1 - k}$$

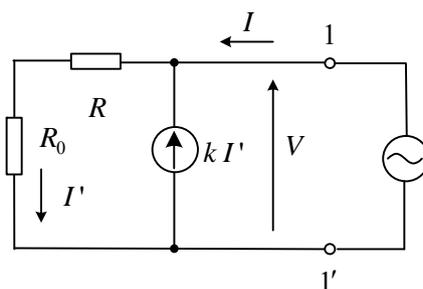
を得る。

よって、次の等価回路が得られる。

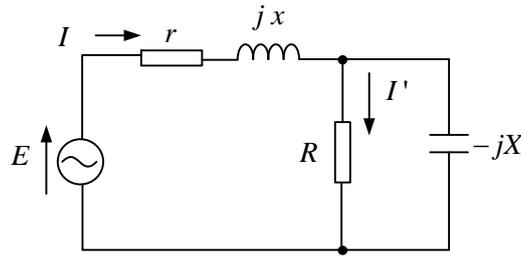


\*最初の回路の 1,1'にインピーダンス  $Z$ をつないで流れる電流を求め、等価回路の場合と比べよ。

(注意) 1,1'よりみたインピーダンス  $Z_0$ を求める場合、 $k I'$ の電流源を開放しないこと。図のように交流電源を 1,1'の右側にあるものとしてインピーダンスを求めるとよい。なお、上記のようにある枝の電流に比例する電流源はトランジスタの回路で見られる。



例題 5 図の回路で、 $R$  で消費される電力が最大となるように  $R$  の値を定めよ。



(解) 図のように、 $I, I'$  をとると、分流の公式より

$$I' = \frac{\frac{E}{r + jx + \frac{-jRX}{R - jX}}}{R - jX} = \frac{-jXE}{(r + jx)(R - jX) - jRX} = \frac{-jXE}{rR + xX + j(xR - rX - RX)}$$

$$|I'| = \frac{X|E|}{\sqrt{(rR + xX)^2 + (xR - rX - RX)^2}}$$

$R$  で消費される電力を  $P$  とすると、

$$P = R|I'|^2 = \frac{RX^2|E|^2}{(rR + xX)^2 + (xR - rX - RX)^2}$$

$$= \frac{RX^2|E|^2}{R^2(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) + 2RrX^2 + X^2(x^2 + r^2)}$$

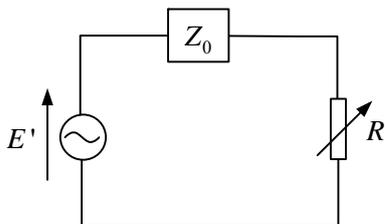
$$= \frac{X^2|E|^2}{R(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) + 2rX^2 + X^2(x^2 + r^2)/R}$$

従って、 $R(r^2 + x^2 + X^2 - 2xX) = \frac{X^2(x^2 + r^2)}{R}$  のとき、 $P$  は最大となる。

$$\therefore R = X \sqrt{\frac{r^2 + x^2}{r^2 + (x - X)^2}}$$

(別解) テブナンの定理より  $R$  の両端から他の回路をみた等価回路を求める。

供給電力最大の法則より



$$Z_0 = \frac{-(r + jx)jX}{r + j(x - X)}$$

$$R = |Z_0| = \frac{|r + jx|X}{|r + j(x - X)|} = \frac{X\sqrt{r^2 + x^2}}{\sqrt{r^2 + (x - X)^2}}$$

とき  $P$  は最大となる。

( $E'$  の計算はこの場合不要)

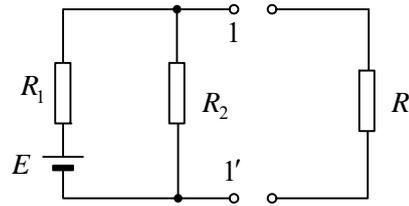


問題1 図の回路で、 $R$ をつなぐとき、 $R$ に流れる電流をテブナンの定理より求めよ。

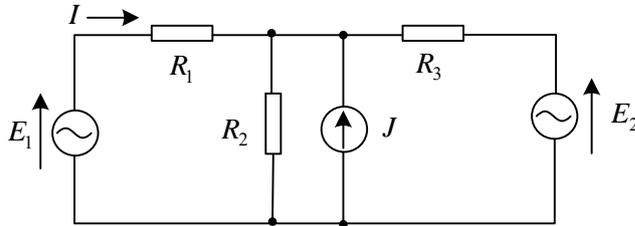
(答)  $1,1'$ 間の開放電圧  $V_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$

$1,1'$ から見た抵抗  $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

求める電流  $I = \frac{V_0}{R_0 + R} = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$

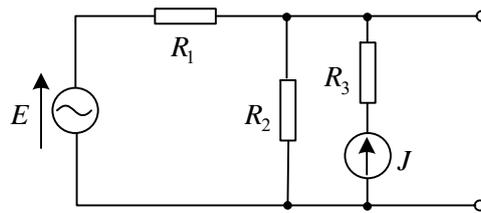


問題2 重ね合わせの理を用いて、図の回路の電流  $I$  を求めよ。但し、交流電圧源、交流電流源は同じ周波数で、それらのフェーザを図中に示している。 $R_1 = R_2 = R_3 = R$  とする。また、 $R_1$ で消費される電力  $P$  を求めよ。

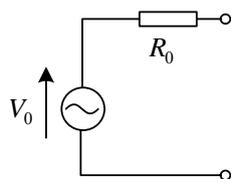


(答)  $I = \frac{2E_1}{3R} - \frac{E_2}{3R} - \frac{J}{3}$  ,  $P = R \left( \frac{2E_1}{3R} - \frac{E_2}{3R} - \frac{J}{3} \right)^2$  (各回路の電力の和でない)

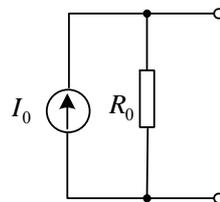
問題3 図の回路と等価な電源(電圧源及び電流源)を求めよ。但し、交流電圧源、交流電流源は同じ周波数で、 $E, J$ はそれらのフェーザである。



(答) 等価電圧源



等価電流源

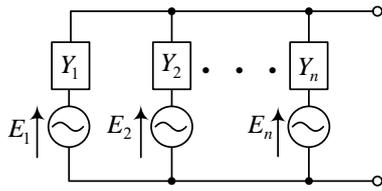


$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$   $V_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} J + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$

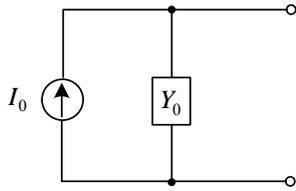
$I_0 = J + \frac{E}{R_1}$

\* 電流源と直列の抵抗、電圧源と並列の抵抗は等価電源には含まれないことが判る。

問題4 図の回路と等価な電源を求めよ。但し、交流電圧源は全て同じ周波数で、それらのフェーザを図中に示している。また、 $Y$  はアドミタンスを表す。



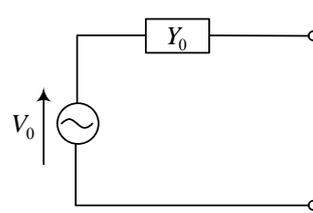
(答) ノートンの定理より



$$Y_0 = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$I_0 = Y_1 E_1 + Y_2 E_2 + \dots + Y_n E_n$$

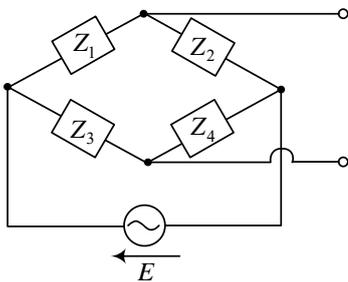
テブナンの定理より



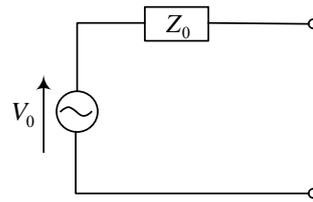
$$V_0 = I_0 / Y_0$$

(帆足・Millman の定理と呼ばれる)

問題5 図の回路と等価な電圧源による回路を求めよ。



(答)

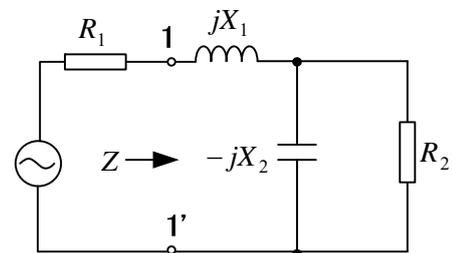


$$Z_0 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$V_0 = \frac{Z_2 Z_3 - Z_1 Z_4}{(Z_1 + Z_2)(Z_3 + Z_4)} E$$

問題6 図の回路で、 $R_2$  で消費される電力が最大となる  $X_1, X_2$  の値を求めよ。ただし、 $R_1 < R_2$  とする。 $X_1, X_2$  のみ可変である。

(電源から  $R_2$  に最大の電力が伝えられるような  $jX_1, -jX_2$  の回路を**整合回路**という。整合していれば  $R_2$  から左を見たインピーダンスも  $R_2$ )



(答) 1,1'から右を見たインピーダンス  $Z$  の実部と虚部が  $X_1, X_2$  によって変えられるから、供給電力最大の法則 (A) を適用する。 $Z = \bar{Z}_0$  ( $Z_0 = R_1$ ) より

$$jX_1 + \frac{-jX_2 R_2}{R_2 - jX_2} = R_1 \therefore (R_1 - jX_1)(R_2 - jX_2) = -jX_2 R_2$$

実部と虚部を等しいとおいて  $X_1 = \sqrt{R_1(R_2 - R_1)}$  ,  $X_2 = R_2 \sqrt{R_1 / (R_2 - R_1)}$

# 第 13章 二端子対網

二端子対(two terminal pair)とは、入力端子対(1,1')と出力端子対(2,2')のことである。回路をまとめたシステムとしてとらえて、入力(input)側と出力(output)側の関係を表す。電力や信号を送るとき使われる理論である。

## ○ インピーダンス行列 ( Z 行列 impedance matrix)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

||            ||            ||  
V            Z            I

通常,  $z_{12} = z_{21}$  である。

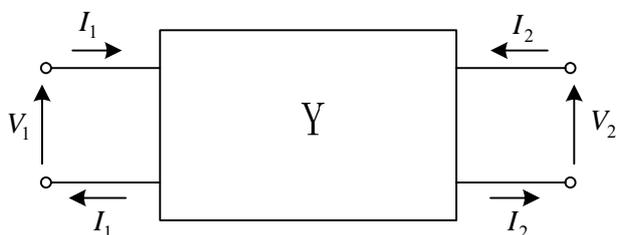
(注)  $V_1, I_1, V_2, I_2$  の矢印は必ず,

図の方向に定義すること。

(Y行列も同様)

入力側に交流電源, 出力側に負荷をつなぐと  
考えよう。二端子対網には電源は含まない。  
にたんしつのもう

## ○ アドミタンス行列 ( Y 行列 )



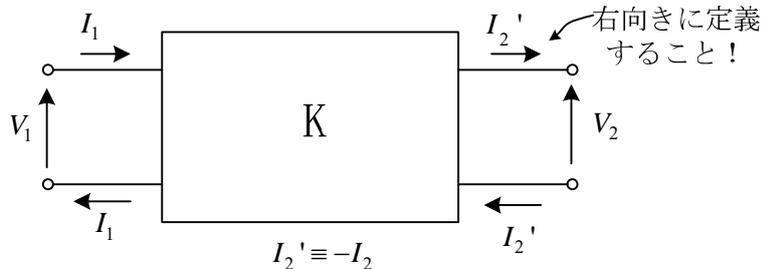
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

||            ||            ||  
I            Y            V

通常,  $y_{12} = y_{21}$  である。

$Y = Z^{-1}$  (逆行列) である。  $Z, Y$  は常に存在するとは限らない。

## ○ 縦続行列 ( K 行列, F 行列 cascade matrix)



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2' \end{bmatrix}$$

||  
K

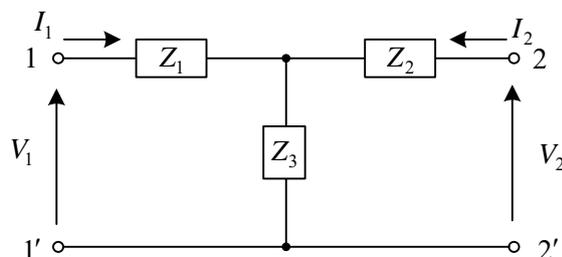
(注)  $V_1, I_1, V_2, I_2'$  の矢印は必ず, 図の向きに定義すること。

$A, B, C, D$  を四端子定数という。通常,  $AD - BC = 1$  ( $|K| = 1$ ) が成立する。

$Z, Y, K$  行列の求め方には2つの方法がある。

- ①  $V_1, I_1, V_2, I_2$  (または  $I_2'$ ) を図のように定義し、回路の式を上記の形に整理する方法。
- ②  $I_1 = 0$  (開放),  $V_1 = 0$  (短絡) など、特殊な場合を考えることにより求める方法。

図の回路のインピーダンス行列を求めてみよう。



このように書いても、 $1, 1'$  と  $2, 2'$  は開放されている訳ではない。電源があるかも知れないし、負荷があるかも知れない。原因はともかくとして、 $V_1, V_2, I_1, I_2$  が生じていると仮定して求める。

図の様に  $V_1, V_2, I_1, I_2$  を必ず矢印の向きに定義する。インピーダンス行列は次式で定義されている。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (13-1)$$

方法① とにかく式を立てて、(13-1)の形にする方法

$$\text{図より, } V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2)$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{インピーダンス行列は, } Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

方法② 特殊な条件から求める方法

(13-1)で、 $I_2 = 0$  の場合を考える。 $I_2 = 0$  は、 $2, 2'$  を開放することを意味する。

このとき、図より

$$V_1 = (Z_1 + Z_3) I_1, \quad V_2 = Z_3 I_1$$

$$\therefore z_{11} = Z_1 + Z_3, \quad z_{21} = Z_3$$

次に、 $I_1 = 0$  ( $1, 1'$  開放) を考える。図より、

$$V_1 = Z_3 I_2, \quad V_2 = (Z_2 + Z_3) I_2$$

$$\therefore z_{12} = Z_3, \quad z_{22} = Z_2 + Z_3$$

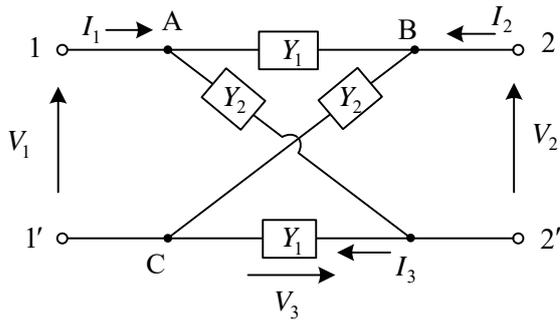
$Z_2 I_2 = 0$  となるから  
 $Z_2$  の電圧は 0。

(注)  $Z$  行列を求めるときは、 $I_2 = 0$  及び、 $I_1 = 0$  の場合を考えればよい。

$V_1 = 0$  ( $1, 1'$  を短絡) としても、 $z_{11} I_1 + z_{12} I_2 = 0$  だから、 $z_{11}$  と  $z_{12}$  が決められない。

\* 抵抗、コイル、コンデンサ、変成器、理想変成器からなる二端子対網は、**相反性の条件** (相反定理) を満足し、 $z_{12} = z_{21}$ ,  $y_{12} = y_{21}$ ,  $AD - BC = 1$  が成立する。

例題1 図の回路のY行列を求めよ。 $Y_1, Y_2$ はアドミタンスである。



(解)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{より,}$$

$$V_2 = 0 \text{ のとき, } I_1 = y_{11}V_1, I_2 = y_{21}V_1$$

$$V_1 = 0 \text{ のとき, } I_1 = y_{12}V_2, I_2 = y_{22}V_2$$

まず、2, 2' を短絡し、 $V_2 = 0$ の状態を考える。1, 1'間で見ると $Y_1, Y_2$ の並列回路が直列につながっているから、全体のアドミタンスは $(Y_1 + Y_2)/2$ となり

$$I_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_1 \quad \text{より}$$

$$\therefore y_{11} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

また、 $Y_1, Y_2$ には $\frac{V_1}{2}$ の電圧が

加わるので、節点Bで考えると、

キルヒホッフの電流則より

$$I_2 = I_2' + I_2'' = -Y_1 \frac{V_1}{2} + Y_2 \frac{V_1}{2} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_1$$

$$\therefore y_{21} = \frac{Y_2 - Y_1}{2}$$

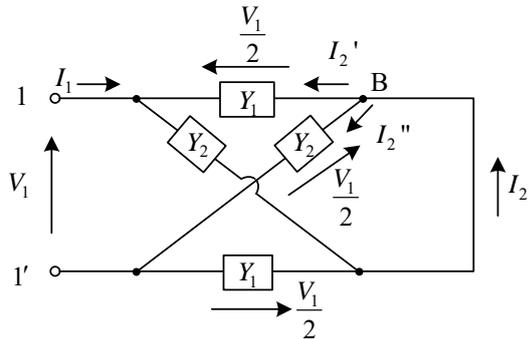
次に、1, 1'を短絡して $V_1 = 0$ の状態を考える。

$$I_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} V_2 \quad \text{より}$$

$$\therefore y_{22} = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

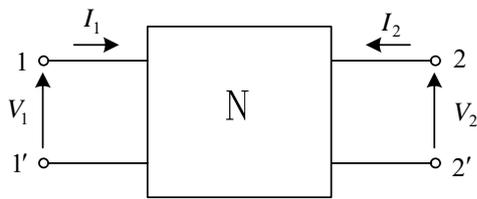
また、 $I_1 = -Y_1 \frac{V_2}{2} + Y_2 \frac{V_2}{2} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)V_2$

$$\therefore y_{12} = \frac{1}{2}(Y_2 - Y_1)$$

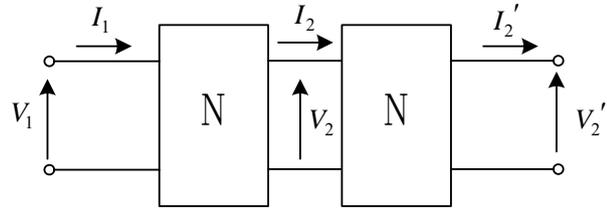


例題2 NのK行列  $K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  が既知のとき以下の問いに答えよ。

- (1) Nのインピーダンス行列ZをKで表せ。
- (2) 2,2'を入力側, 1,1'を出力側と考えたとき, NのK行列K'を求めよ。
- (3) (b) 図のように, Nを接続したとき, 全体の回路のK行列K'を求めよ。



(a)



(b)

(解) (1) 題意より, 電圧, 電流を図のように定義すると

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \cdots \cdots \textcircled{1} \quad I_1 = CV_2 - DI_2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より  $V_2$  を求めると,  $V_2 = I_1/C + (D/C)I_2$

①に代入して,  $V_1 = A(I_1/C + (D/C)I_2) - BI_2$

$$\therefore \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A/C & (AD/C) - B \\ 1/C & D/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{故に, } Z = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & | & K \\ 1 & & D \end{bmatrix} \quad |K|=1$$

(2) ②より,  $I_2 = -\frac{I_1}{D} + \frac{C}{D}V_2$     ①に代入  $V_2 = \frac{V_1}{A} + \frac{B}{A}(-\frac{I_1}{D} + \frac{C}{D}V_2)$

$$\therefore V_2 = \frac{1}{1 - BC/(AD)} \left( \frac{V_1}{A} - \frac{B}{AD}I_1 \right) = \frac{1}{AD - BC} (DV_1 - BI_1)$$

$$I_2 = -\frac{I_1}{D} + \frac{1}{AD - BC} (CV_1 - \frac{CB}{D}I_1) = \frac{1}{AD - BC} (CV_1 - AI_1)$$

$AD - BC = 1$  であるから

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad \text{よって, } K' = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \quad \leftarrow A \text{ と } D \text{ を交換した式となる。}$$

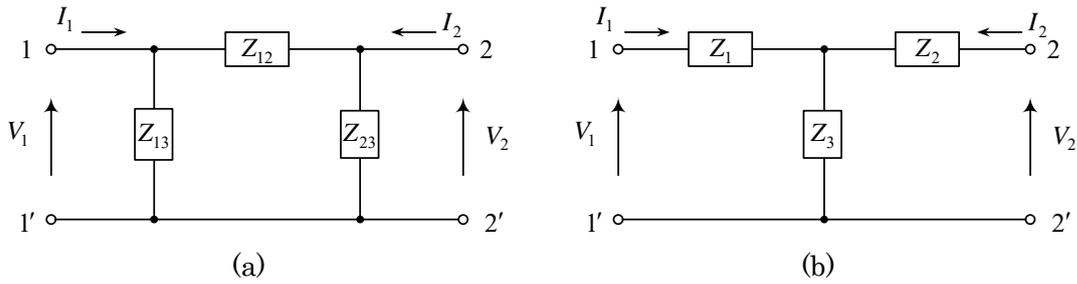
出力側は出る向きに定義するのが約束だから, -が必要

\* 対称回路では  $A = D$  が成り立つ (入出力どちらから見ても同じ回路)。

$$(3) \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = K^2 \begin{bmatrix} V_2' \\ I_2' \end{bmatrix}$$

$$\text{従って, } K' = K^2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 + BC & AB + BD \\ CA + CD & CB + D^2 \end{bmatrix}$$

例題3 (a)図の<sup>でるた</sup>△形回路と(b)図のY形回路が等価であるための条件を求めよ。



(注)1'と2'をまとめて1つの点3とし，三端子について(a)を(b)に直して計算することが多い。

(解) (a),(b)のZ行列が等しい条件より求める。Z行列の定義より，

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

まず，2,2'を開放し， $I_2 = 0$  の場合を考える。

$$\text{(a)図より， } V_1 = \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_1 = z_{11}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$$V_2 = \frac{Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_1 \cdot Z_{23} = z_{21}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\text{(b)図より， } V_1 = (Z_1 + Z_3)I_1 = z_{11}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

$$V_2 = Z_3I_1 = z_{21}I_1 \quad \dots \dots \textcircled{6}$$

次に，1,1'を開放し $I_1 = 0$ の場合を考える。

一般に， $z_{12} = z_{21}$ であるから， $z_{22}$ だけを求めればよい。

$$\text{(a)図より， } V_2 = \frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{13})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} I_2 = z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

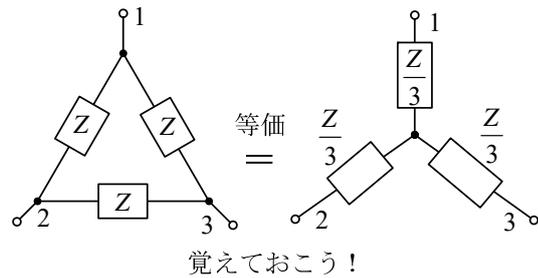
$$\text{(b)図より， } V_2 = (Z_2 + Z_3)I_2 = z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{8}$$

④と⑥，③と⑤，⑦と⑧を比較して，

$$Z_1 = \frac{Z_{12}Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-2)$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-3)$$

$$Z_3 = \frac{Z_{13}Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}} \quad (13-4)$$



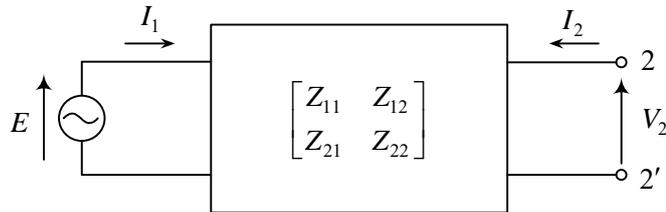
Y形にするとR，Lは1/3，Cは3倍になる。

\* △形回路とY形回路の変換を**Y-△変換**(star-delta transformation)という。逆に，

$$Y_{13} = \frac{Y_1Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, Y_{23} = \frac{Y_2Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, Y_{12} = \frac{Y_1Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \quad (13-5)$$

$$\text{但し， } Y_{13} = \frac{1}{Z_{13}}, Y_{23} = \frac{1}{Z_{23}}, Y_{12} = \frac{1}{Z_{12}}, Y_1 = \frac{1}{Z_1}, Y_2 = \frac{1}{Z_2}, Y_3 = \frac{1}{Z_3}$$

例題4 図の回路でインピーダンス行列が既知のとき、2, 2'の端子から見た等価電圧源を求めよ。



(解) 図のように、 $I_1, I_2, V_2$ を定義すると、

$$E = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

テブナンの定理を適用する。まず、開放電圧を求めるために上式で  $I_2 = 0$  とおくと、

$$E = z_{11}I_1, \quad V_2 = z_{21}I_1 \quad \therefore V_2 = \frac{z_{21}E}{z_{11}} \equiv E_0 \quad \text{とおく。}$$

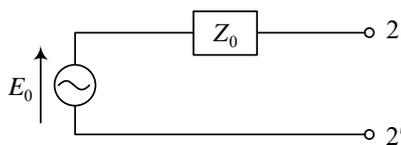
次に、2, 2'端子から見たインピーダンスを求める。電源は殺す必要があるから、 $E$ は短絡する。よって、 $\textcircled{1}$ で  $E = 0$  とおけばよい。

$$\text{従って、} \quad 0 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \therefore I_1 = -\frac{z_{12}}{z_{11}}I_2$$

$$\textcircled{2} \text{に代入して、} \quad V_2 = \left(z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{z_{11}}\right)I_2$$

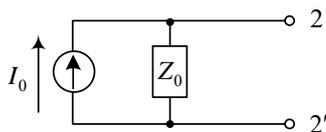
$$\therefore \frac{V_2}{I_2} = \frac{z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12}}{z_{11}} \equiv Z_0 \quad \text{とおく。}$$

よって、等価電圧源は



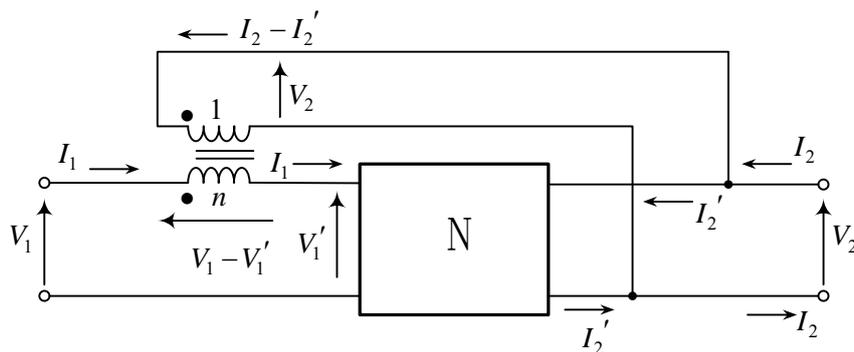
\* 等価電流源はノートンの定理を用いる。 $Z_0$ の求め方は同じ。

短絡電流は  $I_0$  は  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  で、 $V_2 = 0$  とおいて、 $I_2$  を求めて、 $I_0 = -I_2$  とする。



$$I_0 = \frac{z_{21}E}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \quad \text{となる。}$$

例題5 Nのインピーダンス行列が既知のとき、全体の二端子対網のインピーダンス行列を求めよ。



(解) 図のように、電圧、電流を定義する。

図より、理想変成器に関し、

$$V_1 - V_1' : V_2 = n : 1 \quad (\text{密結合の条件}) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$nI_1 + I_2 - I_2' = 0 \quad (\text{励磁電流0の条件}) \quad \dots \textcircled{2}$$

題意より、
$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2' \end{bmatrix}$$
 と書ける。  $\dots \textcircled{3}$

②を③へ代入して、

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}(nI_1 + I_2) \quad \dots \textcircled{4}$$

①, ③より

$$\begin{aligned} V_1 - nV_2 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2) \\ \therefore V_1 &= nZ_{21}I_1 + nZ_{22}(nI_1 + I_2) + Z_{11}I_1 + Z_{12}(nI_1 + I_2) \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

④, ⑤より

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} + n(Z_{21} + Z_{12}) + n^2Z_{22} & Z_{12} + nZ_{22} \\ Z_{21} + nZ_{22} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

諸行列間の関係を以下に示しておく。

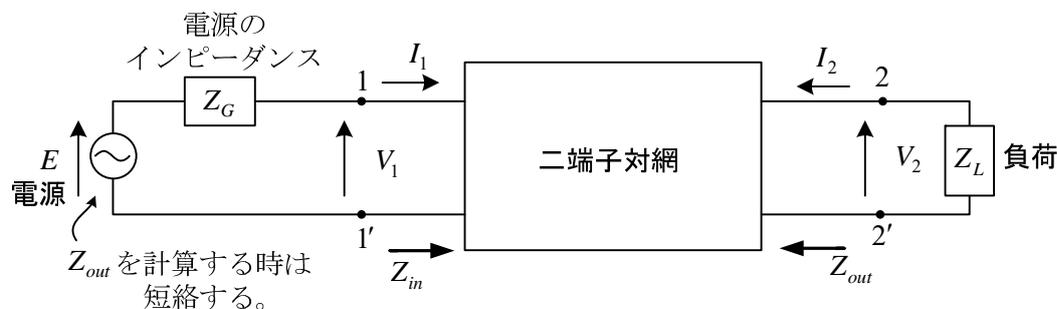
$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & |K| \\ 1 & D \end{bmatrix} \quad (13-6)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -|K| \\ -1 & A \end{bmatrix} \quad (13-7)$$

$$K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{z_{21}} \begin{bmatrix} z_{11} & |Z| \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{-1}{y_{21}} \begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ |Y| & y_{11} \end{bmatrix} \quad (13-8)$$

## ○ 二端子対網の伝送的性質

図の二端子対網を含む回路で、**入力インピーダンス**(input impedance)と**出力インピーダンス**(output impedance)は、次式で求められる。但し、出力インピーダンスを求める際、電源は殺す必要がある。従って、テブナンの定理の場合のように電圧源は短絡する。



$$\text{入力インピーダンス} \quad Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} \quad (13-9)$$

$$\text{出力インピーダンス} \quad Z_{out} = \frac{V_2}{I_2} \quad (13-10)$$

二端子対網の入力電圧  $V_1$  と出力電圧  $V_2$  の比を用いて、**伝達量  $\theta$**  を次式で定義する。**伝達量  $\theta$**  は二端子対網で決まり電源のインピーダンスや負荷は関係ない（電源の周波数は関係する）。

$$\theta \equiv \log \frac{V_1}{V_2} = \log_e \left| \frac{V_1}{V_2} \right| + j \arg \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \quad (13-11)$$

$\alpha' = \log_e |V_1/V_2|$  は**減衰量**と呼ばれ単位はネーパ [Np]、 $\beta = \arg(V_1/V_2)$  は**位相量**と呼ばれ単位はラジアン [rad] である。通常、デシベル [dB] 表示した次式の減衰量  $\alpha$  が用いられる。

$$\alpha \equiv 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| \quad [\text{dB}] \quad (13-12)$$

$|V_1| = |V_2|$  なら  $\alpha = 0$  [dB]、 $\alpha > 0$  なら減衰、 $\alpha < 0$  なら増幅している。位相量は、入出力電圧の位相差  $\beta = \arg V_1 - \arg V_2$  を表わす。減衰量や位相量は二端子対網に含まれる回路素子のインピーダンスによって決まる。従って電源または信号の周波数の関数となる。**フィルタ**の設計は減衰量や位相量を用いて行われる。

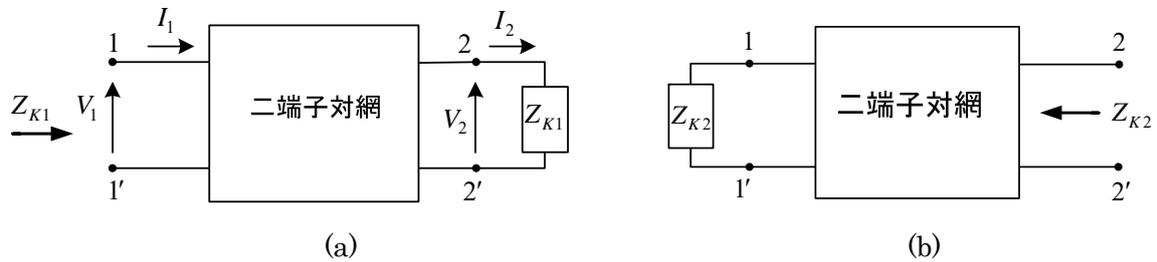
なお、電子回路や自動制御では、**伝達関数**  $G = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{出力}}{\text{入力}}$  を定義して、

$$\text{利得 (ゲイン)} \quad g \equiv 20 \log_{10} |V_2/V_1| \quad [\text{dB}] \quad (13-13)$$

$$\text{位相} \quad \arg G = \arg(V_2/V_1) \quad [\text{rad}] \quad (13-14)$$

を考える。つまり、減衰ではなくて**増幅**の立場から見るのが一般的である。

**反復パラメータ**（反復インピーダンス(iterative impedance) $Z_{K1}, Z_{K2}$ ，反復伝達量 $\theta_K$ ）について述べる。図(a)の回路で負荷として $Z_{K1}$ をつないだ時、たまたま入力インピーダンスも $Z_{K1}$ になったとき、その $Z_{K1}$ を**反復インピーダンス**という。 $Z_{K1}$ は二端子対網によって違う。2, 2' を入力側と考えると同様に $Z_{K2}$ が定義できる。



反復とは繰り返すことである。第1章の問題4(b)で求めた抵抗が反復インピーダンスである。すなわち、上記の二端子対網を右に無限個つなげば、どの接続点から右を見ても同じインピーダンスになるはずであり、これが反復インピーダンス $Z_{K1}$ になる。分布定数回路の**特性インピーダンス**も反復インピーダンスの一種である。

$Z_{K1}$ を負荷としてつなぐとき、 $V_1 = Z_{K1}I_1$ ， $V_2 = Z_{K1}I_2$ であり、このとき、

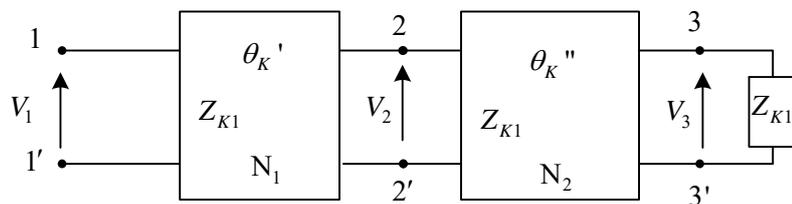
$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_2} = \log \frac{I_1}{I_2} \quad : \text{反復伝達量(iterative transfer constant)} \quad (13-15)$$

$$\alpha_k = 20 \log_{10} |V_1/V_2| \quad : \text{反復減衰量}, \quad (13-16)$$

$$\beta_k = \arg(V_1/V_2) \quad : \text{反復位相量} \quad (13-17)$$

という。反復パラメータは通信分野、分布定数回路（第17章）などで利用される。

**問題** 図のように二つの二端子対網  $N_1, N_2$  があり、左から見た反復インピーダンスがどちらも $Z_{K1}$ で、反復伝達量がそれぞれ $\theta_K', \theta_K''$ であるとき、 $N_1, N_2$ 全体の反復インピーダンスと反復伝達量を求めよ。



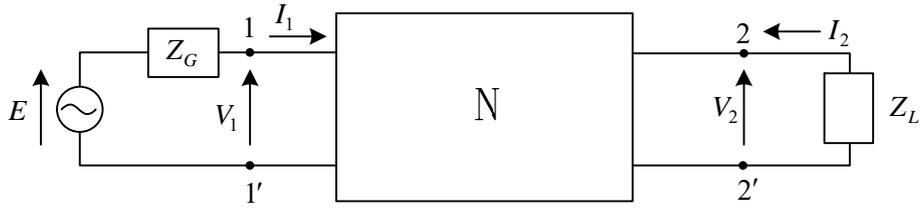
(解) 端子3, 3'に $Z_{K1}$ を接続すると、2, 2'より右を見たインピーダンスは、定義より $Z_{K1}$ である。よって、定義より1, 1'より右を見たインピーダンスも $Z_{K1}$ となる。よって端子3, 3'に $Z_{K1}$ を接続すると、1, 1'より右を見たインピーダンスが $Z_{K1}$ となっているから、 $N_1, N_2$ 全体の反復インピーダンスは $Z_{K1}$ である。

$N_1, N_2$ 全体の反復伝達量を $\theta_K$ とすると

$$\theta_K = \log \frac{V_1}{V_3} = \log \frac{V_1}{V_2} + \log \frac{V_2}{V_3} = \theta_K' + \theta_K'' \quad (13-18)$$

となる。

例題 6 図の回路において以下の問に答えよ。



- (1) N のインピーダンス行列  $Z$  を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。  
 (2) N の  $K$  行列を既知とするとき，入，出力インピーダンスを求めよ。

(解) (1) 図のように  $V_1, I_1, V_2, I_2$  を定義すると，次式が成立する ( $z_{11} \sim z_{22}$  は既知)。

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

図より，  $Z_L = -V_2 / I_2 \quad \dots \dots \textcircled{3}$

②，③で， $V_2$  を消去し， $I_2$  を求めて①に代入すると入力インピーダンス  $Z_{in}$  は，

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{Z_L + z_{22}} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

出力インピーダンス  $Z_{out}$  については，電源  $E$  を短絡し， $2, 2'$  より見ることになるから，

$V_2 = V_1', V_1 = V_2', I_2 = I_1', I_1 = I_2'$  と書くと，②，①より

$$V_1' = z_{22}I_1' + z_{21}I_2' \quad \dots \dots \textcircled{2}'$$

$$V_2' = z_{12}I_1' + z_{11}I_2' \quad \dots \dots \textcircled{1}'$$

従って④式で， $Z_L \rightarrow Z_G, z_{11} \rightarrow z_{22}, z_{12} \rightarrow z_{21}, z_{21} \rightarrow z_{12}, z_{22} \rightarrow z_{11}$

と置き換えればよい。故に，

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{21}z_{12}}{Z_G + z_{11}} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

(2) 四端子定数を  $A, B, C, D$  とすると， $I_2$  が左向きに定義されていることに注意して

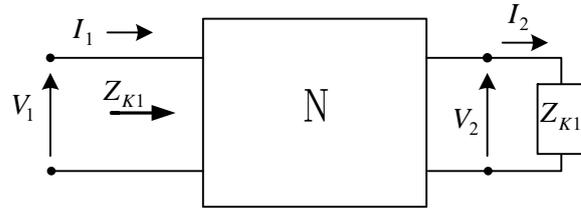
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 - BI_2}{CV_2 - DI_2} = \frac{A \frac{V_2}{-I_2} + B}{C \frac{V_2}{-I_2} + D} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad \dots \dots \textcircled{6}$$

出力側から見た  $K$  行列は， $A$  と  $D$  を交換するだけでよいから(例題 2 参照)，

⑥の  $Z_L \rightarrow Z_G$  として

$$Z_{out} = \frac{DZ_G + B}{CZ_G + A} \quad \dots \dots \textcircled{7}$$

例題 7 N の K 行列  $K = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  が既知のとき、以下の間に答えよ。



(1) 反復インピーダンス  $Z_{K1}$  を求めよ。N が対称回路のときはどうなるか。

(2) 反復伝達量を  $\theta_K$  とするとき、 $e^{\theta_K}$  を求めよ。N が対称回路のとき  $\cosh \theta_K$  はどうなるか。

(解) (1) 反復インピーダンスの定義から、負荷のインピーダンスが  $Z_{K1}$  のとき、入力インピーダンスも  $Z_{K1}$  となるから、

$$Z_{K1} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} = \frac{A \frac{V_2}{I_2} + B}{C \frac{V_2}{I_2} + D} = \frac{AZ_{K1} + B}{CZ_{K1} + D}$$

$$\therefore CZ_{K1}^2 - (A - D)Z_{K1} - B = 0$$

$$Z_{K1} = \frac{1}{2C} \left[ (A - D) \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC} \right] \quad (13-19)$$

根号は  $Z_{K1}$  の実部が正になるように選ぶ。

N が対称回路のとき、 $A = D$  であるから、

$$Z_{K1} = \sqrt{\frac{B}{C}} \quad (13-20)$$

(2) 定義より、 $\theta_K = \log \frac{V_1}{V_2}$

$$\text{一方、} V_1 = AV_2 + BI_2 = AV_2 + \frac{BV_2}{Z_{K1}}$$

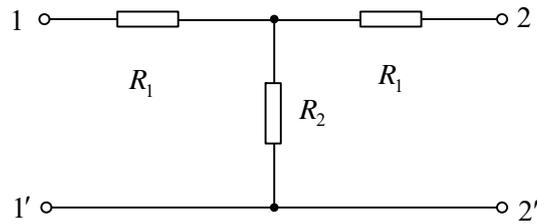
$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = A + \frac{B}{Z_{K1}}, \quad e^{\theta_K} = A + \frac{B}{Z_{K1}}$$

N が対称回路のとき、 $AD - BC = 1$ 、 $A = D$  を用いて

$$\cosh \theta_K = \frac{1}{2} (e^{\theta_K} + e^{-\theta_K}) = \frac{1}{2} \left( A + \sqrt{BC} + \frac{1}{A + \sqrt{BC}} \right) = A$$

\* これらの式は、第 17 章の分布定数回路で利用する。

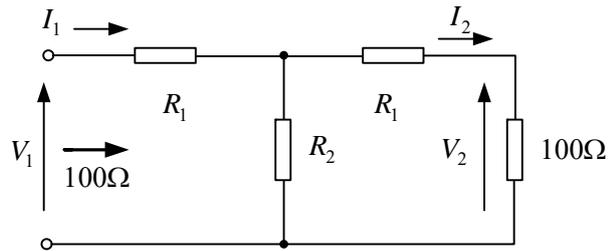
例題 8 図の回路で、反復インピーダンス  $Z_K = 100\Omega$ 、反復減衰量  $\alpha[\text{dB}]$  であるように、 $R_1, R_2$  を定めよ。



(解)  $Z_K = 100\Omega$  であるから、 $2, 2'$  に  $100\Omega$  を接続すると、入力抵抗も  $100\Omega$  となる。従って、

$$100 = R_1 + \frac{(R_1 + 100)R_2}{R_1 + 100 + R_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

題意より、



$$\alpha = 20 \log_{10} \left| \frac{V_1}{V_2} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{100 \times I_1}{100 \times I_2} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{I_1}{I_2} \right| \quad \dots \textcircled{2}$$

図より、

$$I_2 = \frac{R_2}{100 + R_1 + R_2} I_1 \quad \therefore \frac{I_1}{I_2} = \frac{100 + R_1 + R_2}{R_2} \quad \dots \textcircled{3}$$

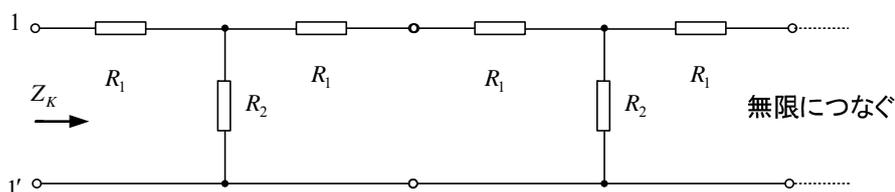
②, ③より、

$$10^{\frac{\alpha}{20}} = \frac{100 + R_1 + R_2}{R_2} \quad \dots \textcircled{4}$$

④を①に代入する。  $100 = R_1 + (R_1 + 100)10^{-\frac{\alpha}{20}} \quad \therefore R_1 = \frac{100(1 - 10^{-\frac{\alpha}{20}})}{1 + 10^{-\frac{\alpha}{20}}}$

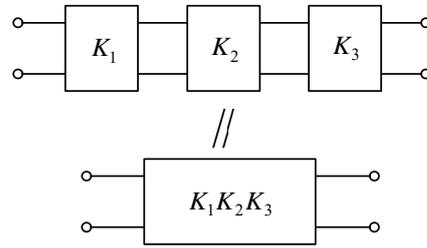
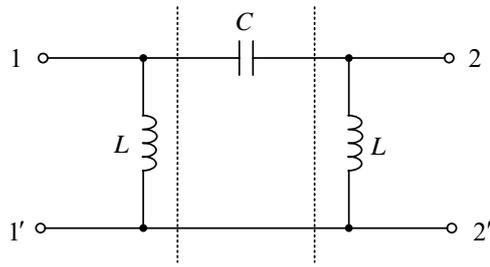
④より、  $R_2 = \frac{100 + R_1}{10^{\frac{\alpha}{20}} - 1} = \frac{200}{(10^{\frac{\alpha}{20}} - 1)(10^{-\frac{\alpha}{20}} + 1)}$

\* 図のように無限につないだときの入力インピーダンスが反復インピーダンスである。



例題 9 図の回路につき以下の間に答えよ。

- (1)  $K$  行列を求めよ。
- (2) 反復インピーダンスを求めよ。



(解) (1) 3つの部分に分けて考える。

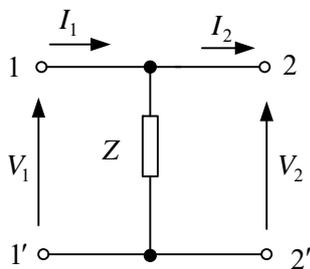
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C} \\ j\omega L & 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j\omega L & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega L} \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) & 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 対称回路だから, (13-20)より

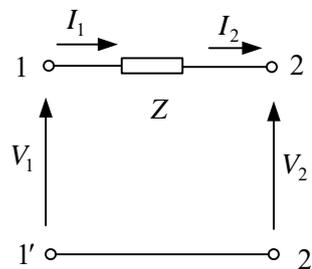
$$Z_K = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C \left(2 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{2\omega^2 LC - 1}} = \frac{\omega L}{\sqrt{2\omega^2 LC - 1}}$$

$\omega$  が大きく  $2\omega^2 LC > 1$  のとき,  $Z_K$  の実部が正の条件を満足している。このとき  $Z_K$  は純抵抗だから, この回路を無限個接続した場合,  $L, C$  だけの回路にもかかわらず, エネルギーが回路の遠くまで伝わっていくと解釈される。しかし,  $2\omega^2 LC < 1$  なら,  $Z_K$  は虚数だからエネルギーは消費されず, 遠くに信号は届かないであろう。よって, 高域通過フィルタと考えられる。

☆  $K$  行列を求めるため, 基本回路の  $K$  はすぐ出そう!  $V_1, I_1$  を  $V_2, I_2$  で表す。

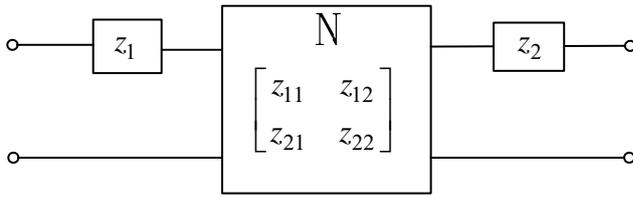


$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 \\ I_1 &= I_2 + \frac{V_2}{Z} \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

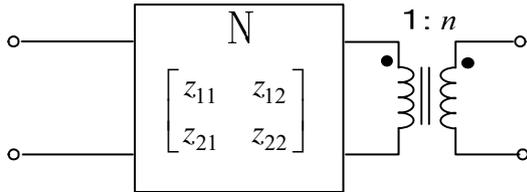


$$\begin{aligned} V_1 &= V_2 + Z I_2 \\ I_1 &= I_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

問題 1 N のインピーダンス行列が既知であるとき、全体の 2 端子対網のインピーダンス行列を求めよ。

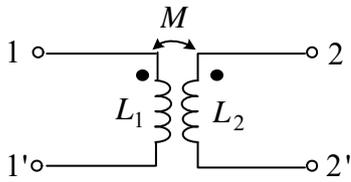


$$(答) Z = \begin{bmatrix} z_{11} + z_1 & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} + z_2 \end{bmatrix}$$



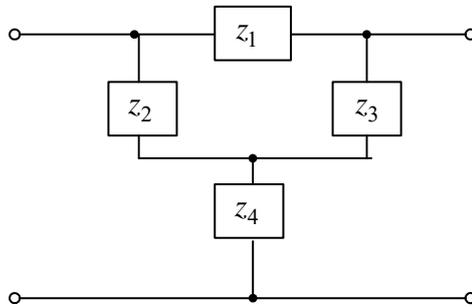
$$(答) Z = \begin{bmatrix} z_{11} & n z_{12} \\ n z_{21} & n^2 z_{22} \end{bmatrix}$$

問題 2 図の回路の K 行列を求めよ。



$$(答) K = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{M} & \frac{j\omega(L_1L_2 - M^2)}{M} \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{bmatrix}$$

問題 3 図の二端子対網において、インピーダンス行列を求めよ。



(答) 直接  $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 0$  を用いる方法, Y- $\Delta$  変換して求める方法などを利用する。

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{z_2(z_1 + z_3)}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 & \frac{z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 \\ \frac{z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 & \frac{z_3(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2 + z_3} + z_4 \end{bmatrix}$$

# 第 14 章 フーリエ級数によるひずみ波の解析

## ○ フーリエ級数(Fourier series)

周期関数  $f(t)$  とは、ある**周期** $T$  で同一の波形を繰り返すもので、次の性質がある。

$$f(t+T) = f(t)$$

このとき、 $f(t)$  を以下のフーリエ級数に展開すると、いろいろの周波数の三角関数の和として表現でき、式が扱い易く大変便利である。

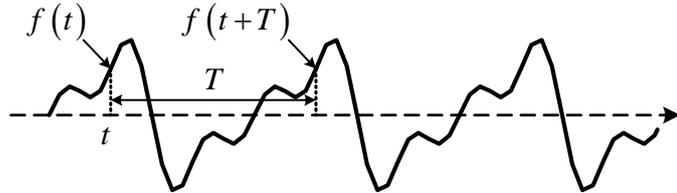


図 14-1 周期関数 (ひずみ波交流)

[形式 A]

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14-1)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (n \neq 0) \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt$$



[形式 B]

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (14-2)$$

$$A_0 = a_0 \quad , \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \phi_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

ここで、 $A_n$  をスペクトルという。 $A_0$  : 直流分、 $f_1(t) = A_1 \sin(\omega_0 t + \phi_1)$  : 基本波(fundamental wave)、 $f_2(t) = A_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$  : 第 2 高調波(second harmonic)、 $f_3(t) = A_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$  : 第 3 高調波(second harmonic) などという。第  $n$  高調波の周波数は、基本波の周波数  $f_0 = \omega_0 / (2\pi)$  の  $n$  倍、周期は基本波の周期  $T$  の  $1/n$  になる。

[形式 C]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (14-3)$$

$$C_0 = a_0 \quad , \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad , \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

変数  $t$  のかわりに、 $\omega_0 t = \theta$  を用いるときは、形式 A では、

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (14-4)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$



この理由は、 $\omega_0 t = \theta$  より、

$$\text{これは、 } dt = \frac{d\theta}{\omega_0} \quad t: 0 \rightarrow T, \quad \theta: 0 \rightarrow \omega_0 T = 2\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{\omega_0 T} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

ただし、 $f(\theta)$  は  $f(t)$  で  $\omega_0 t = \theta$  と置き換えた関数を意味する。 $a_n, b_n$  についても同様である。

(注) **積分範囲** を  $0 \rightarrow T$  または  $0 \rightarrow 2\pi$  としたが、とにかく 1 周期積分すればよいので、 $-\frac{T}{2} \rightarrow \frac{T}{2}$

または  $-\pi \rightarrow \pi$  としてもよい。

[形式 A] の説明

まず、 $a_0$  を求めよう。 $f(t)$  を  $0 \rightarrow T$  まで積分して、

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 \int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt$$

ここで、 $\int_0^T \cos n\omega_0 t dt = 0, \quad \int_0^T \sin n\omega_0 t dt = 0$  だから

$$\therefore \int_0^T f(t) dt = a_0 T \quad \therefore a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$a_0$  は平均値であり、 $f(t)$  に含まれる直流成分を表す。覚えやすい。

$a_n$  を求めるには、 $f(t)$  の両辺に  $\cos m\omega_0 t$  を掛けて積分する。

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos m\omega_0 t dt &= a_0 \int_0^T \cos m\omega_0 t dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \{ \cos(n-m)\omega_0 t + \cos(n+m)\omega_0 t \} dt \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \frac{T}{2} & n = m \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \sin(n+m)\omega_0 t + \sin(n-m)\omega_0 t \} dt = 0$$

従って、第 2 項の  $n$  が  $m$  に等しい場合のみ値をもち、

$$\int_0^T f(t) \cos m \omega_0 t dt = a_m \cdot \frac{T}{2} \quad \therefore a_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos m \omega_0 t dt$$

$m$  を改めて  $n$  とすれば公式を得る。

$b_n$  を求めるには、 $f(t)$  の両辺に  $\sin m \omega_0 t$  を掛けて積分する。

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \sin m \omega_0 t dt &= a_0 \int_0^T \sin m \omega_0 t dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos n \omega_0 t \sin m \omega_0 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^T \sin n \omega_0 t \sin m \omega_0 t dt \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin n \omega_0 t \sin m \omega_0 t dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \{ \cos(n-m)\omega_0 t - \cos(n+m)\omega_0 t \} dt \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq m \text{ のとき} \\ \frac{T}{2} & n = m \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

よって、第3項で  $n$  が  $m$  に等しい場合のみ値をもち、

$$\int_0^T f(t) \sin m \omega_0 t dt = b_m \cdot \frac{T}{2} \quad \therefore b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin m \omega_0 t dt$$

$m$  を改めて  $n$  とすれば公式を得る。

一般に、**関数系列**

$$\{ \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \dots \} = \{ 1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots \}$$

において、次式が成立する。**関数系列の積分公式**と呼ぶ。

$$\int_0^T \phi_m \phi_n dt = 0 \quad (m \neq n) \quad (14-5)$$

$\omega_0$  は**基本波の角周波数**、 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  は最も長い**基本波の周期**である。

$\phi_m \phi_n$  の周期は積を和に変えると、 $T$  の整数分の1である。

よって、 $0 \sim T$  で積分すると、 $0$  となる。

$$\int_0^T \phi_0^2 dt = T \quad (14-6)$$

$$\int_0^T \phi_m^2 dt = \frac{T}{2} \quad (m \neq 0) \quad (14-7)$$

**同じものの積には定数項を生じるので、積分は0でない。**

\* この公式を理解していれば(覚えるのでなく)、フーリエ解析の計算は超簡単だ!

\* [形式A]で  $a_n$  や  $b_n$  を求める公式もそれらの係数と同じ三角関数を掛けたときに値が  $T/2$  になるから、それで割れば求まる。

〔形式 B〕の説明 〔形式 A〕の三角関数を合成しただけ。

〔形式 C〕の説明 〔形式 A〕より〔形式 C〕を導く。

$$\cos n \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn \omega_0 t} + e^{-jn \omega_0 t})$$

$$\sin n \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn \omega_0 t} - e^{-jn \omega_0 t})$$

であるから、

$$a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t = C_n e^{jn \omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn \omega_0 t}$$

$$\text{但し, } C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$C_n, C_{-n}$ は一般に複素数である (しかし、それらで求めた  $f(t)$  は実数である)。いま、

$$C_0 = a_0$$

と書くことにすれば、

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega_0 t + b_n \sin n \omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{jn \omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn \omega_0 t}) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn \omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn \omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn \omega_0 t} \end{aligned}$$

係数  $C_n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) は以下のようにして求まる。まず、

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{jn \omega_0 t} e^{jm \omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(n+m) \omega_0 t} dt \quad (14-8)$$

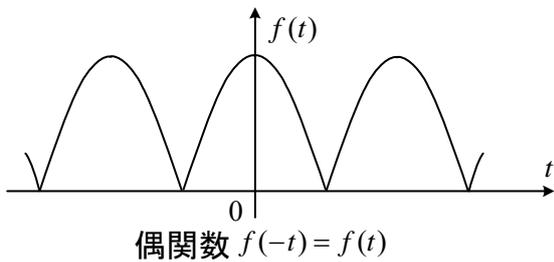
$$= \begin{cases} 1 & n = -m \text{ のとき} \\ 0 & n \neq -m \text{ のとき} \end{cases} \quad \longleftarrow \frac{1}{jT(n+m)\omega_0} \left[ e^{j(n+m)\omega_0 t} \right]_0^T = 0$$

の関係がある。これを用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn \omega_0 t} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk \omega_0 t} e^{-jn \omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \int_0^T e^{jk \omega_0 t} e^{-jn \omega_0 t} dt \\ &= C_n \end{aligned}$$

$k$  が  $n$  のときのみ値をもつ。

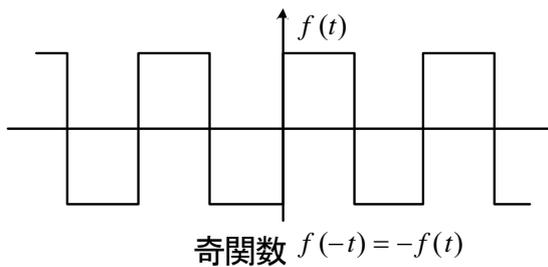
## ○ フーリエ級数の性質



$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$f(-t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t - b_n \sin n\omega_0 t)$$

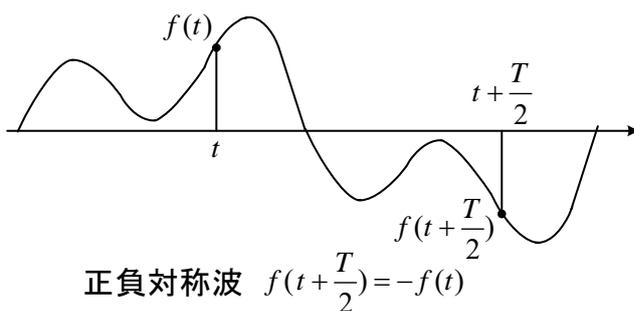
両者が等しいから,  $b_n = 0$   
 なわち,  $\sin$  の成分はない。



$f(-t) = -f(t)$  だから

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

すなわち, 直流分や  $\cos$  の成分はない。



$$f(t + \frac{T}{2}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos(n\omega_0 t + \frac{n\omega_0 T}{2}) + b_n \sin(n\omega_0 t + \frac{n\omega_0 T}{2}) \right\}$$

$n\pi$

$n$  が偶数のとき,  $-$  はつかない。  
 $n$  が奇数のとき,  $-$  がつく。

これが,  $-f(t)$  に等しくなるには,  $a_0 = 0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  の  $n$  は奇数  
 すなわち,  $a_1, b_1, a_3, b_3, \dots$  の項 (奇数調波) だけが存在する

## パーシバルの定理

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \right\}^2 dt \\ &= a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \end{aligned} \quad (14-9)$$

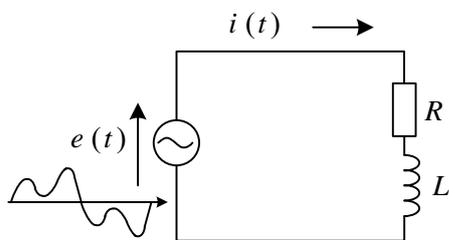
(関数系列の積分の公式からすぐ求まる。)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \right\}^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t} \right\} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega t} \right\} dt \\ &= C_0^2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} C_n C_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (C_{-n} = \overline{C_n}) \end{aligned} \quad (14-10)$$

## ○ フーリエ級数の電気回路への応用

周期関数はフーリエ級数によって周波数の異なる成分に分けられた。負荷が  $R, L, C$  の線形回路であれば、**重ね合わせの理**より成分ごとに解を求めて、後で、加え合わせればよい。周波数の高い成分程値は小さくなるのが一般的だから、 $n=10$  ぐらいまででも、良い解が得られる。

$e(t)$  が与えられて、 $i(t)$  の定常解を求める問題



手順1.  $e(t)$  をフーリエ級数に展開し、

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (14-11)$$

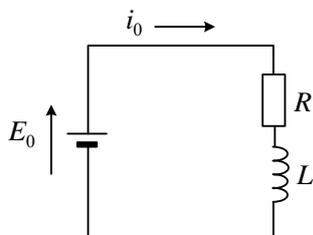
を得る。

$E_0$ : 直流分,  $E_{1e}$ : **基本波成分**の実効値

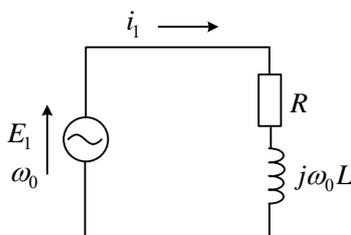
$E_{2e}$ : **第2調波成分**の実効値・・・

手順2. 成分ごとに  $i$  を求める。

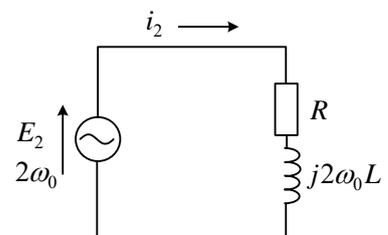
$$E_n = E_{ne} e^{j\varphi_n} \quad : \text{第 } n \text{ 調波成分のフェーザ}$$



$$i_0 = \frac{E_0}{R}$$



$$I_1 = \frac{E_1}{R + j\omega_0 L}$$



$$I_2 = \frac{E_2}{R + j2\omega_0 L}$$

フェーザから瞬時値へ  $i_1 = \frac{\sqrt{2} E_{1e}}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \theta_1)$  但し、 $\tan \theta_1 = \frac{\omega_0 L}{R}$

$$i_2 = \frac{\sqrt{2} E_{2e}}{\sqrt{R^2 + (2\omega_0 L)^2}} \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 - \theta_2) \quad \text{但し、} \tan \theta_2 = \frac{2\omega_0 L}{R}$$

手順3. 各成分を重ね合わせて  $i$  を求める。

$$\begin{aligned} i &= i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots \\ &= \frac{E_0}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} E_{ne}}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n) \end{aligned} \quad (14-12)$$

$$\text{但し、} \theta_n = \tan^{-1} \frac{n\omega_0 L}{R} \quad (14-13)$$

一般に、 $i = i_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n)$  と書ける。 $I_{ne}$ : **第  $n$  調波成分**の実効値

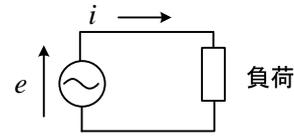
(注) フェーザ表示して、 $I = i_0 + I_1 + I_2 + I_3 + \dots$  と書いてはいけない。フェーザ同士の演算ができるのは、あくまで同じ周波数のときのみ。瞬時値を加えることは重ね合わせの理より可能。

○ ひずみ波交流の実効値, 電力, 力率

電源電圧と電流が次式で与えられるとする (直流分は0の場合を考えることが多い)。

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (14-14)$$

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n) \quad (14-15)$$



$e, i$  の実効値 (root-mean-square (r.m.s.) value, effective value) をそれぞれ  $E_e, I_e$  とすると,

$$E_e \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \quad (\text{実効値の一般的な定義}) \quad (14-16)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \right]^2 dt} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} E_{ne}^2} \\ &= \sqrt{E_{1e}^2 + E_{2e}^2 + E_{3e}^2 + \dots} \quad (\text{パーシバルの定理より簡単}) \quad (14-17) \end{aligned}$$

$$\text{同様に電流の実効値は, } I_e \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{I_{1e}^2 + I_{2e}^2 + I_{3e}^2 + \dots} \quad (14-18)$$

高調波がある場合も抵抗  $R$  で消費される電力の平均値は  $R I_e^2$  となる ( $R i^2$  の平均値だから)。

逆に, こうなるように実効値が定義されたのである。

**ひずみ率 (distortion factor) :  $k$**  (どの程度, 正弦波から変形しているかの目安)

$$k = \frac{\text{高調波の実効値}}{\text{基本波の実効値}} = \frac{\sqrt{E_{2e}^2 + E_{3e}^2 + \dots}}{E_{1e}} \quad (14-19)$$

**電力 (有効電力)  $P$  [W]** (周波数が違うので平均電力は各調波の平均電力の和となる。確認せよ。)

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \sum_{n=1}^{\infty} E_{ne} I_{ne} \cos \theta_n \quad \text{注 } e i \neq e_1 i_1 + e_2 i_2 + \dots + e_n i_n \quad (14-20)$$

**皮相電力  $P_a$  [VA]** (電源の電圧と電流の実効値の積 : これは装置の大きさの目安になる)

$$\text{皮相電力 } P_a = E_e I_e \quad (14-21)$$

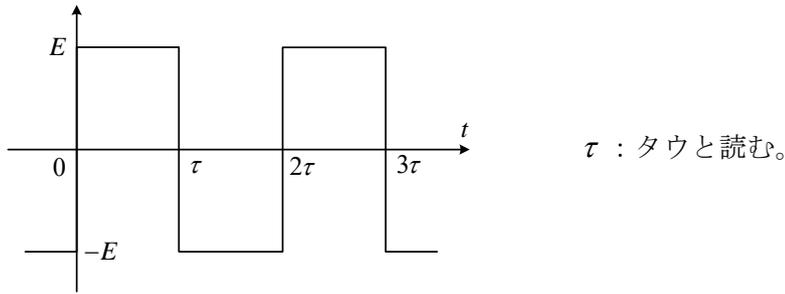
**力率 (総合力率 power factor)** ( $\cos \theta_1$  のことを **基本波力率 displacement factor** という。)

$$\text{力率} = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{P}{P_a} \quad (14-22)$$

基本波力率は電圧と電流を基本波成分だけで近似したときの力率で基本波成分のフェーザで考えてよい。これに対し総合力率は, 近似せず力率の定義に立ち戻り有効電力/皮相電力で求める。

力率が低いとは、たくさん食べても栄養がとれないこと。  
効率が低いとは、とった栄養の割には仕事量が少ないこと。

例題1 図の方形波  $f(t)$  をフーリエ級数に展開せよ。



(解) 奇数関数だから,  $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \frac{2E}{T} \left( \int_0^\tau \sin n\omega_0 t \, dt - \int_\tau^{2\tau} \sin n\omega_0 t \, dt \right) \\ &= \frac{2E}{T} \left\{ \frac{1}{n\omega_0} [-\cos n\omega_0 t]_0^\tau - \frac{1}{n\omega_0} [-\cos n\omega_0 t]_\tau^{2\tau} \right\} \\ &= \frac{2E}{n\omega_0 T} (-\cos n\omega_0 \tau + \cos 0 + \cos n\omega_0 2\tau - \cos n\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

ここで, 周期:  $T = 2\tau$ ,  $\omega_0 T = 2\pi$  より,  $\omega_0 \tau = \pi$

$$b_n = \frac{E}{n\pi} (-\cos n\pi + 1 + \cos 2n\pi - \cos n\pi) = \frac{2E}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4E}{n\pi} & n: \text{奇数} \\ 0 & n: \text{偶数} \end{cases}$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n}$$

但し,  $\omega_0$ : 基本波の角周波数  $n$  が大きい程スペクトル(振幅)は小さい。

① 基本波  $n=1$

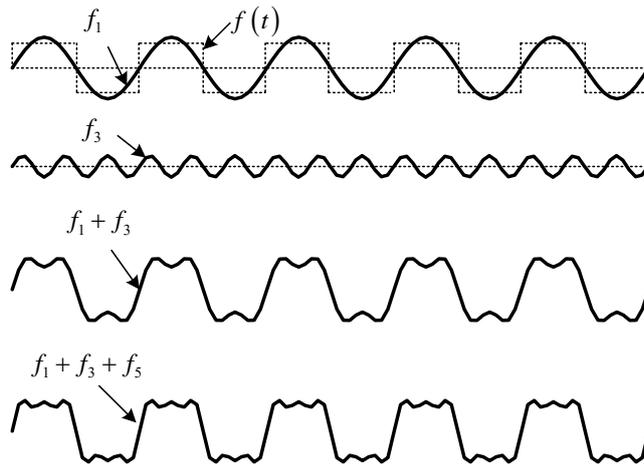
$$f_1 = \frac{4E}{\pi} \sin \omega_0 t$$

③ 第3調波  $n=3$

$$f_3 = \frac{4E}{3\pi} \sin 3\omega_0 t$$

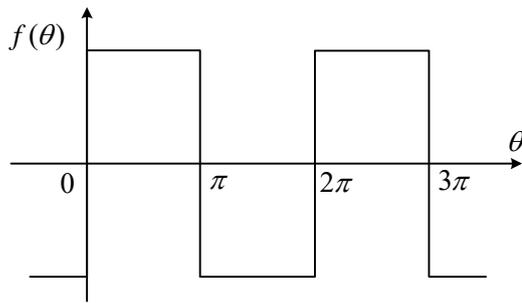
⑤ 第5調波  $n=5$

$$f_5 = \frac{4E}{5\pi} \sin 5\omega_0 t$$



第  $n$  高調波の振幅は基本波の  $1/n$  になるので, 第5調波まで加えた一番下の波形  $f_1 + f_3 + f_5$  でも, もとの  $f(t)$  にかなり近くなることがわかる。周期関数はフーリエ級数を用いて周波数の違う三角関数の和として表わせることが実感できる。基本波だけで近似することも多く, そうすれば解析は容易である。

例題2 図の方形波  $f(\theta)$  をフーリエ級数に展開せよ。



(解) 奇関数だから,  $a_n = 0$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \\
 &= \frac{E}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin n\theta d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \sin n\theta d\theta \right) \\
 &= \frac{E}{\pi} \left\{ \frac{1}{n} [-\cos n\theta]_0^{\pi} - \frac{1}{n} [-\cos n\theta]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\
 &= \frac{E}{n\pi} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos 2n\pi - \cos n\pi) \\
 &= \frac{2E}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{4E}{n\pi} & n: \text{奇数} \\ 0 & n: \text{偶数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \\
 &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4E}{n\pi} \sin n\theta
 \end{aligned}$$



$t$  で積分するより,  $\theta$  で積分した方が計算は楽である。従って, 例題1は例題2のように  $\theta$  に直して計算した方が良いと思われる。 $\theta$  については, 1周期のところが  $2\pi$  となる。例題1で, 周期  $T = 2\tau$  (図より) であるから,

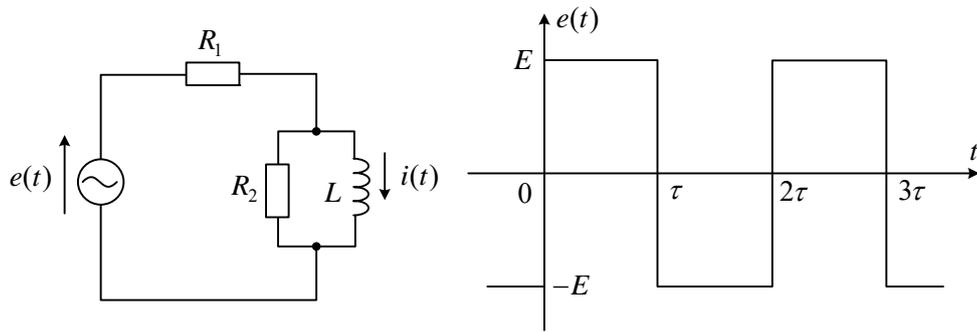
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau} \quad : \text{基本波の角周波数(最も低い角周波数)}$$

の関係がある。よって, 例題2で  $\theta = \omega_0 t$  とおけば, 例題1の結果と一致する。

**質問:** なぜ複雑なフーリエ級数に展開するのか?

答え: 複雑なようでも三角関数の和になれば, 各成分については正弦波だから扱い易い(交流理論も使える)。また, 基本波だけでも良い近似解が得られる。また, 波形にどのような周波数成分がどれくらい含まれているかも重要な意味がある。

例題3 電源電圧  $e(t)$  が図の波形で与えられるとき、電流  $i(t)$  の定常解を求めよ。



(解) フーリエ級数に展開して、

$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n} \quad \text{但し, } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T = 2\tau$$

まず、 $e_n = \frac{4E}{n\pi} \sin n\omega_0 t$  に対する電流  $i_n$  を求める。

$e_n$  のフェーザを  $E_n$  とすれば、

$$E_n = \frac{4E}{\sqrt{2}n\pi}$$

図より、 $i_n$  のフェーザ  $I_n$  は、分流の公式を用いて

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{E_n}{R_1 + \frac{jR_2 n\omega_0 L}{R_2 + jn\omega_0 L}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + jn\omega_0 L} \\ &= \frac{R_2 E_n}{R_1 R_2 + jR_1 n\omega_0 L + jR_2 n\omega_0 L} \\ |I_n| &= \frac{R_2 E_n}{\sqrt{(R_1 R_2)^2 + \{n\omega_0 L(R_1 + R_2)\}^2}} \\ \arg I_n &= -\tan^{-1} \frac{n\omega_0 L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

従って、

$$i_n(t) = \sqrt{2} |I_n| \sin(n\omega_0 t + \arg I_n) \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

重ね合わせの理より、次式で  $i(t)$  が求まる。

$$i(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} i_n(t)$$

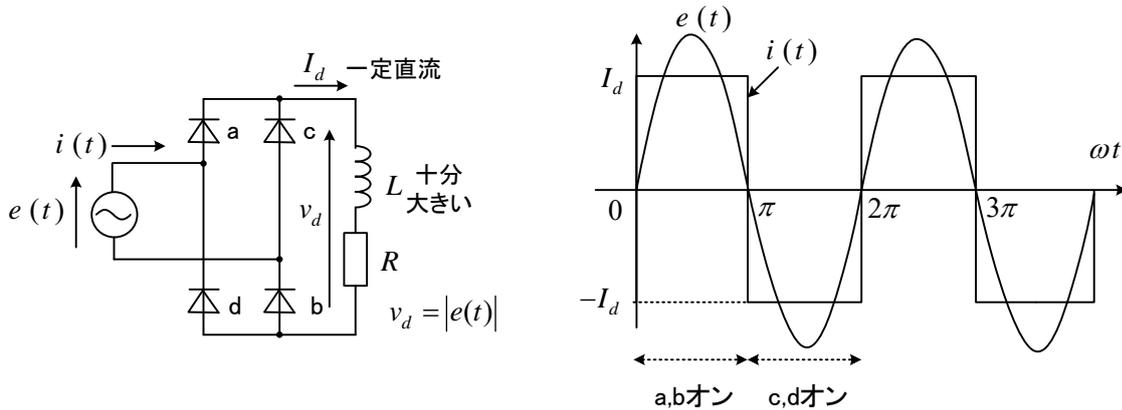
(注)  $e(t)$  のフェーザを  $E$  とし、 $E = E_1 + E_3 + E_5 + \dots$  とか、 $i(t)$  のフェーザを  $I$  とすると、 $I = I_1 + I_3 + I_5 + \dots$  という式は成立しない。フェーザが定義されるのは同じ周波数の電源だけである。すなわち、 $e$  のフェーザが  $E$ 、 $i$  のフェーザ  $I$  が定義できない。瞬時値を加え合わせることは問題ない。

例題4 図の回路はダイオードを使って交流から直流を作る整流回路である。負荷のインダクタンス  $L$  が十分に大きければ、直流電流  $I_d$  は一定と考えてよい\*。このとき、交流電源の電圧  $e(t)$  と電流  $i(t)$  の波形は図のようになる。 $e(t) = \sqrt{2} E_e \sin \omega t$  で、 $i(t)$  のフーリエ級数展開は

$$i(t) = \frac{4I_d}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n} \quad \text{である。}$$

\*第15章例題1より  $L$  が大きいとコイルの電流は変化が小さい。 $v_d$  が脈動してもほとんど  $I_d$  は変化しない。

- (1)  $i(t)$  の実効値を求めよ。
- (2) 基本波力率を求めよ。
- (3) 総合力率（力率）を求めよ。



(解) (1)  $I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_d^2 dt} = I_d$       ここで、周期  $T = \frac{\omega}{2\pi}$

(2)  $i(t)$  の基本波成分  $i_1(t)$  は  $n=1$  の場合で、次式で与えられる。

$$i_1(t) = \frac{4I_d}{\pi} \sin \omega t$$

よって、交流電圧  $e(t)$  との位相差は  $0$  である。従って、基本波力率は、 $\cos 0 = 1$

(3) 有効電力  $P$  は、
$$P = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} E_{ne} I_{ne} \cos \theta_n = E_e \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_d \cos 0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_e I_d$$

$$\text{総合力率} = \frac{\text{有効電力}}{\text{皮相電力}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_e I_d}{E_e I_e} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.9$$

(注) (1) は 
$$I_e = \sqrt{I_{1e}^2 + I_{3e}^2 + I_{5e}^2 + \dots} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}I_d}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right)} = I_d$$

でも計算できるが、この場合は定義から求めた方が簡単である。

(3) 電源電圧は基本波成分のみであるから  $E_{1e} = E_e$  以外  $0$  である。有効電力は、

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T e i dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2} E_e I_d \sin \theta d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E_e I_d \quad (\text{ここで、} \theta = \omega t) \text{ で求めても良い。}$$

エネルギー保存則より、 $P = R I_d^2$  だから、 $I_d = \frac{2\sqrt{2} E_e}{\pi R}$  である。

例題 5 図の回路で電源電圧の瞬時値が次式で与えられるとき、 $i_a$  を求めよ。

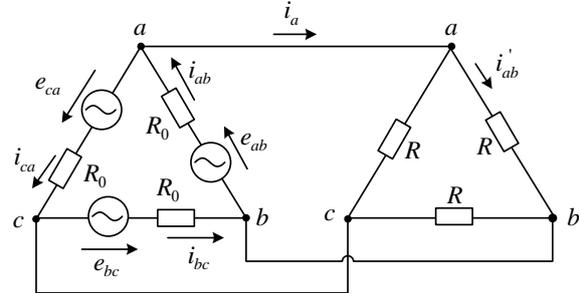
$$e_{ab} = e_{ab1} + e_{ab3}, e_{bc} = e_{bc1} + e_{bc3}, e_{ca} = e_{ca1} + e_{ca3}$$

$$\text{ここで, } e_{ab1} = \sqrt{2}E_{1e} \sin \omega t, e_{bc1} = \sqrt{2}E_{1e} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}), e_{ca1} = \sqrt{2}E_{1e} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$

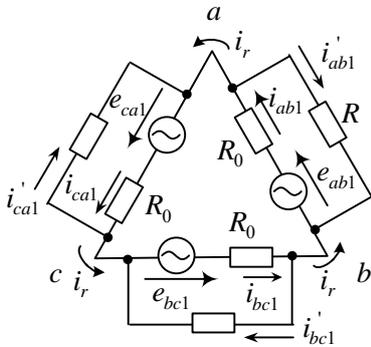
$$e_{ab3} = \sqrt{2}E_{3e} \sin 3\omega t$$

$$e_{bc3} = \sqrt{2}E_{3e} \sin 3(\omega t - \frac{2\pi}{3})$$

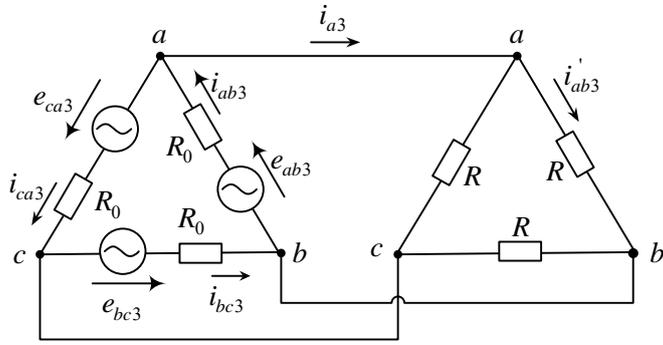
$$e_{ca3} = \sqrt{2}E_{3e} \sin 3(\omega t + \frac{2\pi}{3})$$



(解) 図のように(a)基本波成分, (b)第 3 調波成分に分けて, 重ね合わせの理を利用する。



(a)基本波成分のみの回路



(b)第 3 調波成分のみの回路

基本波成分については, 図の回路に変形すると

$$i_r = i_{ab1} - i'_{ab1} = i_{bc1} - i'_{bc1} = i_{ca1} - i'_{ca1}$$

$$\therefore 3i_r = i_{ab1} + i_{bc1} + i_{ca1} - (i'_{ab1} + i'_{bc1} + i'_{ca1}) = 0 \quad (\text{三相回路の対称性より})$$

従って,  $i_{ab1} = i'_{ab1}, i_{bc1} = i'_{bc1}, i_{ca1} = i'_{ca1}$  だから,  $a, b, c$  相が独立に解ける。 $i_a$  の基本波  $i_{a1}$  は

$$i_{a1} = i_{ab1} - i_{ca1} \quad \text{より} \quad i_{a1} = \frac{\sqrt{6}E_{1e}}{R_0 + R} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) \quad \therefore I_{a1} = \frac{1}{R_0 + R} (E_{1e} - E_{1e} e^{j2\pi/3})$$

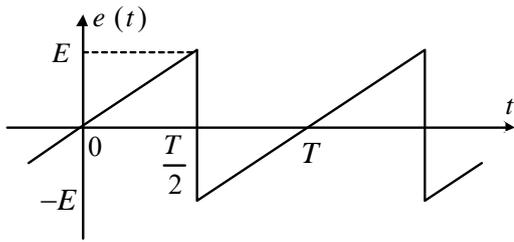
第 3 調波成分については,  $e_{ab3} = e_{bc3} = e_{ca3}$  となり, 対称性より  $i_{ab3} = i_{bc3} = i_{ca3}$  だから  $i_a$  の第 3 調波成分は  $i_{a3} = i_{ab3} - i_{ca3} = 0$  となる。従って重ね合わせの理より  $i_a = i_{a1} + i_{a3} = i_{a1}$  で求まる。

(参考) このように第 3 調波成分は  $\Delta$  電源の中で循環し, 線路に流れない。

$$\text{循環電流は, } i_{ab3} = i_{bc3} = i_{ca3} = \sqrt{2} (E_{3e} / R_0) \sin 3\omega t$$

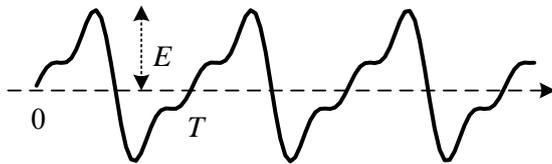
Y 電源 (変圧器) では電源に第 3 調波成分が流ることができないので変圧器の飽和とヒステリシスがあると起電力が高調波を含むことになり問題である。一方  $\Delta$  電源は変圧器鉄心の飽和とヒステリシスがあっても循環電流として電源に第 3 調波成分が流れて変圧器起電力が正弦波となることができ, 配電に利用されている (文献 5)。

問題 1. のこぎり波電圧  $e(t)$  をフーリエ級数に展開せよ。

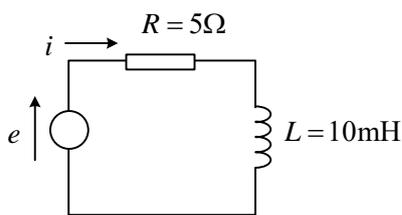


(答)  $e(t) = \frac{2E}{\pi} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t - \frac{1}{4} \sin 4\omega t + \dots)$  但し,  $\omega = 2\pi/T$

下図は, 第3調波まで (第3項まで) 加えたときの波形である。元の波形に近くなる。



問題 2. 図の回路に, 基本波周波数 60Hz のひずみ波電圧  $e = 100 \sin \omega t + 20 \sin 3\omega t$  [V] を加えた。次のものを求めよ。

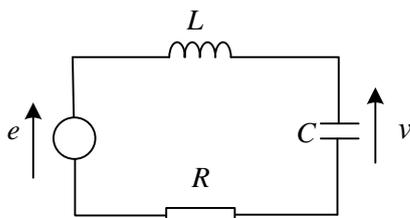


- (1) 電流  $i$  の式
- (2)  $e, i$  の実効値
- (3) 消費電力, 皮相電力, 総合力率

- (答) (1)  $i = 16.0 \sin(\omega t - 37.0^\circ) + 1.62 \sin(3\omega t - 66.1^\circ)$  [A]  
 (2)  $E_e = 72.1\text{V}$  ,  $I_e = 11.4\text{A}$   
 (3)  $P = 646\text{W}$ , 皮相電力 822 VA, 総合力率 0.786

問題 3. 電源電圧  $e(t)$  が次式で与えられるときコンデンサ電圧を求めよ。

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$



(解) 各成分に対する定常解を求め, 加え合わせる。

$$\theta_n = \tan^{-1} \frac{n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}}{R} \quad \text{とすると}$$

$$v(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\frac{1}{n\omega_0 C}}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C})^2}} E_{ne} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_n - \frac{\pi}{2})$$

# 第 15 章 過渡現象解析 I

スイッチをオンまたはオフしたときの**過渡現象**(transient phenomena)の解析について学ぶ。このためには微分方程式を解く必要がある。微分方程式の解は、**定常項+過渡項**となる。定常項は、これまでの理論（直流回路では微分を 0 とし、交流回路ではフェーザを用いた交流理論）を使うとよい。過渡項は電源電圧を 0 と置くので、直流回路でも交流回路でも同じ形である。

## ○ 定係数線形微分方程式の解法

電気回路で成り立つ式を 1 つの変数  $y$  だけに整理すると、一般に(15-1)の  $n$  階の定係数線形常微分方程式 ( $a_1, a_2, \dots, a_n$ : 実数の定数) となる。 $f(t)$  は外部から加える入力で電源電圧に相当する。

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = f(t) \tag{15-1}$$

↑  
時間  $t$  の関数であって、 $y$  は入らない。

(15-1) から  $y$  を求めると、過渡項と定常項の和として、以下のように表せる（数学の公式）。

$$y = y_f + y_s \tag{15-2}$$

ここで、 $y_f : f(t) = 0$  とおいた**同次方程式の解**(**過渡項** transient term)

$y_s : f(t)$  が存在するときの**特殊解**(**定常項** steady state term),  $f(t) = 0$  のとき  $y_s = 0$

## 過渡項 $y_f$ の求め方

1. **特性方程式** (15-1) で  $f(t) = 0$  とし、 $\frac{d^k}{dt^k} \rightarrow p^k$  とし、 $y$  を約分した形。

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \tag{15-3}$$

を解いて、根  $p_1 \sim p_n$  ( $n$  個) を求める。

2. この結果、全て異なる実根  $p_1, p_2, \dots, p_l$

全て異なる複素共役根  $\alpha_1 \pm j\beta_1, \alpha_2 \pm j\beta_2, \dots, \alpha_m \pm j\beta_m$

$p_r$  が実数で  $r$  重根、 $\alpha_\gamma \pm j\beta_\gamma$  も  $r$  重根が得られたとしよう。

このとき、 $y_f$  は次式で与えられる。アンダーラインに注目すると美しい。

$$\begin{aligned} y_f = & k_1 \underline{e^{p_1 t}} + k_2 \underline{e^{p_2 t}} + \dots + k_l \underline{e^{p_l t}} \\ & + k_{l+1} \underline{e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t} + k_{l+2} \underline{e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t} \\ & \vdots \\ & + k_{l+2m-1} \underline{e^{\alpha_m t} \cos \beta_m t} + k_{l+2m} \underline{e^{\alpha_m t} \sin \beta_m t} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned}
&+k_{l+2m+1} \underline{e^{p_r t}} + k_{l+2m+2} \underline{t e^{p_r t}} + k_{l+2m+3} \underline{t^2 e^{p_r t}} + \cdots + k_{l+2m+r} \underline{t^{r-1} e^{p_r t}} \\
&+k_{l+2m+r+1} \underline{e^{\alpha_\gamma t} \cos \beta_\gamma t} + k_{l+2m+r+2} \underline{e^{\alpha_\gamma t} \sin \beta_\gamma t} \\
&+ k_{l+2m+r+3} \underline{t e^{\alpha_\gamma t} \cos \beta_\gamma t} + k_{l+2m+r+4} \underline{t e^{\alpha_\gamma t} \sin \beta_\gamma t} \\
&\vdots \\
&+k_{l+2m+r+2r-1} \underline{t^{r-1} e^{\alpha_\gamma t} \cos \beta_\gamma t} + k_{l+2m+r+2r} \underline{t^{r-1} e^{\alpha_\gamma t} \sin \beta_\gamma t}
\end{aligned} \right\} \begin{array}{c} \text{重根} \\ \text{が} \\ \text{ある} \\ \text{場合} \\ \text{のみ} \end{array}$$

(15-4)

係数  $k$  は順に番号をつければよく、添字は気にしないでよい。重根がなければ解は簡単になる。重根があると、 $t$  のべき乗が順に掛けられた項が入ってくる。項は全部で根の数  $n$  個ある。複素共役根が純虚数  $\pm j\beta_1$  の場合には、上式で  $\alpha_1 = 0$  とおいて、 $k_{l+1} \cos \beta_1 t + k_{l+2} \sin \beta_1 t$  の項が入る。これは、 $L, C$  だけの回路で現れる。力学では単振動と呼ばれる解である。係数  $k$  は、 $t = 0$  での初期条件(initial condition)により決定される。第3章、第4章は初期値を求めるとき役立つ。 $L, R, C, M$  からなる電気回路の場合、抵抗があれば、過渡項は時間が経つと  $0$  となることが判っている ( $L, C$  だけの回路では  $0$  にならない)。

### 定常項 $y_s$ の求め方

(イ)  $f(t) = E$  (一定) : **直流回路の場合**に相当する。(15-1)を満足する解を何か求めれば良いので、(15-1)で微分項を全て  $0$  とおいて求める。 $LC$  だけの回路でもそのようにしてよい。

$$y_s = \frac{E}{a_n} \tag{15-5}$$

(ロ)  $f(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$  : **交流回路の場合**に相当する。**フェーザ**を用いた交流理論を使うのが簡単である。 $\varphi$  (ファイ) は**初期位相**で定数である。

$$\frac{d^k}{dt^k} \rightarrow (j\omega)^k, \quad \frac{d}{dt} \rightarrow j\omega, \quad y \rightarrow Y, \quad E_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

と置き換えると、(15-1)よりフェーザ表示した式が得られる。

$$\begin{aligned}
(j\omega)^n Y + a_1 (j\omega)^{n-1} Y + \cdots + a_{n-1} j\omega Y + a_n Y &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} \\
\therefore Y &= \frac{E_m e^{j\varphi} / \sqrt{2}}{a + jb}
\end{aligned} \tag{15-6}$$

ここで、 $a + jb = (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} j\omega + a_n$  (実際に計算し整理する)

$$|Y| = \frac{E_m}{\sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \arg Y = \varphi - \theta, \quad \text{但し, } \theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \tag{15-7}$$

であるから、

$$y_s = \sqrt{2} I_m (Y e^{j\omega t}) = \sqrt{2} |Y| \sin(\omega t + \varphi - \theta) \tag{15-8}$$

\*  $f(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$  のとき、 $\sin$  を  $\cos$  に換え、最後の  $I_m$  (虚部) を  $R_e$  (実部) にするだけでよい。もちろん  $\cos$  を  $\sin$  に直して求めてもよい。

例題1 図の回路で、時間 $t=0$ でスイッチをオンするとき、電流 $i$ を求めよ。

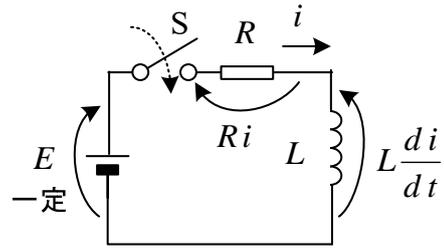


図 15-1 RL 直列回路

(解) 微分方程式を立てると、

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

特性方程式

$$Lp + R = 0 \quad \therefore p = -\frac{R}{L}$$

よって、過渡項 $i_f$ は

$$i_f = k_1 e^{pt} = k_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

定常項 $i_s$ は、①で微分を0と置き

$$i_s = \frac{E}{R}$$

よって、求める $i$ は

$$i = i_f + i_s = k_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$t=+0$ で、 $i=0$ と考えられるから (注1)

$$0 = k_1 + \frac{E}{R} \quad \therefore k_1 = -\frac{E}{R}$$

②に代入して(注2)

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (15-9)$$

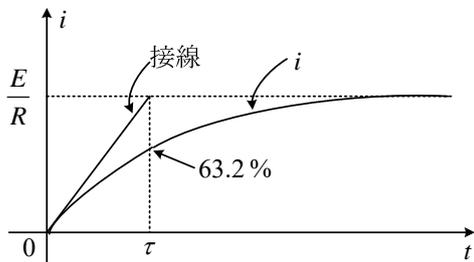


図 15-2 RL 回路の過渡応答

時間が十分経過すると、過渡項は0となり定常項のみになる。

(注1) スイッチを入れる直前を $t=-0$ 、スイッチを入れた直後を $t=+0$ と書く。 $i(-0)$ はスイッチが切れているから0となるのは当然である。一般に、コイルの電流は急に变化しないから、 $i(+0)$ も0となる。

(注2)  $-0$ も $+0$ も値として代入するときは0である。 $t=0$ の値を代入して定数を決めることを、初期条件を入れるという。①は $t \geq +0$ の式だから $i(+0)$ の値を入れる。

(注3)  $\tau$ [s] (タウ) : <sup>じていすう</sup>時定数 (time constant) とすると

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (15-10)$$

$e^{-\frac{t}{\tau}}$  に変形すれば $\tau$ が判る。

$t = \tau$  のとき

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-1} = \frac{1}{2.718} = 0.368$$

$$1 - 0.368 = 0.632$$

だから、電流は最終値までの約63.2%まで立ち上がる。また $t=0$ の接線が最終値と交わる時間でもある。 $L$ が大きいと時定数が大きいので、ゆっくり立ち上がる。(15-10)は覚えておこう。

例題2 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオンしたとき、流れる電流*i*及びコンデンサの電荷*q*を求めよ。但し、スイッチを入れる前、コンデンサの電荷は $q_0$ であったとする。

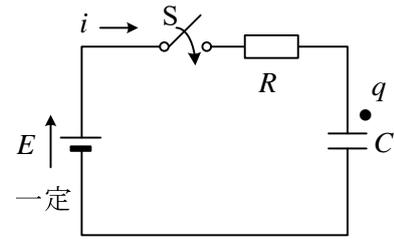


図 15-3 RC 直列回路

(解) 微分方程式を立てると、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \dots \textcircled{1}$$

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \dots \textcircled{2}$$

① を解く。特性方程式は

$$Rp + \frac{1}{C} = 0 \quad \therefore p = -\frac{1}{RC}$$

よって、過渡項 $q_f$ は

$$q_f = k_1 e^{pt} = k_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

定常項 $q_s$ は、

$$q_s = CE$$

よって、求める*q*は、

$$q = q_f + q_s = k_1 e^{-\frac{t}{RC}} + CE$$

$t=+0$ で、 $q=q_0$ と考えられるから、(注1)

$$q_0 = k_1 + CE \quad \therefore k_1 = q_0 - CE$$

従って、

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} + CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

電流*i*は、

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{RC}(CE - q_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

この場合、**時定数**は

$$\tau = RC \quad (15-11)$$

である。図 15-4 で時定数経つと電荷は

63.2%増加し、電流は 63.2%減少している。(15-11)は覚えておこう。*C*が大きいと電荷や電圧はゆっくり立ち上がる。 $i(-0) = 0$ だが、 $i(+0) = E/R$ で、電流は不連続に変化している。自然現象はいつも連続とは限らない。

(注1) 題意より、 $q(-0) = q_0$ 、である。

一般に、コンデンサの電荷(または電圧)は急に変化しないので、 $q(+0) = q_0$ と考えられる。

なお、①式は $t \geq +0$ に対し成立するのであるから、 $t = -0$ の初期値を代入することはできない。

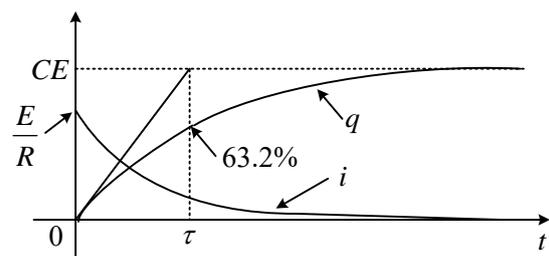
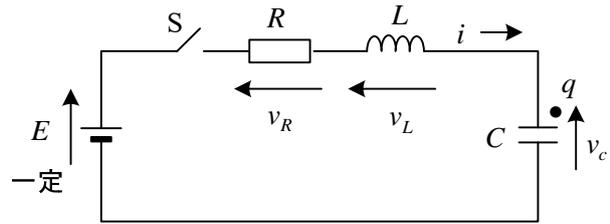


図 15-4 RC 直列回路の過渡応答

( $q_0 = 0$  のときの電荷と電流)

例題3 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオンしたとき、コンデンサの電荷と流れる電流を求めよ。但し、コンデンサの電荷はSをオンする前0とする。



(解) Sを入れた後、微分方程式を立てると

図 15-5 RLC 直列回路

$$v_R = Ri, v_L = L \frac{di}{dt}, v_C = \frac{q}{C}, i = \frac{dq}{dt}, E = v_R + v_L + v_C \quad \text{より}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad \dots \textcircled{1}$$

定常項  $q_s$  は、

$$q_s = CE \quad \dots \textcircled{2}$$

特性方程式は、

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

根は  $L, R, C$  の大小により、3つの場合に分けられる。

(i)  $R^2 - 4\frac{L}{C} = 0$  のとき、 $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} \equiv -a$  (重根) ( $\equiv$  は定義の意)

過渡項  $q_f$  は、 $q_f = k_1 e^{-at} + k_2 t e^{-at}$

従って、一般解は

$$q = q_s + q_f = CE + k_1 e^{-at} + k_2 t e^{-at}$$

(注) コイルの  $i$  とコンデンサの  $q$  は急に变化しない。

$$i = \frac{dq}{dt} = -k_1 a e^{-at} + k_2 e^{-at} - k_2 a t e^{-at}$$

初期条件は、 $t=+0$  で、 $q=0$  ,  $i=0$  と考えられるから、(注)

$$0 = CE + k_1, \quad 0 = -k_1 a + k_2 \quad \therefore k_1 = -CE, \quad k_2 = -aCE$$

従って、

$$q = CE - CE(1+at)e^{-at}$$

$$i = a^2 CE t e^{-at}$$

このときの過渡応答を図 15-6 に示す。

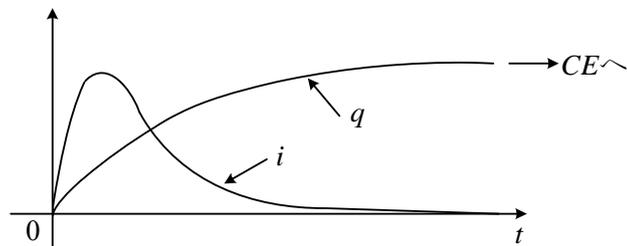


図 15-6 RLC 直列回路の過渡応答

(ii)  $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$  のとき、 $\left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L} \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}$   $\left( \begin{matrix} + \text{のとき } p_1 \\ - \text{のとき } p_2 \end{matrix} \right)$

過渡項  $q_f$  は,  $q_f = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}$

従って, 一般解は,

$$q = CE + k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} \quad , \quad i = \frac{dq}{dt} = p_1 k_1 e^{p_1 t} + p_2 k_2 e^{p_2 t}$$

初期条件は,  $t = +0$  で,  $q = 0$  ,  $i = 0$  と考えられるから,

$$0 = CE + k_1 + k_2 \quad , \quad 0 = p_1 k_1 + p_2 k_2 \quad \therefore k_1 = \frac{p_2 CE}{p_1 - p_2} \quad , \quad k_2 = -\frac{p_1 CE}{p_1 - p_2}$$

応答波形は図 15-6 と同様になる。

$$(iii) \quad R^2 - 4\frac{L}{C} < 0 \text{ のとき, } \left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{R}{2L} \pm j \frac{1}{2L} \sqrt{4\frac{L}{C} - R^2} \equiv -a \pm j\beta$$

過渡項は,  $q_f = k_1 e^{-at} \cos \beta t + k_2 e^{-at} \sin \beta t$

従って, 一般解は,

$$q = CE + k_1 e^{-at} \cos \beta t + k_2 e^{-at} \sin \beta t$$

$$i = \frac{dq}{dt} = e^{-at} \{ (\beta k_2 - a k_1) \cos \beta t - (\beta k_1 + a k_2) \sin \beta t \}$$

初期条件は,  $t = +0$  で,  $q = 0$  ,  $i = 0$  と考えられるから,

$$0 = CE + k_1 \quad , \quad 0 = \beta k_2 - a k_1 \quad \therefore k_1 = -CE \quad , \quad k_2 = \frac{a}{\beta} k_1 = -\frac{a}{\beta} CE$$

$$\text{従って, } q = CE \left\{ 1 - e^{-at} \left( \cos \beta t + \frac{a}{\beta} \sin \beta t \right) \right\} \quad , \quad i = CE e^{-at} \left( \beta + \frac{a^2}{\beta} \right) \sin \beta t$$

このときの過渡応答を図 15-7 に示す。

**減衰振動**しながら,  $q$  は  $CE$  へ,  $i$  は  $0$  へ最終的に落ち着く。

全ての場合, **特性方程式の根**  $p_1, p_2$  の**実部が負(左半平面)**だからある値に収束している。実部が正なら**発散(不安定)**する。しかし, 回路では通常, 実部は負である。 $LC$ だけの回路のときのみ実部は  $0$  となり, 発散も減衰もしないで**持続振動**する。

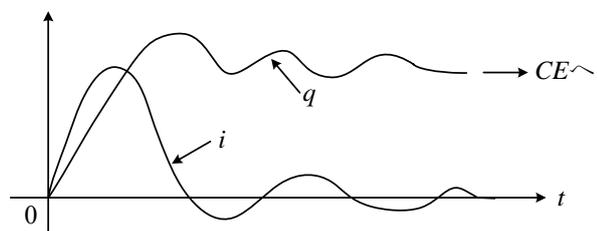


図 15-7 RLC 直列回路の過渡応答



こんな長い答案は書けないので試験には出ないと考える人は甘い! 場合を指定したり, 数値を与えると  $1/3$  の長さになり, 手ごろな問題となるのだ。

例題4 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオンしたとき、流れる電流*i*及びコンデンサの電荷*q*、電圧*v<sub>C</sub>*を求めよ。但し、スイッチを入れる前、コンデンサの電荷は0であったとする。

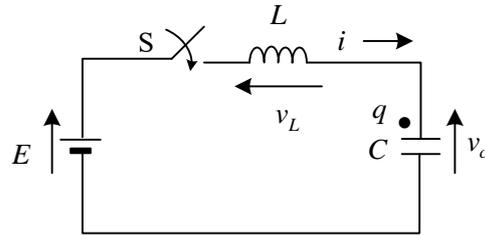


図 15-8 LC 直列回路

(解) S を入れた後、微分方程式を立てると

$$v_L = L \frac{di}{dt}, v_C = \frac{q}{C}, i = \frac{dq}{dt}, E = v_L + v_C \quad \text{より}$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \quad \dots \textcircled{1}$$

定常項  $q_s$  は、

$$q_s = CE \quad \dots \textcircled{2}$$

特性方程式は、

$$Lp^2 + \frac{1}{C} = 0 \quad \therefore \left. \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\} = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \pm j\beta$$

過渡項は、 $q_f = k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t$

従って、一般解は、

$$q = CE + k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\beta k_1 \sin \beta t + \beta k_2 \cos \beta t$$

初期条件は、コンデンサの電荷とコイルの電流は急変しないので、 $t=+0$ で、 $q=0$ 、 $i=0$ と考えられるから、

$$0 = CE + k_1, \quad 0 = \beta k_2 \quad \therefore k_1 = -CE, \quad k_2 = 0$$

従って、 $q = CE(1 - \cos \beta t)$ 、 $i = CE\beta \sin \beta t$ 、 $v_C = E(1 - \cos \beta t)$

$$\text{ただし、} \beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

図 15-9 のように**持続振動**する。これは、力学の**単振動**と同じ現象である。ばねにおもりをつるすと空気抵抗がなければずっと振動する。微分方程式が同じ形をしている。

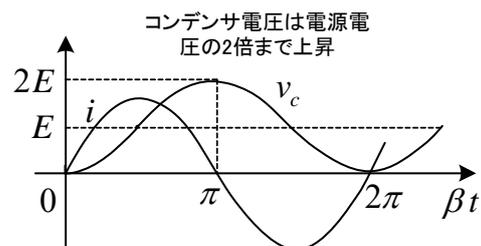
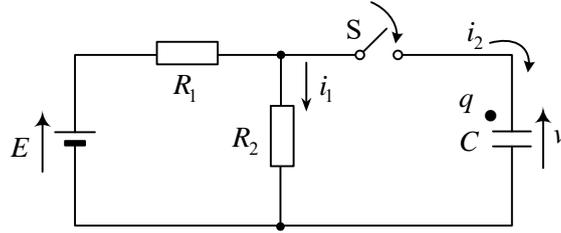


図 15-9 LC 直列回路の過渡応答

例題 5 図の回路において、スイッチ  $S$  を  $t=0$  で閉じる。 $S$  を閉じる前、 $C$  の電荷は  $q_0$  であった。コンデンサに流れる電流を求めよ。



(解)  $S$  を閉じた後、 $i_1, i_2, v, q$  を図のように定義する。成立する式は、

$$E = R_1(i_1 + i_2) + v \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$$v = R_2 i_1 \quad \dots \dots \textcircled{2} \quad q = Cv \quad \dots \dots \textcircled{3} \quad i_2 = \frac{dq}{dt} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

変数  $q$  だけの式にするため、 $i_1, i_2, v$  を消去して、

$$E = R_1 \left( \frac{q}{R_2 C} + \frac{dq}{dt} \right) + \frac{q}{C} = R_1 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) q$$

特性方程式

$$R_1 p + \frac{R_1 + R_2}{CR_2} = 0 \quad , \quad p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}$$

定常解  $q(\infty)$  は、

$$q(\infty) = \frac{CER_2}{R_1 + R_2}$$

よって、 $q = q(\infty) + ke^{-\frac{t}{\tau}}$  但し、 $\tau = \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$  : 時定数

$t=+0$  で、 $q = q_0$  と考えられるから、

$$q = q(\infty) + k \quad \therefore k = q_0 - q(\infty)$$

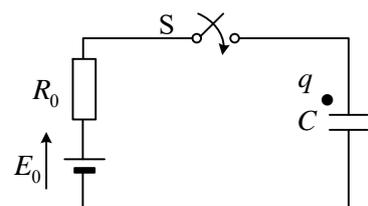
$$\therefore q = q(\infty) + (q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

④より、

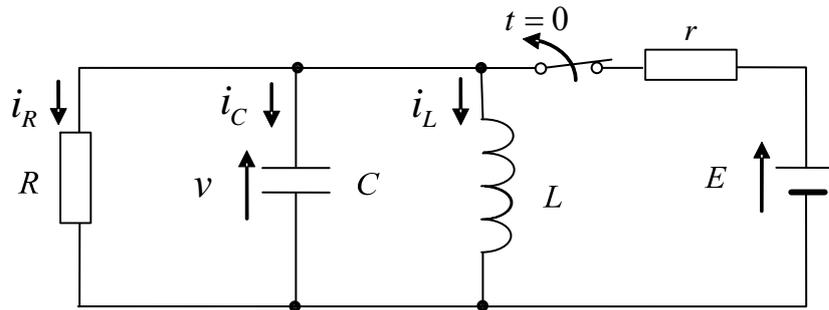
$$i_2 = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\tau} (q_0 - q(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

◎ スイッチから左側の回路はテブナンの定理により直流電源と抵抗の直列回路に変形できるので、以下の問題と同じになる。時定数は  $\tau = R_0 C$ 、 $q(\infty) = CE_0$  とすぐ判る。

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad E_0 = \frac{E R_2}{R_1 + R_2}$$



例題 6 図の回路は  $t < 0$  において定常状態にある。  $t = 0$  でスイッチを開く。  $t > 0$  においてコイルの電流  $i_L(t)$  を求めよ。但し、  $E = 10 \text{ V}$ 、  $r = 5 \Omega$ 、  $R = 2 \Omega$ 、  $L = 3 \text{ H}$ 、  $C = 1/6 \text{ F}$  とする。



(解)  $t > 0$  において、次式が成り立つ。

$$v = Ri_R = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{①}$$

$$i_R + i_C + i_L = 0 \quad \text{②}$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad \text{③}$$

①～③ 式より、電流  $i_L(t)$  に関する次の微分方程式が得られる。

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = 0 \quad \text{④}$$

数値を代入して

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 3 \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 0 \quad \text{⑤}$$

である。この式の特性方程式

$$p^2 + 3p + 2 = 0 \quad \text{⑥}$$

の根が  $p = -1, -2$  であるので、電流  $i_L(t)$  は次式で与えられる。

$$i_L(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \quad (k_1, k_2 \text{ は未知定数}) \quad \text{⑦}$$

$$\frac{di_L}{dt} = -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} \quad \text{⑧}$$

コイルに流れる電流は急には変化せず、  $t < 0$  でコイルは短絡状態にあるから

$$i_L(0) = E/r = 2 \text{ A} \quad \text{⑨}$$

を得る。一方、コンデンサの電圧は急には変化せず、  $t < 0$  で 0 だから

$$v(0) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \therefore \quad \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{⑩}$$

⑦、⑧式に、⑨、⑩式を適用して、  $k_1 = 4$ 、  $k_2 = -2$  だから

$$i_L(t) = 4e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ [A]} \quad \text{⑪}$$

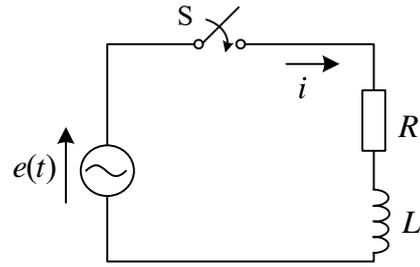
\* 電源が接続されていない回路では、時間が十分たつと抵抗でエネルギーが消費されて、電圧や電流は 0 となる。

例題 7 図の回路で、 $t=0$  でスイッチをオンするとき、  
 流れる電流を求めよ。

ここで、 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$

(解) 成立する微分方程式は、

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{①}$$



定常解はフェーザを使って求める。①をフェーザ表示すると、

$$j\omega LI + RI = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}$$

$$\therefore I = \frac{(E_m/\sqrt{2})e^{j\varphi}}{R + j\omega L} = \frac{E_m e^{j\varphi}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j\theta}} = \frac{E_m e^{j(\varphi-\theta)}}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \text{但し、} \tan \theta = \frac{\omega L}{R} \quad \text{②}$$

②を瞬時値表示にもどして  $i_s$  は、

$$i_s = \sqrt{2} I_m (I e^{j\omega t}) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta)$$

過渡項を求める。特性方程式は、

$$Lp + R = 0 \quad \therefore p = -\frac{R}{L} \quad \text{よって、} \quad i_f = k e^{pt} = k e^{-\frac{R}{L}t}$$

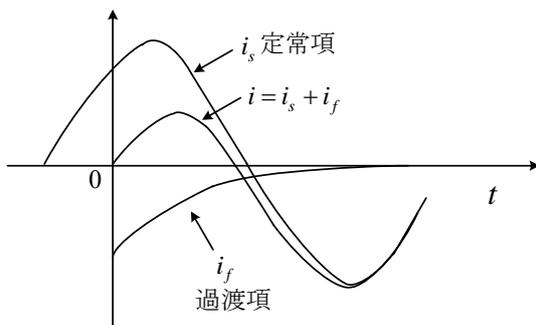
求める一般解は、

$$i = i_s + i_f = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \varphi - \theta) + k e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{③}$$

初期条件は、コイルの電流は急に変化しないので  $t=+0$  で  $i=0$  として、

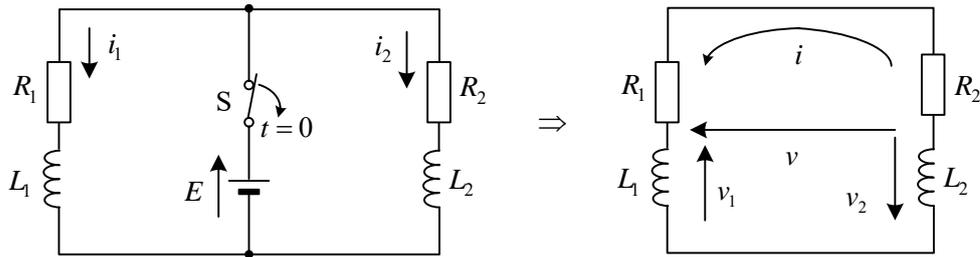
$$0 = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi - \theta) + k \quad \therefore k = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi - \theta)$$

$$\text{③に代入して、} \quad i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \varphi - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t} \sin(\varphi - \theta) \right\}$$



過渡項の求め方は、直流でも交流でも同じです。  
 定常項は、交流の場合フェーザを用いればよい。  
 時間が十分経過すると過渡項は 0 となり、定常項のみとなる。だから、過渡項とか定常項という名前では呼ばれている。

例題 8 定常状態にある図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフする時、流れる電流を求めよ。



(解) スイッチを開く直前を $t=-0$ 、直後を $+0$ と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから、

$$i_1^{-0} = \frac{E}{R_1}, \quad i_2^{-0} = \frac{E}{R_2}$$

鎖交磁束不変の理より、

$$(L_1 + L_2)i^{+0} = L_1i_1^{-0} - L_2i_2^{-0}$$

$$\therefore i^{+0} = \frac{(L_1/R_1 - L_2/R_2)E}{L_1 + L_2}$$

$t \geq +0$ において、

$$(L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = 0$$

$$\therefore i = k e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t}$$

初期条件 $t=+0$ で、 $i = i^{+0}$   $\therefore k = i^{+0}$

$$\text{よって、} i = \frac{(L_1/R_1 - L_2/R_2)E}{L_1 + L_2} \cdot e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t}$$

鎖交磁束の和の求め方

$t \geq +0$ のとき (Sを切った後)

$$v = v_1 + v_2 = \frac{d}{dt}(L_1i + L_2i) \quad \text{①}$$

$t \leq -0$ のとき (Sを切る前)

$$v = v_1 + v_2 = \frac{d}{dt}(L_1i_1 - L_2i_2) \quad \text{②}$$

①と②で鎖交磁束の部分を等しいとおく。

これまでコイルの電流は急に変化しないと考えてきたが、この回路ではそれが成立しない。特殊な例である。スイッチを切ったとき火花が発生する。

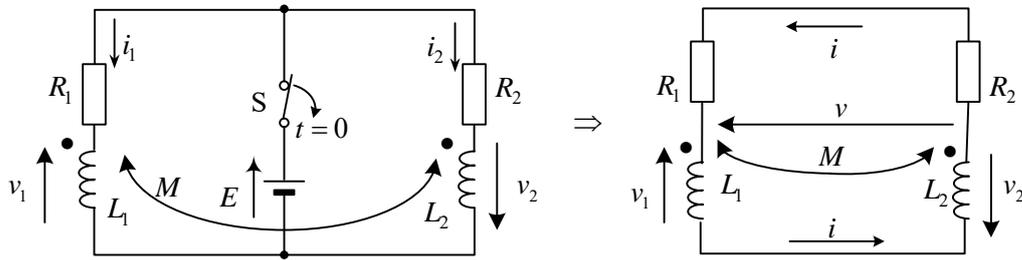
### 鎖交磁束不変の理

スイッチを入れたり切ったりした後 ( $t=+0$ ) の閉回路で、キルヒホッフの第2法則より電圧方程式を立てる。このとき、コイルだけをまとめた電圧の和 $v$ は、 $t=-0$ と $t=+0$ の間に無限大にならない (コイル単体では無限大となることがあっても)。

$$v = \frac{d}{dt}(\text{鎖交磁束の和})$$

であるから、 $t=-0$ と $t=+0$ の間で鎖交磁束の和は変化しない。なお、電圧や電流の矢印は好きによいが、マイナスが付くかどうかは電圧 $v$ と電流の矢印の選び方による。

例題 9 定常状態にある図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフする時、流れる電流を求めよ。なお、 $L_1, L_2$ 間の相互インダクタンスは $M$ とする。



(解) スイッチを開く直前を $t=-0$ 、直後を $+0$ と表す。スイッチを開く前に回路は定常状態ということから、

$$i_1^{-0} = \frac{E}{R_1}, \quad i_2^{-0} = \frac{E}{R_2} \quad \text{①}$$

$t \geq +0$  のとき (S を切った後) (符号は第 9 章例題 6 参照)

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + (L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}) = \frac{d}{dt}(L_1 i + L_2 i - 2M i) \quad \text{②}$$

$t \leq -0$  のとき (S を切る前)

$$v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + (-L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}) = \frac{d}{dt}(L_1 i_1 + M i_2 - L_2 i_2 - M i_1) \quad \text{③}$$

**鎖交磁束不変の理**を②、③に適用して

$$L_1 i^{+0} + L_2 i^{+0} - 2M i^{+0} = L_1 i_1^{-0} + M i_2^{-0} - L_2 i_2^{-0} - M i_1^{-0}$$

よって、

$$i^{+0} = \frac{E}{L_1 + L_2 - 2M} \left( \frac{L_1 - M}{R_1} - \frac{L_2 - M}{R_2} \right) \quad \text{④}$$

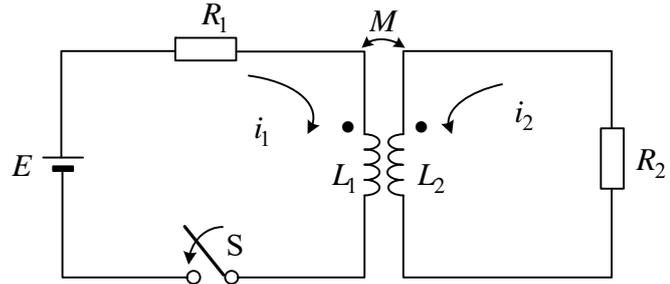
$t \geq +0$  のとき、回路の微分方程式は次式で与えられる。

$$(L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} + (R_1 + R_2) i = 0 \quad \text{⑤}$$

④の初期条件で⑤を解いて、

$$i = \frac{E}{L_1 + L_2 - 2M} \left( \frac{L_1 - M}{R_1} - \frac{L_2 - M}{R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2 - 2M} t}$$

例題 10 図の回路で  $t=0$  でスイッチを入れるとき、電流  $i_1$  を求めよ。スイッチを入れる前  $i_2=0$  とする。また、 $L_1L_2-M^2>0$  とする。



(解) スイッチを入れた後、以下の微分方程式が成り立つ。

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{①} \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \text{②}$$

$i_1$  だけの式にするため、まず①より  $di_2/dt$  を求め②に代入して次式が得られる。

$$i_2 = -\frac{L_2}{R_2 M} E + \frac{L_2 R_1}{R_2 M} i_1 + \frac{L_1 L_2}{R_2 M} \frac{di_1}{dt} - \frac{M}{R_2} \frac{di_1}{dt} \quad \text{③}$$

③を①に代入して、以下の  $i_1$  だけの微分方程式が得られる。

$$\Delta \frac{d^2 i_1}{dt^2} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{di_1}{dt} + R_1 R_2 i_1 = R_2 E \quad \text{ただし、} \Delta = L_1 L_2 - M^2 \quad \text{④}$$

特性方程式は、

$$\Delta p^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) p + R_1 R_2 = 0 \quad \text{⑤}$$

⑤の根は実数で、次式で与えられる。

$$p_1, p_2 = \frac{-(L_1 R_2 + L_2 R_1) \pm \sqrt{(L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}}{2 \Delta} \quad p_1 \text{ は} +, p_2 \text{ は} - \text{に対応する。}$$

④式の一般解は、次式で与えられる。

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t} \quad \text{⑥} \quad \text{故に、} \frac{di_1}{dt} = A p_1 e^{p_1 t} + B p_2 e^{p_2 t} \quad \text{⑦}$$

スイッチを入れた直後、①、②それぞれの鎖交磁束の和が変化せず 0 となるから

$$L_1 i_1(+0) + M i_2(+0) = 0, L_2 i_2(+0) + M i_1(+0) = 0 \quad \text{⑧}$$

$$\Delta \neq 0 \text{ なので } i_1(+0) = i_2(+0) = 0 \quad \text{⑨}$$

$$\text{⑥式に代入して、次式を得る。} 0 = \frac{E}{R_1} + A + B \quad \text{⑩}$$

$t=+0$  で、③、⑨式より、次式を得る。

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=+0} = \frac{L_2}{\Delta} E$$

上式に⑨を代入して、

$$A p_1 + B p_2 = \frac{L_2}{\Delta} E \quad \text{⑪}$$

⑩、⑪より、 $A, B$  は以下のように求まる。

$$A = \frac{E}{p_1 - p_2} \left( \frac{L_2}{\Delta} + \frac{p_2}{R_1} \right), B = \frac{E}{p_2 - p_1} \left( \frac{L_2}{\Delta} + \frac{p_1}{R_1} \right)$$

$\Delta = 0$  の場合

$$i_2 = -\frac{L_2}{R_2 M} E + \frac{L_2 R_1}{R_2 M} i_1 \quad \text{③}'$$

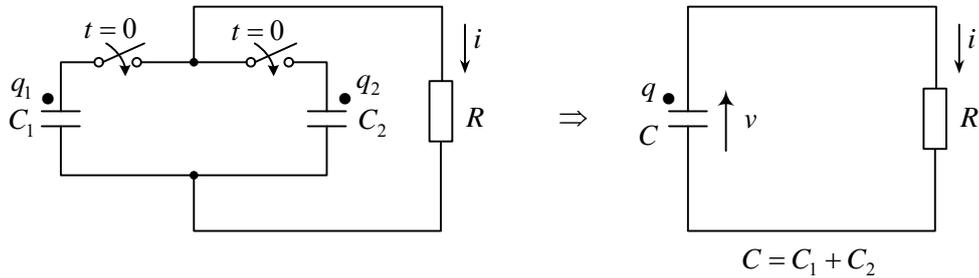
$$(L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{di_1}{dt} + R_1 R_2 i_1 = R_2 E \quad \text{④}'$$

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + A e^{p t} \quad p = -\frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}$$

③' より  $i_2 = \frac{L_2 R_1}{R_2 M} A e^{p t}$

⑧' より  $A = -\frac{L_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1} \frac{E}{R_1}$

例題 11 図の回路で、 $t=0$ で両方のスイッチをオンしたとき、抵抗に流れる電流を求めよ。スイッチをオンする直前 $t=-0$ のコンデンサの初期電荷を $q_1(-0)=q_1^{-0}$ 、 $q_2(-0)=q_2^{-0}$ とする。



(解) スwitchを閉じた後、 $C_1$ と $C_2$ は1つにまとめて考える。

スイッチを閉じた直後の $q$ の初期電荷を $q^{+0}$ とすると、

電荷量不変の理より、

$$q_1^{-0} + q_2^{-0} = q^{+0} \quad \dots \textcircled{1}$$

微分方程式を立てると( $t \geq +0$ ),

$$v = Ri = \frac{q}{C}, \quad i = -\frac{dq}{dt}$$

$$\therefore R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

よって、 $q = k_1 e^{-\frac{t}{RC}}$

初期条件①を代入して、 $q^{+0} = k_1$

よって、 $q = (q_1^{-0} + q_2^{-0}) e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}$

$$\therefore i = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}$$

《注》

スイッチを閉じた瞬間に、 $C_1$ と $C_2$ の電圧は等しくなり、 $C_1$ に $q_1^{-0}$ 、 $C_2$ に $q_2^{-0}$ を保つことができない。各電荷は急に変化し、電荷の再配分が起こる。電荷が急変する特殊な例である。

(注) 1つにまとめないで考えたらどうなるか。

$$q_1^{+0} + q_2^{+0} = q_1^{-0} + q_2^{-0}$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = Ri (= v)$$

$$i = -\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt}$$

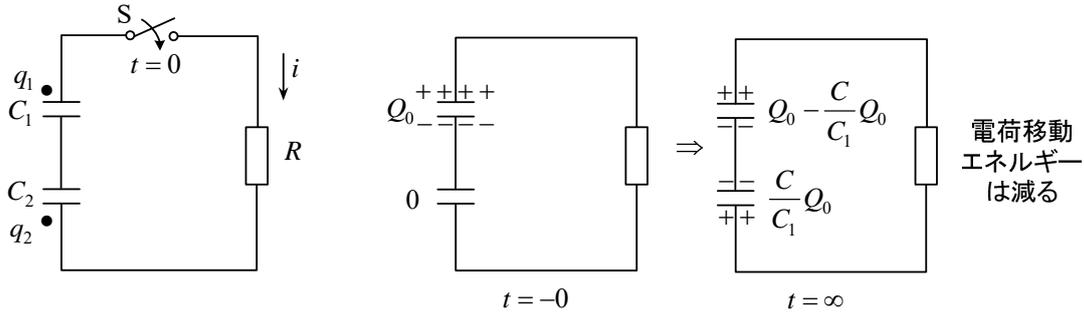
$q_1$ だけの式を作り解け。

同じ $i$ を得る。

### 電荷量不変の理

スイッチをオンすることでコンデンサだけが並列に接続されるとき、それらは1つにまとめられ、コンデンサの電荷の総量は急に変化しない。この結果、1つにまとめられたコンデンサに接続される外部回路に流れる電流は無限大とならない。

例題 12 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオンするとき、抵抗  $R$  で消費されるエネルギーを求めよ。但し、コンデンサ  $C_1, C_2$  のスイッチをオンする直前の電荷をそれぞれ  $Q_0, 0$  とする。



(解) 図のように極板の電荷を定義すると成立する式は、

$$i = -\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \quad \dots \dots \textcircled{1} \qquad \frac{q_1}{C_1} = Ri + \frac{q_2}{C_2} \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

電荷は保存されるから

$$q_1 + q_2 = Q_0 \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

$q_2$  だけの微分方程式を作るため、 $\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して  $i$  を消去し、更に $\textcircled{3}$ を代入して  $q_1$  を消去すると、

$$\frac{Q_0 - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} + R \frac{dq_2}{dt} \quad \therefore R \frac{dq_2}{dt} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q_2 = \frac{Q_0}{C_1}$$

$$\text{ここで、} C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \text{ とおくと、} R \frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C} = \frac{Q_0}{C_1} \quad \dots \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ 式を定常項と過渡項に分けて解くと、

$$q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 + k e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots \dots \textcircled{5}$$

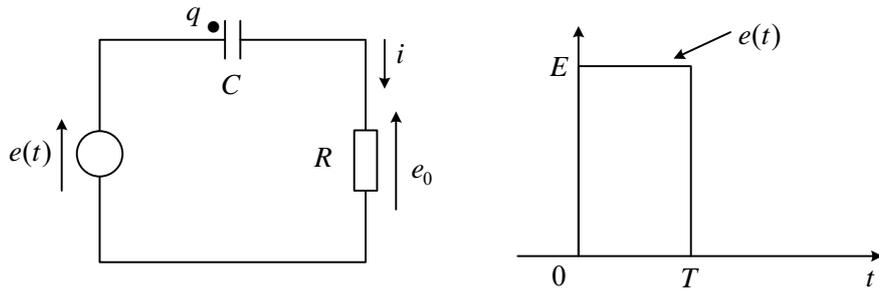
$$q_2(+0) = 0 \text{ より、} k = -\frac{C}{C_1} Q_0$$

$$\text{よって、} q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad \therefore i = \frac{dq_2}{dt} = \frac{Q_0}{RC_1} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$t=0$  から  $\infty$  までに抵抗で消費されるエネルギー  $W$  は、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \frac{Q_0^2}{RC_1^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{RC}t} dt \\ &= -\frac{C}{2} \left(\frac{Q_0}{C_1}\right)^2 \left[ e^{-\frac{2}{RC}t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{C}{2} \left(\frac{Q_0}{C_1}\right)^2 \end{aligned}$$

例題 13 図の RC 微分回路に、図のようなパルス電圧を加えた。出力電圧  $e_0$  を求めよ。但し、コンデンサの  $t=0$  での電荷は 0 とする。



(解) 成立する微分方程式は、

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (0 < t < T) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (T < t) \quad \dots \textcircled{2}$$

① を解くと、 $q = CE + ke^{-\frac{t}{RC}}$   
 $t=0$  で  $q=0$  だから、 $k = -CE$

$$\therefore q = CE(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \dots \textcircled{3}$$

よって、 $e_0 = Ri = R \frac{dq}{dt} = Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad (0 < t < T) \quad \dots \textcircled{4}$

② を解くと、 $q = k'e^{-\frac{t}{RC}} \quad \dots \textcircled{5}$

$t=T$  で、電荷は急に变化しないので③より

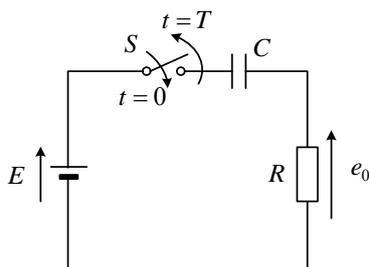
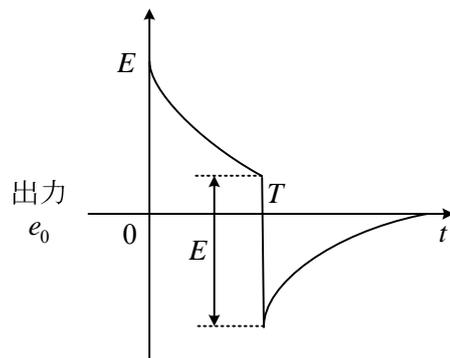
$q = CE(1 - e^{-\frac{T}{RC}})$  であるから、⑤式に代入して

$$CE(1 - e^{-\frac{T}{RC}}) = k'e^{-\frac{T}{RC}} \quad \therefore k' = CE(e^{\frac{T}{RC}} - 1)$$

⑤より、

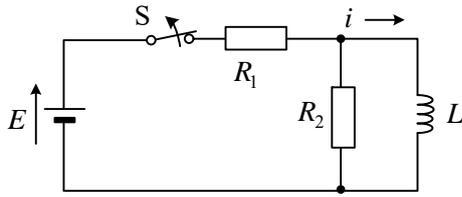
$$q = CE(e^{-\frac{t-T}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$e_0 = R \frac{dq}{dt} = Ee^{-\frac{t}{RC}} - Ee^{-\frac{t-T}{RC}} \quad (T < t)$$



この問題は、左図の回路で、 $t=0$  でスイッチをオンし、 $t=T$  でスイッチを切った場合の  $e_0$  を求める問題とは異なる。オンしている時は同じだが、オフしている時、例題は  $E=0$  の短絡状態に対し、この場合は開放で電流は流れない。

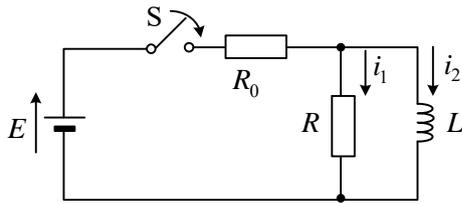
問題1 定常状態にある回路のスイッチ  $S$  を  $t=0$  で開いたとき、抵抗  $R_2$  に流れる電流及び  $t \geq 0$  の期間に消費される電力量を求めよ。



(答)

$$i = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L}t}, \quad W = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R_1}\right)^2$$

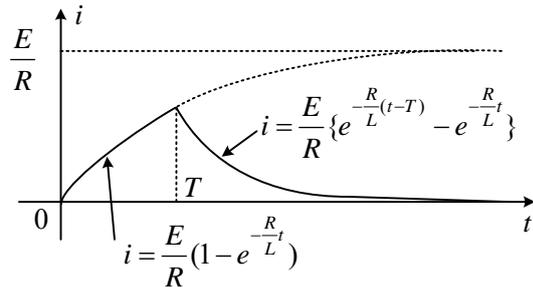
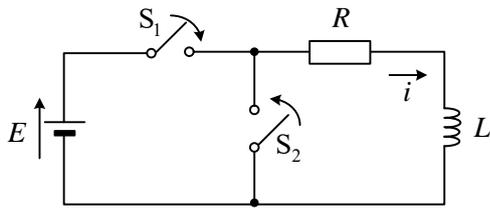
問題2 定常状態にある図の回路のスイッチを  $t=0$  で閉じた。抵抗  $R$  とインダクタンス  $L$  を流れる電流  $i_1, i_2$  を求めよ。



(答) 
$$i_1 = \frac{E}{R_0 + R} e^{-\frac{R_0 R}{(R_0 + R)L}t}$$

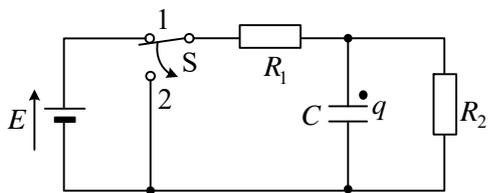
$$i_2 = \frac{E}{R_0} \{1 - e^{-\frac{R_0 R}{(R_0 + R)L}t}\}$$

問題3 図の回路で、 $t=0$  でスイッチ  $S_1$  を閉じ、ついで  $t=T$  のときスイッチ  $S_2$  を閉じると同時にスイッチ  $S_1$  を開くものとする。この時に流れる電流を求め図示せよ。



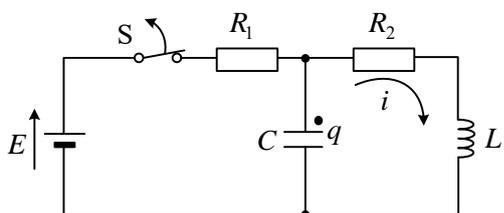
(答)

問題4 図の回路で最初スイッチ  $S$  を1の端子に接続し、十分時間が経過してから  $t=0$  でスイッチを2の端子に切り替えた。 $t \geq 0$  における電荷  $q(t)$  を求めよ。



(答) 
$$q = \frac{CR_2 E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}t}$$

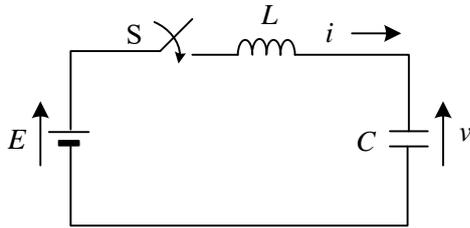
問題5 図の回路でスイッチを閉じ、十分時間が経過してから  $t=0$  でスイッチを開いた。 $t \geq 0$  における電荷  $q(t)$  を求めよ。ただし、 $E = 10V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 2\Omega, C = 0.1F, L = 1H$



(答) 
$$q = e^{-t} \left( \frac{1}{2} \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right)$$

(注) 
$$i = -\frac{dq}{dt} \quad q(0) = 0.5 \quad i(0) = 2.5$$

問題6  $t=0$ でスイッチSをオンするとき、電流*i*とコンデンサ電圧*v*を求めよ。Sをオンする前のコンデンサの初期電圧は*v*<sub>0</sub>とする。(LC共振：抵抗がないといつまでも振動が続く)



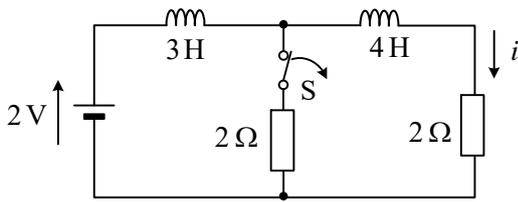
(答)  $LC \frac{d^2v}{dt^2} + v = E, \quad i = C \frac{dv}{dt}$

$v = E + k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t$

$v = E + (v_0 - E) \cos \omega_0 t, \quad i = \omega_0 C (E - v_0) \sin \omega_0 t$

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  : 共振角周波数

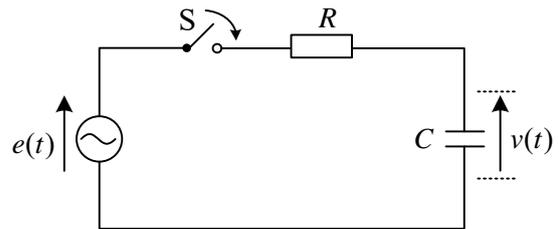
問題7 定常状態にある図の回路で、 $t=0$ でスイッチを開いた。 $t \geq 0$ における*i*(*t*)を求めよ。



(答)  $i = \frac{3}{7} e^{-\frac{2t}{7}} + 1$

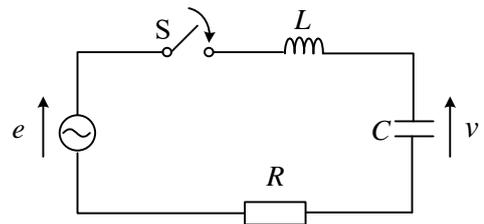
鎖交磁束不変の理より  $i(0) = \frac{10}{7}$

問題8 コンデンサの初期電荷を0とし、 $t=0$ でスイッチを開じた。 $t \geq 0$ における*v*(*t*)を求めよ。ただし、  
 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$   
 とする。



(答)  $v(t) = \frac{E_m}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \left\{ \sin(\omega t + \varphi - \theta) - e^{-\frac{t}{RC}} \sin(\varphi - \theta) \right\}$  ただし、 $\theta = \tan^{-1}(\omega CR)$

問題9 コンデンサの初期電荷を0とし、 $t=0$ でスイッチを開じた。 $t \geq 0$ における*v*(*t*)を求めよ。ただし、 $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$  とする。  
 なお、 $R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0$  とする。



(答)  $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi - \theta) - V_m \sin(\varphi - \theta) e^{-\alpha t} \cos \beta t$

$-V_m \left( \frac{\alpha}{\beta} \sin(\varphi - \theta) + \frac{\omega}{\beta} \cos(\varphi - \theta) \right) e^{-\alpha t} \sin \beta t$

ただし、 $V_m = \frac{E_m}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ ,  $\alpha = -\frac{R}{2L}$ ,  $\beta = \frac{1}{2L} \sqrt{4 \frac{L}{C} - R^2}$ ,  $\theta = \tan^{-1} \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$

## 第 16 章 過渡現象解析 II

ある時間関数  $f(t)$  に  $e^{-st}$  を掛けて時間 0 から  $\infty$  まで積分したものはラプラス変換と呼ばれ、複素数  $s$  の関数になる。これを使うと微分方程式の解が機械的に得られ、過渡現象が計算できる。特に、ラプラス変換 ( $L$  変換) を利用すると、スイッチを入れたり切ったりする直前の初期値で解が求まるので、直後の初期値が良く判らないときに便利である。

### ○ ラプラス変換(Laplace transform)の定義

$f(t)$  が変数  $t$  の関数であるとき、 $s$  を複素数として

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-1)$$

が存在するものとする。 $f(t)$  から  $F(s)$  に変換することをラプラス変換と呼び、

$$F(s) = L[f(t)] \quad (16-2)$$

と略記することが多い。(16-1) , (16-2)で、 $f(t)$  を表関数、 $F(s)$  を裏関数とよぶ。

また、 $t=0$  で  $f(t)$  が瞬間的に無限となる場合、**変化の直前**  $t=-0$  と、**直後**  $t=+0$  を区別して考え、

$$L_+[f(t)] = \int_{+0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-3)$$

$$L_-[f(t)] = \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (16-4)$$

と定義する。

$$L[f(t)] = \int_{-0}^{+0} f(t) e^{-st} dt + L_+[f(t)] \quad (16-5)$$

の関係がある。もし、 $f(t)$  が  $-0$  と  $+0$  の間で有限であれば(16-5)の第 1 項は 0 となり、 $L_- = L_+$  となる。特に区別する必要のない時は、 $L$  の記号を用いる。

通常、表関数  $f(t)$  と裏関数  $F(s)$  とは 1 対 1 に対応していると考えて良く、 $F(s)$  から  $f(t)$  を求めることをラプラス逆変換(inverse Laplace transform)といい、これを、

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] \quad (16-6)$$

の記号で表現する。ラプラス逆変換は  $F(s)$  を**部分分数展開**して求めることができる。下記の  $F(s)$  の例で説明する。 $F(s)$  の分母を因数分解して、次式で表せるとする。

$$F(s) = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)^2} \quad (16-7)$$

$a, b, c, d$  は、全て 0 以外可能である。 $s_1 = 0$  や  $s_1, s_2$  が共役複素数の場合もよい。 $F(s)$  の部分分数展開は次式となる。重根の場合はそれより次数の低い項も有り得る。

$$F(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} + \frac{C}{(s-s_3)^2} + \frac{D}{s-s_3} \quad (16-8)$$

$A, B, C, D$  は以下のようにして求める。先に | の左の演算をした後で根を代入する。例えば、(16-8)の両辺に  $(s-s_1)$  を掛けると、右辺の  $A$  の項だけが約分でき、 $s = s_1$  を代入したら、それ以外は 0 となるので、結局右辺は  $A$  となる。 $D$  は微分した後で  $s = s_3$  を代入する。

$$A = (s-s_1)F(s)|_{s=s_1}, \quad B = (s-s_2)F(s)|_{s=s_2}$$

$$C = (s-s_3)^2 F(s)|_{s=s_3}, \quad D = \frac{d}{ds} \left\{ (s-s_3)^2 F(s) \right\} |_{s=s_3} \quad (16-9)$$

後述のラプラス変換表を用いて、(16-8)の逆変換は次式となる。

$$f(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Cte^{s_3 t} + De^{s_3 t} \quad (16-10)$$

重根がなければ計算は容易である。なお、 $A, B, C, D$  は恒等式から求めることもできる。

**単位インパルス関数**(unit impulse)のラプラス変換を求めてみよう。

まず、単位インパルス関数は次のようにして作られる。



図 16-2 単位インパルス関数 (  $\delta$  関数 )

図 16-2 より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \times \frac{1}{\Delta t} = 1 \quad (16-11)$$

である。よって、

$$L[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)e^{-st} dt$$

←  $-0 \sim +0$  以外は 0

$$= e^0 \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1$$

←  $-0$  から  $+0$  においてこの値は  $e^0$

$$L_+[\delta(t)] = \int_{+0}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 0 \quad (\because +0 \sim \infty \text{で } \delta(t) = 0)$$

$\delta(t)$  には、一般的に次の性質がある。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt &= \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) f(t) dt \\ &= f(t_0) \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt \\ &= f(t_0) \end{aligned}$$

(標本抽出)

(16-12)

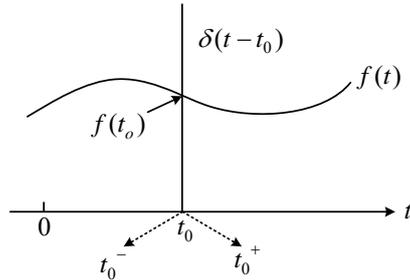


図 16-3 標本抽出

次に**単位ステップ関数**(unit step function) $u(t)$ を次のように定義する。

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq +0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t \leq -0 \end{cases} \quad (16-13)$$

$t = 0$  付近で  $u(t)$  は有限だから、

$L_+ = L_-$  であり、

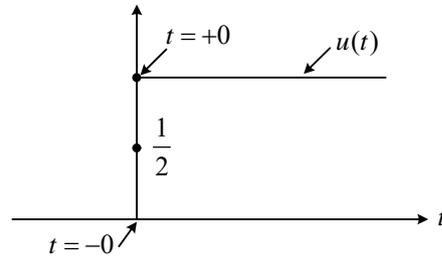


図 16-3 単位ステップ関数

$$L[u(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$$

となる。ここで、積分が  $1/s$  に収束するためには  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}$  が  $0$  とならなければならないが、

そのためには次の条件が必要である。いま  $s$  を  $s = \alpha + j\beta$  とすると、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} (\cos \beta t - j \sin \beta t) \quad (16-14)$$

従って、 $\alpha > 0$  であればよい。このとき、

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (16-15)$$

このように、値が収束するように  $s$  が存在するものとして計算する。通常使うときは変換表を用いるので、 $\alpha > 0$  の条件などは気にしなくてよい。一般に、

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (16-16)$$

が成立する。

簡単な関数のラプラス変換表を表 16-1 に示す。

表 16-1 ラプラス変換表

時間関数 $f(t)$	ラプラス変換 $F(s)$
単位インパルス関数 $\delta(t)$	$L_-[\delta(t)] = 1$ $L_+[\delta(t)] = 0$
単位ステップ関数 $U(t)$ または 1	$\frac{1}{s}$
$e^{-at}$ , $te^{-at}$ ( $a$ は複素数でもよい)	$\frac{1}{s+a}$ , $\frac{1}{(s+a)^2}$
$t$ , $t^2$ , $t^n$	$\frac{1}{s^2}$ , $\frac{2}{s^3}$ , $\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega \cos \theta + s \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\alpha t} [c \cos \beta t + (d + \alpha c) \frac{1}{\beta} \sin \beta t]$ $\alpha = -\frac{a}{2}$ , $\beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 < 4b$ ) 極 $\alpha \pm j\beta$
$ce^{\alpha t} + (d + \alpha c)te^{\alpha t}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 = 4b$ ) 極 $\alpha$ (重根)
$(\frac{c}{2} + \frac{d + \alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha + \gamma)t} + (\frac{c}{2} - \frac{d + \alpha c}{2\gamma})e^{(\alpha - \gamma)t}$ $\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$	$\frac{cs + d}{s^2 + as + b}$ ( $a^2 > 4b$ ) 極 $\alpha \pm \gamma$

(注意)  $\delta(t)$  以外,  $L_-$  ラプラス変換と  $L_+$  ラプラス変換は等しい。

$\delta(t)$  関数は,  $f(t)$  の  $-0$  の値と  $+0$  の値が違うとき,  $f(t)$  の微分で現れ,  $-0$  と  $+0$  間の微分は  $\delta(t)(f(+0) - f(-0))$  となる。このラプラス変換は

$$\int_{-0}^{+0} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(+0) - f(-0) \quad (16-17)$$

となり,  $L_-$  ラプラス変換と  $L_+$  ラプラス変換に差を生じる。

○ ラプラス変換の性質

$$L[f(t)] = F(s) \quad , \quad L[g(t)] = G(s) \quad \text{とすると,}$$

(i) ラプラス変換及び逆変換は線形変換である。  $a, b$  を定数とすれば,

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)] \quad (16-18)$$

$$L^{-1}[aF(s) + bG(s)] = aL^{-1}[F(s)] + bL^{-1}[G(s)] \quad (16-19)$$

(ii) 導関数のラプラス変換

$$L_- \left[ \frac{df}{dt} \right] = sF(s) - f(-0) \quad (16-20)$$

$$L_- \left[ \frac{d^2 f}{dt^2} \right] = s^2 F(s) - s f(-0) - f'(-0) \quad (16-21)$$

$$L_- [f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(-0) - s^{n-2} f'(-0) - \dots - f^{(n-1)}(-0) \quad (16-22)$$

$L_+$  の場合には,  $-0$  を  $+0$  で置き換える。'は1階微分,  $^{(n)}$  は  $n$  階微分を表す。

$$\begin{aligned} \text{(説明)} \quad L_- \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] &= \int_{-0}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[ f(t)e^{-st} \right]_{-0}^{\infty} + s \int_{-0}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ f(t)e^{-st} \right] - f(-0) + sF(s) = sF(s) - f(-0) \end{aligned}$$

この項が0になるように  $s$  の実部を選べるとする。

(iii) 積分関数のラプラス変換

$$L_- \left[ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{-0} f(\tau) d\tau \quad (16-23)$$

$L_+$  の場合,  $-0$  を  $+0$  とすればよい。

$$\text{(iv) 時間推移} \quad L[f(t-T)] = e^{-sT} F(s) \quad (16-24)$$

$$L^{-1}[e^{-sT} F(s)] = f(t-T) \quad (16-25)$$

$$\text{(説明)} \quad L[f(t-T)] = \int_0^{\infty} f(t-T)e^{-st} dt$$

ここで,  $t-T = \tau$  とおくと,  $t < 0: f(t) = 0$  と考えて

$$L[f(t-T)] = \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+T)} d\tau = e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s)$$

## ○ ラプラス変換の電気回路への応用

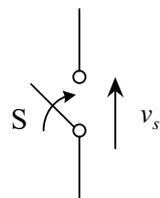
ラプラス変換を用いると回路の微分方程式を機械的に解くことができる。特に分布定数回路ではラプラス変換なしに論じることは難しいと言われている（文献 (3)）。また、コンデンサ電圧やコイルの電流の初期値（ $t=+0$ での値）がわからない時にも役立つ。つまり鎖交磁束不変の理や電荷量不変の理を使って $t=+0$ での値を求めることもできるが、その方法に自信が持てないときに機械的に初期値が求まるので便利である。

交流回路の過渡現象の計算にラプラス変換を使うと一般に大変な計算になる。この場合には微分方程式を直接解く方法で、まずは考えた方がよかろう。ただ、ラプラス変換による解き方は習得すべきなので、ラプラス変換を使って解くように試験問題で指示する事はある。このため基本的なラプラス変換の公式は覚えて欲しい。詳しいラプラス変換表が他の文献にあるが、実際に使うときは間違いないか何冊かでチェックしよう。

$L_+$  と  $L_-$  のどちらを使うか？

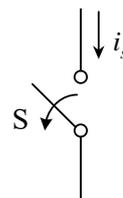
スイッチをオンまたはオフした直後のコンデンサの電荷やコイルに流れる電流の初期値（ $t=+0$ の値）が判っている時には、 $L_+$ 変換でよい。しかし、これらの初期値が判らないこともある。この場合には、既知である $t=-0$ の初期値を用いて解くことができる $L_-$ ラプラス変換が便利である。

$L_-$ ラプラス変換について述べる。スイッチを入れるとき、スイッチの間の電圧を考え、スイッチを切るとき、スイッチを流れる電流を考えてみよう。すると、 $-0 \leq t \leq +0$ で両者は有限で、 $t \geq +0$ では両者は完全に0であるからそれらの $L_-$ ラプラス変換は0となる。



$t=0$ でSオン

$$V_s(s) = \int_{-0}^{\infty} v_s e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} v_s dt = 0$$

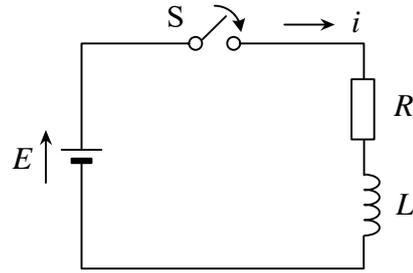


$t=0$ でSオフ

$$I_s(s) = \int_{-0}^{\infty} i_s e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} i_s dt = 0$$

回路の式を $L_-$ 変換して解く場合、スイッチを入れたり、切ったりする直前の回路を含めた電圧、電流について微分方程式を立てる必要がある。このとき、スイッチを入れる間の電圧と、スイッチを切る間の電流が $t \geq +0$ の回路では扱えない。しかし、上式に示したように、これらの $L_-$ ラプラス変換は0となる。従って、 $t=-0$ の初期値を用い、初期値以外はスイッチをオンまたはオフした後（ $t \geq +0$ ）の回路より、 $L_-$ ラプラス変換が求まる。

例題1 図の回路で  $t=0$  でスイッチ  $S$  をオンしたとき、流れる電流をラプラス変換を使って求めよ。



(解) 図より、

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (t \geq +0)$$

$L_+$  ラプラス変換して、

$$\frac{E}{s} = RI(s) + LsI(s) - Li(+0)$$

ここで、コイルの電流は急に变化しないので、スイッチを入れた直後  $i(+0) = 0$

$$\therefore \frac{E}{s} = (R + Ls)I(s)$$

恒等式

$$I(s) = \frac{E}{s(R + Ls)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{R + Ls} = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

$$aR + aLs + bs = E$$

$$a = \frac{E}{R}$$

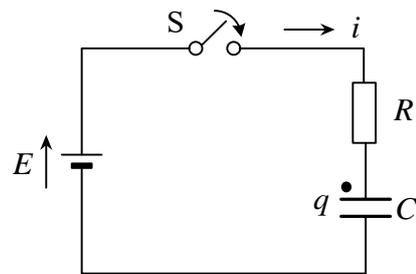
$$b = -\frac{L}{R}E$$

$$\text{逆変換して、} i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

(注)  $t=+0$  はスイッチを入れた直後を意味する。このように  $t=+0$  の値が判つているときは  $L_+$  ラプラス変換でよい。

例題2 図の回路で、 $t=0$  でスイッチ  $S$  をオンしたとき、コンデンサの電荷をラプラス変換により求めよ。

但し、コンデンサには、 $t \leq -0$  で  $q_0$  の電荷が蓄えられていたとする。



(解) 図より、 $t \geq +0$  で  $E = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

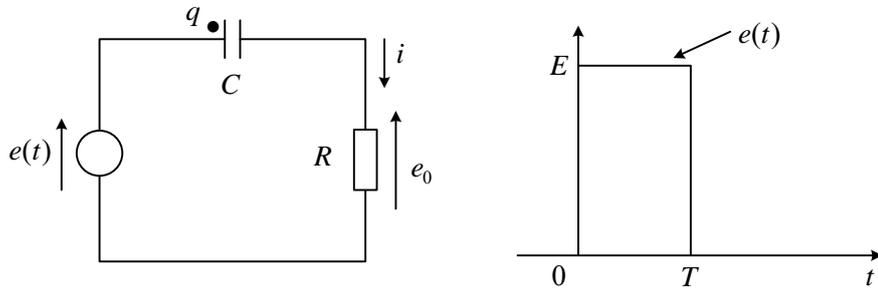
$$L_+ \text{ ラプラス変換して、} \frac{E}{s} = RsQ(s) - Rq(+0) + \frac{Q(s)}{C}$$

ここで、コンデンサの電荷は急に变化しないので、 $q(+0) = q_0$

$$Q(s) = \frac{E + Rq_0s}{s(Rs + 1/C)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{Rs + 1/C} = \frac{CE}{s} + \frac{q_0 - CE}{s + 1/(CR)}$$

$$\text{逆変換して、} q(t) = CE + (q_0 - CE)e^{-\frac{t}{CR}}$$

例題3 図のRC微分回路に、図のようなパルス電圧を加えた。出力電圧 $e_0$ を求めよ。但し、コンデンサの電荷は $t \leq -0$ で0とする。



(解) 電源電圧は、単位ステップ関数を用いて、次式で表せる。

$$e(t) = E[u(t) - u(t-T)] \quad ①$$

成立する回路方程式は、

$$Ri + \frac{q}{C} = E[u(t) - u(t-T)] \quad ② \quad i = \frac{dq}{dt} \quad ③$$

②, ③式を $L_+$ ラプラス変換して $t = +0$ の電荷の値を $q(+0)$ として

$$RI(s) + \frac{Q(s)}{C} = \frac{E}{s}(1 - e^{-sT}) \quad ④ \quad I(s) = sQ(s) - q(+0) \quad ⑤$$

コンデンサの電荷は急に变化しないので、 $q(+0) = 0$ である。④, ⑤より

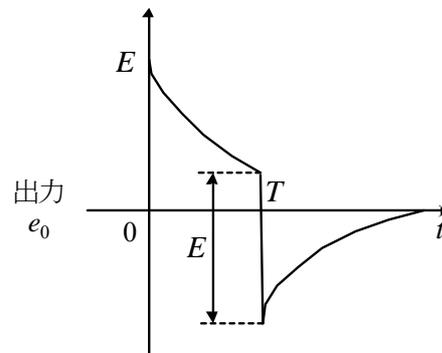
$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E}{R}(1 - e^{-sT}) \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} \\ &= \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} - \frac{E}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{CR}} e^{-sT} \end{aligned} \quad ⑥$$

時間推移の公式を利用して、⑥式を逆ラプラス変換すると

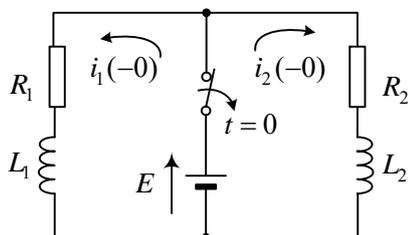
$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{E}{R} e^{-\frac{t-T}{RC}} u(t-T) \quad ⑦$$

出力電圧は次式のように求まる。

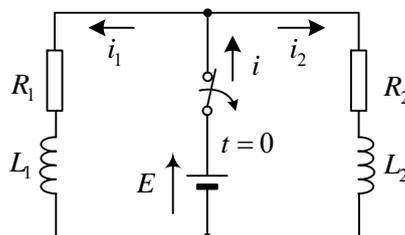
$$e_0 = E e^{-\frac{t}{RC}} - E e^{-\frac{t-T}{RC}} u(t-T) \quad ⑧$$



例題4 図(a)の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフする時、流れる電流を求めよ。スイッチをオフする前は定常状態とする。



(a)



(b)

(解) (b)図のスイッチを切る直前 ( $t \geq -0$ ) からの回路方程式を立てる。

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 \quad \text{①}$$

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{②}$$

①, ②を  $L$ -変換すると

$$L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(-0) + R_1 I_1(s) = L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(-0) + R_2 I_2(s) \quad \text{③}$$

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

ここで、スイッチを切るとき  $-0 \leq t \leq +0$  の電流は有限で、 $+0 \leq t$  では0だから、

$$I(s) = \int_{-0}^{\infty} i e^{-st} dt = \int_{-0}^{+0} i dt = 0 \quad \therefore \quad I_1(s) + I_2(s) = 0 \quad \text{④}$$

これを③に代入し  $I_2(s)$  を消去すると、

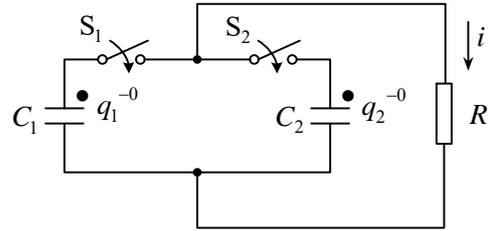
$$I_1(s) = \frac{L_1 i_1(-0) - L_2 i_2(-0)}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)} \quad \text{⑤}$$

よって、初期値  $i_1(-0) = \frac{E}{R_1}$  ,  $i_2(-0) = \frac{E}{R_2}$  を用いて、⑤より

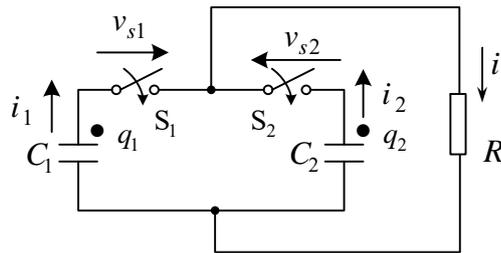
$$\begin{aligned} i_1(t) &= L^{-1}[I_1(s)] = L^{-1} \left[ \frac{L_1 E/R_1 - L_2 E/R_2}{R_1 + R_2 + s(L_1 + L_2)} \right] \\ &= \frac{L_1 E/R_1 - L_2 E/R_2}{L_1 + L_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} t} \end{aligned}$$

$t \geq +0$  では、 $L_1$  と  $L_2$  には同じ電流が流れるから、この初期値は共通である。しかし、 $t = -0$  では  $L_1$  と  $L_2$  に流れる電流は異なっている。ここに  $L_+$  変換と  $L_-$  変換の差がある。

例題5  $t=0$ でスイッチ $S_1, S_2$ を閉じるとき、 $R$ を流れる電流を求めよ。但し、 $C_1, C_2$ には、図の極板に $q_1^{-0}, q_2^{-0}$ の電荷が充電されていた。



(解) スイッチをオンするとき、スイッチの電圧を図のように定義する。



$t \geq -0$ のとき、以下の式が成り立つ。

$$\frac{q_1}{C_1} + v_{s1} = \frac{q_2}{C_2} + v_{s2} = Ri \quad (1)$$

$$i_1 + i_2 = i, \quad i_1 = -\frac{dq_1}{dt}, \quad i_2 = -\frac{dq_2}{dt} \quad (2)$$

①を $L$ -変換して、 $v_{s1}, v_{s2}$ のラプラス変換は0だから  $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = RI \quad (3)$

②を $L$ -変換して、 $I = I_1 + I_2, \quad I_1 = -sQ_1 + q_1^{-0}, \quad I_2 = -sQ_2 + q_2^{-0} \quad (4)$

③, ④より $I$ を求めると、

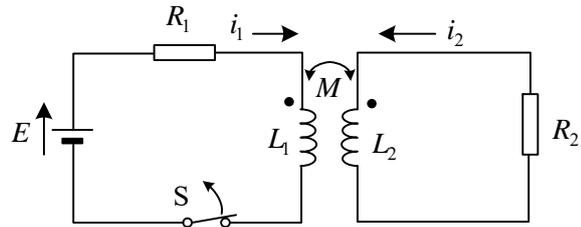
$$I(s) = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)s + 1}$$

$$i(t) = L^{-1}[I(s)] = \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{R(C_1 + C_2)} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$$

③より、 $q_1(t) = C_1 \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$ ,  $q_2(t) = C_2 \frac{q_1^{-0} + q_2^{-0}}{C_1 + C_2} e^{-\frac{t}{R(C_1 + C_2)}}$ ,

(注意) 結果として、 $t \geq +0$ の回路で考えて、初期値に $t = -0$ の値を用いると、 $L$ -変換が得られることが判る。

例題6 図の回路で、 $t=0$ でスイッチをオフした。電流 $i_2$ を求めよ。スイッチを切る前は定常状態とする。



(解) スイッチを切る直前 ( $t=-0$ ),  
回路は定常状態なので,

$$i_1(-0) = E/R_1, \quad i_2(-0) = 0 \quad \text{①}$$

スイッチを切った後、 $i_1(t) = 0$  ( $t \geq +0$ )、 $t$ が $-0$ から $+0$ の間 $i_1$ は有限であるから、 $L$ -変換して

$$I_1(s) = 0 \quad \text{②}$$

$i_2$ の回路について、微分方程式を立てると ( $t > -0$ )

$$M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \quad \text{③}$$

③を $L$ -変換して,

$$sM I_1 - M i_1(-0) + sL_2 I_2 - L_2 i_2(-0) + R_2 I_2 = 0 \quad \text{④}$$

①, ②を代入して

$$-M \frac{E}{R_1} + sL_2 I_2 + R_2 I_2 = 0 \quad \therefore I_2 = \frac{ME/R_1}{R_2 + sL_2}$$

$$\therefore i_2(t) = L^{-1} \left[ \frac{ME/R_1}{R_2 + sL_2} \right] = \frac{ME}{L_2 R_1} e^{-\frac{R_2}{L_2} t}$$

☆ ラプラス変換を使わないで解く方法

$L_2$ の電圧は、 $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ だから、 $i_1(+0) = 0, i_2(-0) = 0$ を考慮して、

鎖交磁束不変の理より  $L_2 i_2(-0) + M i_1(-0) = L_2 i_2(+0) + M i_1(+0)$  だから

$$M i_1(-0) = L_2 i_2(+0)$$

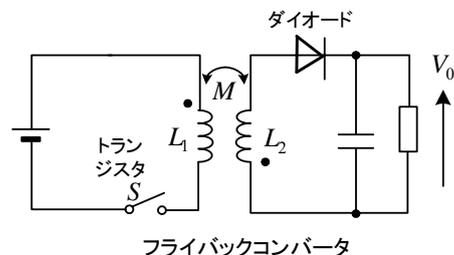
$$\therefore i_2(+0) = \frac{ME}{L_2 R_1} \quad \dots \text{①}$$

微分方程式を立てると、 $t \geq +0$ で

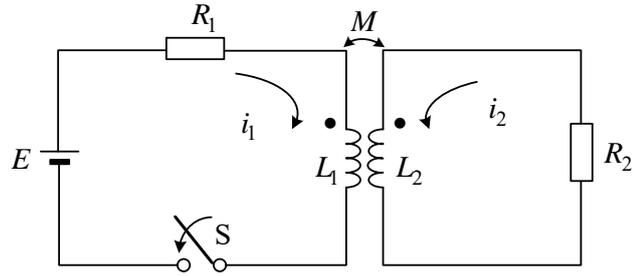
$$R i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = 0 \quad \dots \text{②}$$

①, ②より容易に $i_2(t)$ が求まる。

この回路は、フライバックコンバータとして使われている。トランジスタで作るスイッチSをオン、オフして、直流電圧 $V_0$ の値を自由に変えることができる。



例題7 図の回路で  $t=0$  でスイッチを入れるとき、電流  $i_1$  をラプラス変換を使って求めよ。スイッチを入れる前  $i_2=0$  とする。また、 $L_1L_2-M^2>0$  とする。



(解) スイッチを入れた後、以下の微分方程式が成り立つ。

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (1) \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (2)$$

スイッチを入れた直後、①、②のそれぞれの鎖交磁束は0のままだから（鎖交磁束不変）、

$$L_1 i_1(+0) + M i_2(+0) = 0, \quad L_2 i_2(+0) + M i_1(+0) = 0$$

$$\therefore i_1(+0) = i_2(+0) = 0 \quad (3)$$

③式を考慮して、①、②式をラプラス変換すると次式を得る。

$$\frac{E}{s} = R_1 I_1 + s L_1 I_1 + s M I_2 \quad (4) \quad 0 = R_2 I_2 + s L_2 I_2 + s M I_1 \quad (5)$$

④、⑤の連立方程式を解いて

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta s^2 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) s + R_1 R_2} \begin{bmatrix} (R_2 + s L_2) E / s \\ -M E \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta (s - s_1)(s - s_2)} \begin{bmatrix} (R_2 + s L_2) E / s \\ -M E \end{bmatrix} \quad (6)$$

ただし、 $\Delta = L_1 L_2 - M^2$

$$s_1, s_2 = \frac{-(L_1 R_2 + L_2 R_1) \pm \sqrt{(L_1 R_2 - L_2 R_1)^2 + 4 R_1 R_2 M^2}}{2 \Delta}$$

$s_1$  は+、 $s_2$  は-に対応する。

⑥式の  $I_1$  は、以下のように部分分数に展開できる。

$$I_1 = \frac{C}{s} + \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} \quad (7)$$

$$C = s I_1|_{s=0} = \frac{R_2 E}{\Delta s_1 s_2} = \frac{E}{R_1} \quad (6) \text{の分母の根と係数の関係} \quad s_1 s_2 = \frac{R_1 R_2}{\Delta}$$

$$A = (s - s_1) I_1|_{s=s_1} = \frac{E}{s_1 - s_2} \left( \frac{L_2}{\Delta} + \frac{R_2}{s_1 \Delta} \right) \quad B = (s - s_2) I_1|_{s=s_2} = \frac{E}{s_2 - s_1} \left( \frac{L_2}{\Delta} + \frac{R_2}{s_2 \Delta} \right)$$

⑦式を逆ラプラス変換して

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + A e^{s_1 t} + B e^{s_2 t} \quad (\text{この結果は第15章例題10の結果と一致する})$$

# 第 17 章 分布定数回路

これまでの章では、回路の抵抗、コンデンサ、コイルを結ぶ電線は理想的で導体として考えてきた。しかし、長い送電線では、抵抗やインダクタンスそれに対地との静電容量などを無視することができない。また、短い線でも周波数が非常に高い場合（通信の分野）にもそれらを無視できない。この章では、これらの場合を考える。

## ○ 分布定数回路の基本式

平行 2 線の線路を考える。

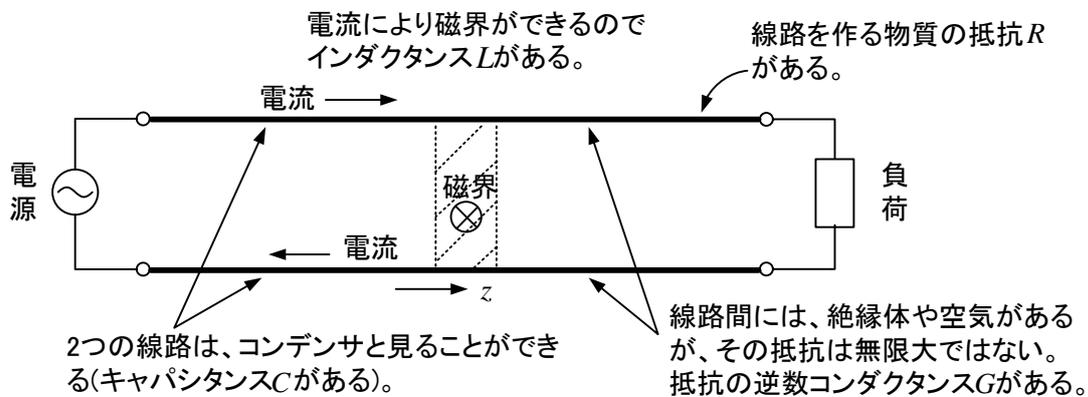


図 17-1 電線やケーブルはどんな素子で表せるか？

これまでの電線では、上記の  $R$ 、 $L$ 、 $C$ 、 $G$  は全て無視し、 $0$  と考えていた。電源からの座標を  $x$  とし、短い区間  $\Delta x$  をとると、その間の等価回路は図のように考えられる。

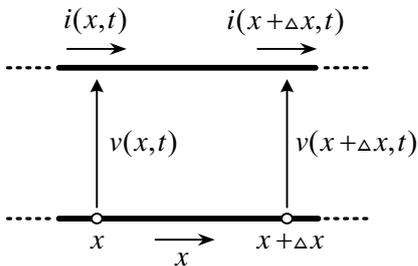


図 17-2 微小区間の電圧，電流

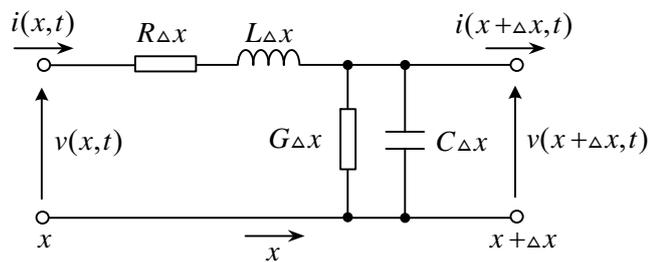


図 17-3 等価回路

抵抗は線路の長さに比例するが、1m 当りの抵抗を（往復分） $R$  [ $\Omega/m$ ] とすると、微小区間  $\Delta x$  では、 $R\Delta x$  となる。インダクタンスも長さに比例し、1m 当りのインダクタンス（往復分） $L$  [ $H/m$ ] とすると、 $\Delta x$  間では  $L\Delta x$  となる。静電容量も長さに比例し、1m 当り  $C$  [ $F/m$ ] とすると、 $\Delta x$  間では  $C\Delta x$  となる。線路間の絶縁抵抗は長さに反比例するが、その逆数であるコンダクタンスは長さに比例し、1m 当り  $G$  [ $S/m$ ] とすると、 $\Delta x$  間では  $G\Delta x$  となる。これにより、図の等価回路が書

ける。微小区間であるから、4つの素子の順番はどれでもよい。電圧や電流が時間 $t$ だけの関数ではなく位置 $x$ の関数にもなっているのは、等価回路から判るように場所によって値が異なるからである。このような回路は**分布定数回路**(distributed constant circuit)と呼ばれる。

テイラーの定理より

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \right) + \dots$$

が成立し、 $\Delta x$ ,  $\Delta y$ が小さいときには2次以上の項は無視できて

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

と近似できる。変数が2つ以上のとき、偏微分となる。

これを利用して、

$$i(x+\Delta x, t) = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \Delta x \quad (17-1)$$

$$v(x+\Delta x, t) = v(x, t) + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Delta x \quad (17-2)$$

となる。

等価回路より、

$$v(x, t) = R \Delta x i(x, t) + L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + v(x+\Delta x, t) \quad (17-3)$$

(17-2)を用いて、

$$- \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \Delta x = R \Delta x i(x, t) + L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

$\Delta x$ で割り、 $v(x, t)$ ,  $i(x, t)$  を $v$ ,  $i$ と書くと

$$- \frac{\partial v}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (17-4)$$

電流については、

$$i(x+\Delta x, t) = i(x, t) - G \Delta x v(x+\Delta x, t) - C \Delta x \frac{\partial v(x+\Delta x, t)}{\partial t}$$

(17-1), (17-2)を用いて、 $\Delta x^2$ の項は無視すると

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \Delta x = -G \Delta x v(x, t) - C \Delta x \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$$

$\Delta x$ で割り、 $v(x, t)$ ,  $i(x, t)$ を $v$ ,  $i$ と書くと

$$- \frac{\partial i}{\partial x} = G v + C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (17-5)$$

(17-4), (17-5)は、分布定数回路の出発点となる。

## ○ 交流電源に対する定常状態の基本式

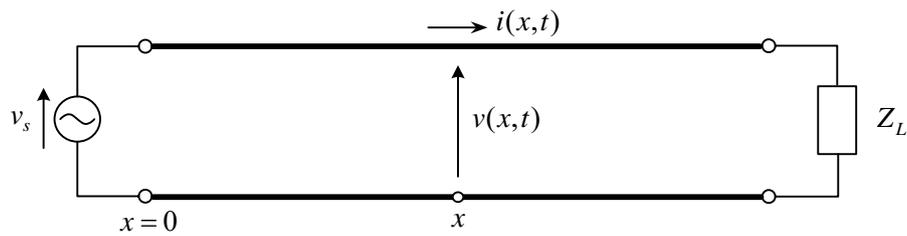


図 17-4 分布定数回路（線路）に交流電源を接続

図 17-4 の電源電圧を  $v_s(t) = V_s \sin \omega t$  とすると、電源から  $x[\text{m}]$  離れた点の電圧  $v(x,t)$ 、電流  $i(x,t)$  は、定常状態では次式で表される。すなわち、場所によって振幅や位相は異なるが、電源と同じ周波数の正弦波である。分布定数回路も一定の  $R, L, C, G$  が集まってできた回路であるから、交流電源がつながった定常状態では一般の交流回路と同様と考えてよいであろう。

$$v(x,t) = V_m(x) \sin(\omega t + \theta_v(x)) \quad (17-6)$$

$$i(x,t) = I_m(x) \sin(\omega t + \theta_i(x)) \quad (17-7)$$

これらに対するフェーザを

$$V(x) \equiv V_m(x) e^{j\theta_v(x)} \quad (17-8)$$

$$I(x) \equiv I_m(x) e^{j\theta_i(x)} \quad (17-9)$$

と定義する。通信関係では  $\sqrt{2}$  で割らない形で定義するので、ここではそれに従う。フェーザから瞬時値を求めるには、

$$v(x,t) = \text{Im} \left( V(x) e^{j\omega t} \right) \quad (17-10)$$

$$i(x,t) = \text{Im} \left( I(x) e^{j\omega t} \right) \quad (17-11)$$

ここで、 $\text{Im}()$  は虚部を意味する。

(17-10), (17-11)を(17-4), (17-5)に代入すると、次式のフェーザ表示式が得られる。このとき、 $\partial/\partial x$  はフェーザが  $x$  のみの関数だから  $d/dx$ 、 $\partial/\partial t$  は時間に関する偏微分なので  $j\omega$  が掛けられる。

$$-\frac{dV(x)}{dx} = RI(x) + j\omega LI(x) \quad (17-12)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx} = GV(x) + j\omega CV(x) \quad (17-13)$$

一方の式を  $x$  で微分し、他方の式を代入すれば

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \gamma^2 V(x) \quad (17-14)$$

$$\frac{d^2 I(x)}{d x^2} = \gamma^2 I(x) \quad (17-15)$$

ただし,  $\gamma$  (ガンマ) は,

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (17-16)$$

(17-14)を解くと, 特性方程式は  $p^2 = \gamma^2 \quad \therefore p = \pm \gamma$  だから

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad (17-17)$$

(17-17)を(17-12)に代入して,

$$I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad (17-18)$$

となる。A, Bは線路両端の条件による決る定数 (一般に複素数) である。ここで,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (17-19)$$

$Z_0$  は**特性インピーダンス**(characteristic impedance),  $\gamma$  は**伝搬定数**(propagation constant)と呼ばれる。

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \alpha \geq 0 \quad (17-20)$$

とにおいて,  $\alpha$  を**減衰定数**(attenuation constant),  $\beta$  を**位相定数**(phase constant)と呼ぶ。(17-16)=(17-20)の両辺を2乗して, 実部と虚部を等しいとおくことにより

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (17-21)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (\omega^2 LC - RG) \right\}} \quad (17-22)$$

(17-17), (17-18)は, 分布定数回路の基本となる重要な公式であるから, 是非記憶してほしい。実際の瞬時値は, (17-10), (17-11)に代入して求まる。

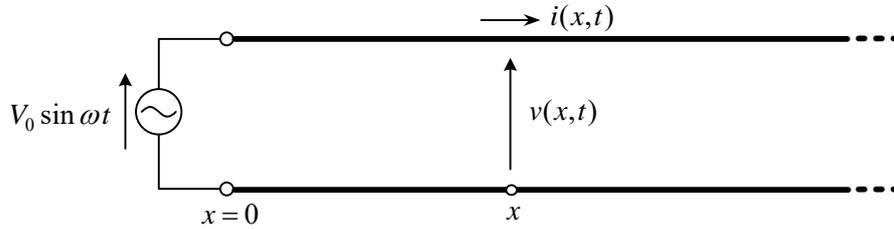
$$\begin{aligned} v(x, t) &= I_m(V(x)e^{j\omega t}) \\ &= I_m((Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x})e^{j\omega t}) \\ &= I_m(Ae^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}) + I_m(Be^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)}) \end{aligned} \quad (17-23)$$

第1項は  $x$  が増加する方向に進む波, 第2項は逆に  $x$  が減少する方向に進む波を表し, 一般にはこれらの波を加え合わせたものとなる。一般に, A, Bは複素数なので, 注意すること。

電流については, 第1項, 第2項とも特性インピーダンス  $Z_0$  で割ることで得られる。第2項のマイナスについては, 第2項が電流の矢印の方向と逆方向に進むことに対応している。

例題1 図の半無限長線路で、 $x$  点の電圧と電流を求めよ。

但し、特性インピーダンス  $Z_0$ 、伝搬定数  $\gamma = \alpha + j\beta$  ( $\alpha > 0$ ) とする。



(解)  $v(x,t)$  のフェーザ  $V(x)$  は次式で与えられる。

$$V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} = Ae^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + Be^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad \textcircled{1}$$

境界条件として、

(i)  $x=0$  で、 $V(0) = V_0$  (実数)

(ii)  $x=\infty$  で、 $V=0$ ,  $I=0$

従って、(ii) を適用すると、 $B=0$  でなくてはならない。

よって、①より、

$$V(x) = Ae^{-\gamma x}$$

(i) を適用して、 $A = V_0$

$$\therefore V(x) = V_0 e^{-\gamma x} = V_0 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad \textcircled{2}$$

電流は、

$$I(x) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma x} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad \textcircled{3}$$

②より、

$$\begin{aligned} v(x,t) &= I_m(V(x)e^{j\omega t}) \\ &= I_m(V_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}) \\ &= V_0 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x) \end{aligned} \quad \textcircled{4}$$

③より、

$$\begin{aligned} i(x,t) &= I_m(I(x)e^{j\omega t}) \\ &= \frac{V_0}{|Z_0|} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x - \arg Z_0) \quad \because Z_0 = |Z_0| e^{j\arg Z_0} \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

$t=0$  のとき、 $v = -V_0 e^{-\alpha x} \sin \beta x$

$t = \frac{T}{4}$  のとき、 $v = V_0 e^{-\alpha x} \sin(\frac{\pi}{2} - \beta x) = V_0 e^{-\alpha x} \cos \beta x$

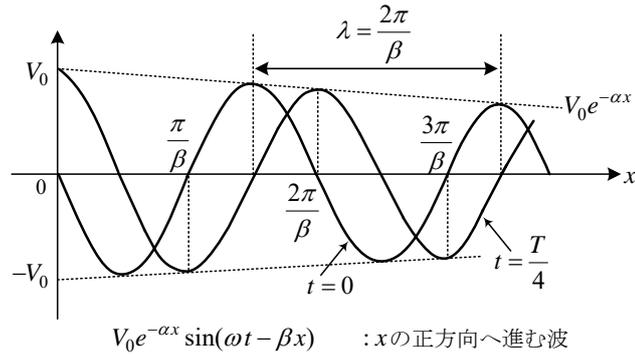


図 17-5 進行波(travelling wave)

$\sin(\omega t - \beta x)$  について

- ある点  $x = x_0$  では,  $\sin(\omega t - \beta x_0)$   $\therefore$  周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (時間について, 正弦波)
- ある時間  $t = t_0$  では,  $\sin(\omega t_0 - \beta x)$   $\therefore$  波長  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$  (場所について, 正弦波)
- 図より, 時間が  $T/4$  変わると, 波は  $x$  方向に  $\lambda/4$  進んでいる。

よって, 波の速度  $v_p$  は**位相速度**(phase velocity)と呼ばれ,

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta}$$

となる。 $\omega t - \beta x = \text{一定}$  なら  $\sin$  の値が変化しないから, 両辺を  $t$  で微分して求めても良い。

**無損失線路**  $R = G = 0$  の場合, 損失が無いので無損失線路と呼ばれる。

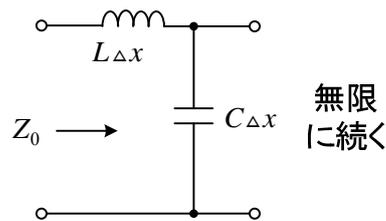
伝搬定数  $\gamma = \sqrt{j\omega C \cdot j\omega L} = j\omega\sqrt{LC} \quad \therefore \alpha = 0, \beta = \omega\sqrt{LC}$

特性インピーダンス  $Z_0 = \sqrt{L/C}$

従って, ④, ⑤より

$$v(x, t) = V_0 \sin\{\omega(t - \sqrt{LC}x)\}$$

$$i(x, t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\{\omega(t - \sqrt{LC}x)\}$$

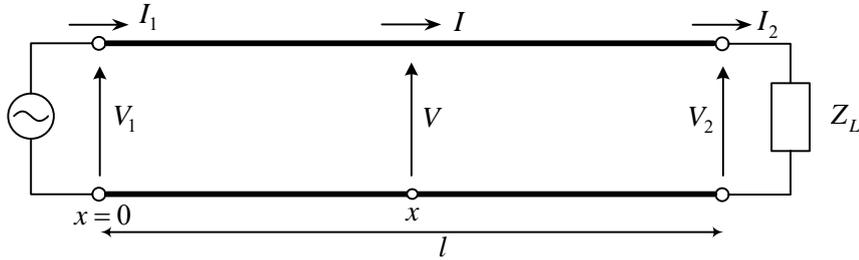


このことから, どの点においても, それから右側に純抵抗  $\sqrt{L/C}$  があるとした電流が流れる。実際には抵抗は無いが,  $L$  と  $C$  が無限につながっているので, そこにエネルギーが蓄えられていくと考えられる。図に示す  $L$  と  $C$  の無限に続く回路の反復インピーダンスについて考えよう。この回路の  $K$  行列を求め,  $A = 1 - \omega^2 LC_{\Delta x}^2, B = j\omega L_{\Delta x}, C = j\omega C_{\Delta x}, D = 1$  を得る。(13-19)より反復インピーダンスは次式のように求まる。

$$Z_{K1} = \frac{j\omega L_{\Delta x}}{2} \pm \frac{1}{j} \sqrt{\frac{(\omega L_{\Delta x})^2}{4} - \frac{L}{C}} \quad (+\text{を採用})$$

$\omega_{\Delta x}$  の項を無視すると,  $Z_{K1}$  の実部正より, 特性インピーダンスは反復インピーダンスに等しい。

例題 2 長さ  $l$  の線路で、 $x=0$  の点の電圧  $V_1$ 、電流  $I_1$  と  $x=l$  の点での電圧  $V_2$ 、電流  $I_2$  (いずれもフェーズ) の関係を求めよ。また、任意の点  $x$  での電圧  $V$ 、電流  $I$  と  $V_2$ 、 $I_2$  の関係を求めよ。



(解) 一般に、
$$V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad \text{①}$$

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad \text{②}$$

$x=l$  のとき、 $V = V_2$ 、 $I = I_2$  だから

$$V_2 = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} \quad \text{③}$$

$$I_2 = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}) \quad \therefore I_2 Z_0 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} \quad \text{④}$$

$$\text{③+④より、} A = \frac{V_2 + Z_0 I_2}{2} e^{\gamma l} \quad \text{⑤}$$

$$\text{③-④より、} B = \frac{V_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-\gamma l} \quad \text{⑥}$$

$x=0$  のとき、 $V = V_1$ 、 $I = I_1$  だから ①、②より

$$V_1 = A + B = V_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} + Z_0 I_2 \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0}(A - B) = \frac{V_2}{Z_0} \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} + I_2 \cdot \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}$$

ここで、 $\sinh \gamma l \equiv \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2}$ 、 $\cosh \gamma l \equiv \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2}$  とおくと

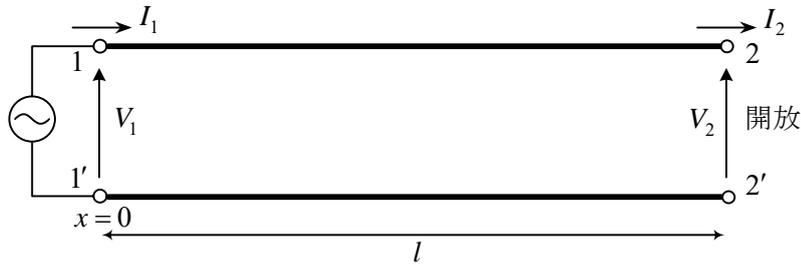
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{⑦}$$

任意の点  $x$  については、⑤式で  $l$  のかわりに両者間の距離  $l-x$  を用いればよく、

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(l-x) & Z_0 \sinh \gamma(l-x) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh \gamma(l-x) & \cosh \gamma(l-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \text{⑧}$$

(注) ⑦式より、縦続行列  $K$  が得られている (対称回路である)。第 13 章例題 7 より、反復パラメータは、 $Z_{K1} = Z_{K2} = \sqrt{B/C} = Z_0$ 、 $\theta_K = \gamma l$  となる。

例題3 長さ $l$ の無損失線路の片方が開放されているとき、もう片方の端子からみたインピーダンス $Z$ を求めよ。



(解) 一般に

$$V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad \text{①}$$

$$I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad \text{②}$$

$x=l$ のとき、 $V=V_2$ 、 $I=I_2=0$ より

$$V_2 = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}, \quad 0 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} \quad \therefore A = \frac{V_2}{2}e^{\gamma l}, \quad B = \frac{V_2}{2}e^{-\gamma l}$$

$x=0$ で、 $V=V_1$ 、 $I=I_1$ より

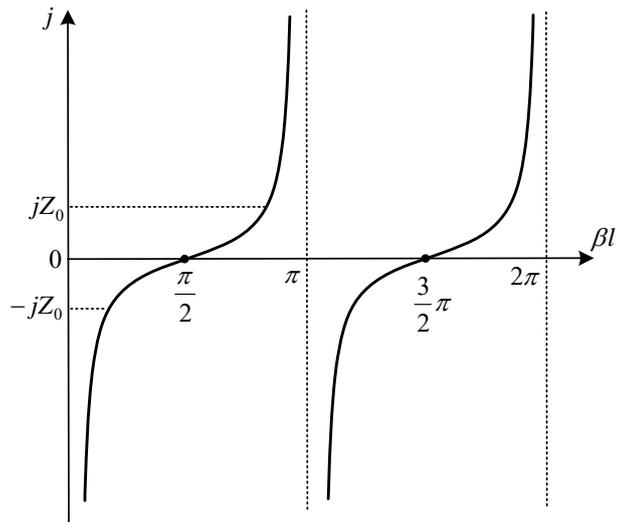
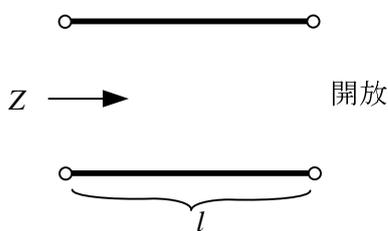
$$V_1 = A + B = V_2 \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = V_2 \frac{e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}}{2} = V_2 \cos \beta l$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0}(A - B) = \frac{V_2}{Z_0} \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \frac{V_2}{Z_0} \frac{e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}}{2} = \frac{V_2}{Z_0} j \sin \beta l$$

$\therefore$  無損失線路であるから、 $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$ 、 $Z_0 = \sqrt{L/C} > 0$

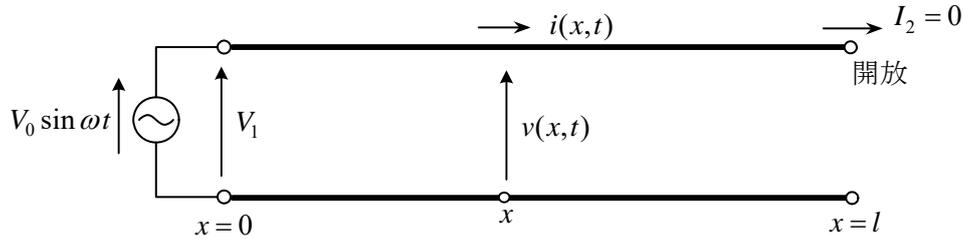
従って、

$$Z = \frac{V_1}{I_1} = -jZ_0 \frac{\cos \beta l}{\sin \beta l}$$



$\beta l$ が0から $2\pi$ になるような長さに線路を切断すると、 $Z$ は $-j\infty$ から $j\infty$ の範囲で図のように変化する( $C$ から $L$ に変化)。 $L$ 、 $C$ が決まっている線路の長さを変えるというようなインピーダンスが作れるということが判る。

例題4 図の長さ  $l$  の無損失線路の片方が開放されている。  $l = \pi / \beta$  ( $\beta$  : 位相定数) のとき、任意の点  $x$  における電圧と電流の瞬時値  $v(x, t)$ ,  $i(x, t)$  を求めよ。



(解) 一般に、

$$V = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad ① \quad I = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x}) \quad ②$$

$x=l$  のとき、  $I = I_2 = 0$  であるから②より

$$0 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l} \quad \therefore A = Be^{2\gamma l}$$

ここで、  $\gamma = j\beta$  であるから、  $2\gamma l = 2j\beta \cdot \frac{\pi}{\beta} = j2\pi$   $\therefore A = Be^{j2\pi} = B$  ③

$x=0$  で、フェーザ表示で振幅を用いているから  $V = V_0$  なので、①より、

$$V_0 = A + B = 2A \quad \therefore A = V_0 / 2 \quad ④$$

③、④を①、②へ代入して、  $\gamma = j\beta$  とおくと

$$V = \frac{V_0}{2}(e^{-j\beta x} + e^{j\beta x}) = V_0 \cos \beta x$$

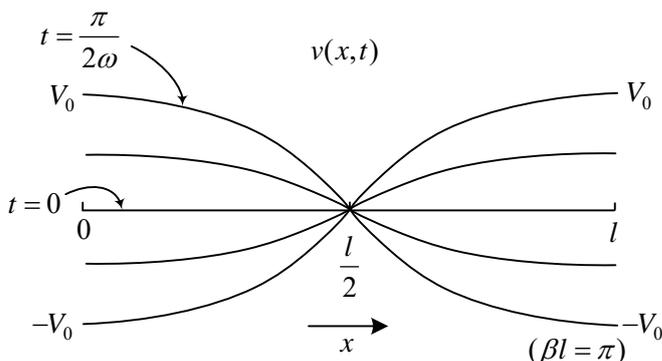
$$I = \frac{V_0}{2Z_0}(e^{-j\beta x} - e^{j\beta x}) = -j \frac{V_0}{Z_0} \sin \beta x$$

求める瞬時値は、  $Ve^{j\omega t}$ ,  $Ie^{j\omega t}$  の虚部であるから

$$v(x, t) = \frac{V_0}{2} \{ \sin(\omega t - \beta x) + \sin(\omega t + \beta x) \} = V_0 \cos \beta x \sin \omega t$$

$$i(x, t) = \frac{V_0}{2Z_0} \{ \sin(\omega t - \beta x) - \sin(\omega t + \beta x) \} = -\frac{V_0}{Z_0} \sin \beta x \cos \omega t$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} > 0$$



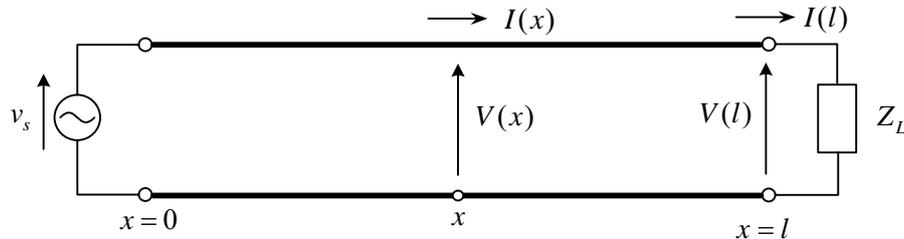
$x=0$  のところでは、電圧は時間の変化により  $-V_0 \sim V_0$  の範囲で正弦波として変化する。 $x=l/2$  のところでは常に  $v=0$  で節となる。**定在波**(standing wave)と呼ばれる。線路の長さが特殊なとき起こる。

例題5 長さ  $l$  の線路で、 $x=l$  の点にインピーダンス  $Z_L$  が接続されている。電圧  $V(l)$ 、電流  $I(l)$  (いずれもフェーザ) を入射波(incident wave)  $V_i(l)$ 、 $I_i(l)$  と反射波(reflected wave)  $V_r(l)$ 、 $I_r(l)$  に分けて、

$$V(l) = V_i(l) + V_r(l)$$

$$I(l) = I_i(l) - I_r(l)$$

とおくとき、 $V_i(l)$ 、 $V_r(l)$ 、 $I_i(l)$ 、 $I_r(l)$  を書け。また、反射波/入射波をインピーダンスで表せ。



(解) 一般式で、 $x=l$  とおいて

$$V(l) = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} \quad I(l) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}) \quad \text{①}$$

入射波は  $x$  が増える方向に進む波、反射波は  $x$  の減少する方向に進む波と考えて

$$V_i(l) = Ae^{-\gamma l}, \quad V_r(l) = Be^{\gamma l}$$

$$I_i(l) = Ae^{-\gamma l} / Z_0, \quad I_r(l) = Be^{\gamma l} / Z_0$$

反射波/入射波を  $\rho$  (ロー) とおくと、

$$\rho = \frac{V_r(l)}{V_i(l)} = \frac{I_r(l)}{I_i(l)} = \frac{B}{A} e^{2\gamma l} \quad \text{②}$$

負荷  $Z_L$  について、

$$V(l) = Z_L I(l) \quad \text{③}$$

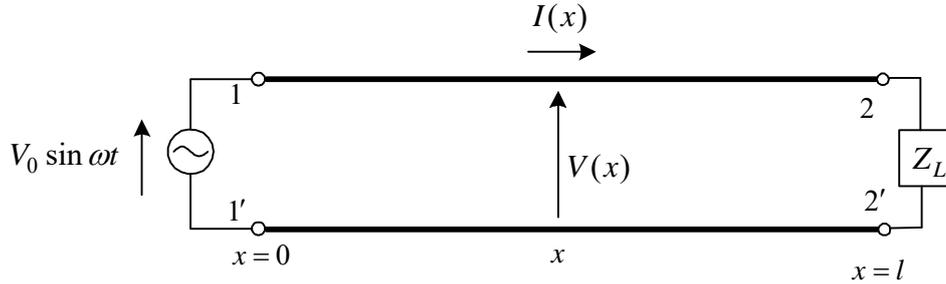
①, ②, ③より

$$Z_L = Z_0 \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \therefore \rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$\rho$  は**反射係数**(reflection coefficient)と呼ばれている。 $Z_L = Z_0$  すなわち特性インピーダンスと負荷のインピーダンスが等しいとき反射係数は  $0$  で、反射は生じない ( $B=0$  で反射波も  $0$ )。これは無限長線路と同じである。通信分野で信号を送る場合には、一般に反射を避けなくては行けないので、線路の接続点で左右を見たインピーダンスを等しくすることが行われる。これを**インピーダンス整合 (インピーダンスマッチング)** という。逆に、反射波を利用したものにレーダ (電波探知器) がある。音では、魚群探知器、超音波診断などがある。

なお、音楽を建物の中で聞くとときも、反射の問題は重要である。反射によって定在波が起こると、あるところの席では音が大きく聞こえ、あるところの席ではほとんど聞こえなくなる。人の声には  $20 \sim 5\text{kHz}$  の帯域 (いろんな周波数の波が集まっている) があり、結果としてくずれた音が聞こえる。

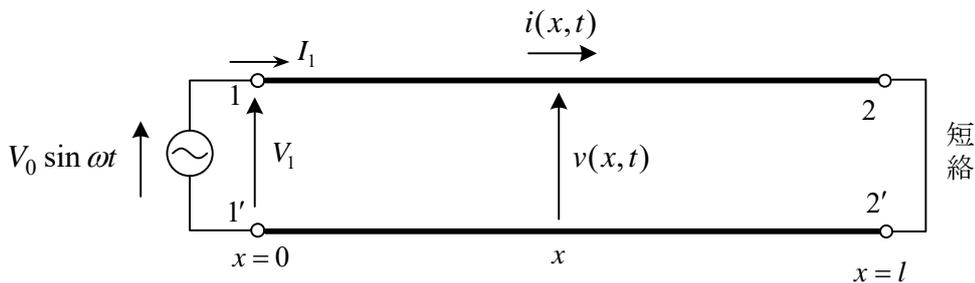
問題1 長さ $l$ の線路で、図のように電源電圧と右端のインピーダンスが与えられている。 $x$ 点での電圧 $V(x)$ 、電流 $I(x)$ （いずれもフェーザ）を求めよ。



(解)  $V(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$  ,  $I(x) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{-\gamma x} - Be^{\gamma x})$

ただし、 $A = \frac{V_0 e^{2\gamma l}}{\rho + e^{2\gamma l}}$  ,  $B = \frac{\rho V_0}{\rho + e^{2\gamma l}}$  反射係数  $\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$

問題2 長さ $l$ の無損失線路の片方が短絡されているとき、もう片方の端子からみたインピーダンス $Z$ を求めよ。また、 $l = 3\pi/(2\beta)$  ( $\beta$ :位相定数)のとき、任意の点 $x$ における電圧と電流の瞬時値 $v(x,t)$ 、 $i(x,t)$ を求め、それらの最大値を横軸 $x$ に対し図示せよ。



(解)  $Z = jZ_0 \tan \beta l$

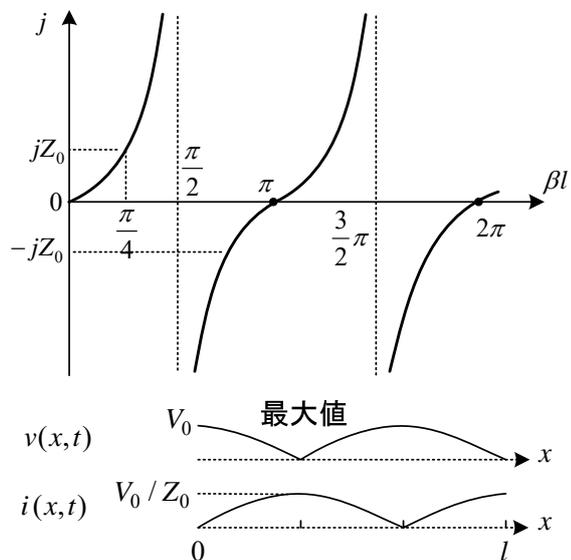
ここで、 $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$v(x,t) = \frac{V_0}{2} \{ \sin(\omega t - \beta x) + \sin(\omega t + \beta x) \}$$

$$= V_0 \cos \beta x \sin \omega t$$

$$i(x,t) = \frac{V_0}{2Z_0} \{ \sin(\omega t - \beta x) - \sin(\omega t + \beta x) \}$$

$$= -\frac{V_0}{Z_0} \sin \beta x \cos \omega t$$



## あとがき

一番の時間の浪費は先延ばしにある。

————— ヒルティ

あなたがしなければならないことは、自分で考える、ということだけです。

————— ラムサ

ある人は、自分はだめな人間だと感じてしりごみしてしまう。

一方、ある人は、次々と失敗を繰り返しながら、大きく成長してゆく。

————— ヘンリー・C・リンク

ここにストレスに対処するための二段階の処方がある。

第一ステップ、小さなことにくよくよするな。

第二ステップ、すべては小さなことであるのを忘れるな。

————— アンソニー・ロビンズ

この世に、不屈の精神にまさるものはない。

才能ではない。

才能に恵まれながら、成功できない人はいくらでもいる。

天才でもない。

報われない天才というのは、ほとんど決まり文句になっている。

教育だけでもだめだ。

学歴のあるおちこぼれはそこら中にいる。

不屈の精神と決心だけが全能なのだ。

————— カルビン・クーリッジ

人間は力が不足しているのではなく、強い意志に欠けているのだ。

————— ヴィクトル・ユーゴー

人生はいつも「今から」～一歩一歩登りつづければ頂上に立てる。

————— 三浦 雄一郎 (80歳エベレスト登頂)

為せば成る、為さねば成らぬ何事も、成らぬは人の為さぬなりけり。

————— 米沢藩主 上杉鷹山ようざん

過ぎたことを後悔するな。未来のことで悩むな。

今できることをあきらめないでやってみる。

————— 辻 峰男

新入生諸君おめでとう。長い受験戦争にピリオドを打った御感想はいかがですか？ウサギ型の諸君は、もう講義の心配やクラブの選択で気もそぞろでしょうし、キャンパスが狭くて建物が貧弱なのに少し失望しているでしょう。一方、カメ型の諸君はヤレヤレどっこいしょと腰をおろし、これまで我慢を重ねてきた“本当にやりたかったこと”をどうやって充足しようかと舌なめずりしていることでしょう。バタバタ主義であれ、ユックリズムであれ、自分の個性をよくわきまえて、それに見合った大学生活を設計することは入学第一歩にあたって大切なことです。

社会生活をしている限りストレスをなくすことは出来ません。大学生なら、試験とカリポート、ゼミの発表などが大きなストレスです。このほかにも学友やクラブ活動仲間とのトラブル、失恋、先生との対立など心理的負担は少なくありません。それには、最初に述べた自分の個性、性格を良く見て生活の歩幅を決めると同時に、何事によらず悩みを明日へ持ち越さない習慣をつけることです。人生にはいろいろな苦痛や裏切りなど厭な思いが絶えません。これにいつまでもこだわり続けていけば、全身が怒りと恨みの固まりになってしまいます。過ぎ去ったことにこだわらず、さらりと忘れてしまうのがストレスを減らすコツなのです。

先日、機会があつて直木賞作家の渡邊淳一<sup>わたなべじゅんいち</sup>氏の話をお聞きしました。氏は御承知のように札幌医科大学の整形外科講師から百八十度転換して職業作家を目指した異色の経歴を持つ方です。上京した当初の苦しい新人時代、三十人近い<sup>こころざし</sup>志を同じくする新進気鋭の仲間の人たちと月に一度会合しては励ましあつたり、情報を交換していたそうです。ところが二十年近く経った今、作家として一応名を成した人はその中のほんの一握りの六、七名に過ぎないそうです。氏によると、文学的才能、ひらめきなどとてつもない<sup>かぶと</sup>兜を脱いでいた人たちでも大半は途中で消えていったそうです。脱落した人たちに共通の特徴は、相次ぐ出版社からの原稿の返却や先輩作家の針をふくんだ批評などに耐え切れないようなデリケートな神経の持ち主ばかりだったそうです。これに反して生き残った人たちは、同じ自棄酒を飲んでも、始めは自分の才能のなさを悲観してますが次第にその編集者や先輩作家を「こん畜生め」と毒づき出すそうです。そして翌朝はケロリとして、「なあに、俺の才能を認識できないあいつ等が間違ってるんだ」と結論づける一種のふてぶてしさ、凶々しさに近い自尊心を持った人たちだったようです。

この話には一面の真理がふくまれています。私のまわりを見ても、教授や先輩の叱責に深く傷ついて大学を去っていった人たちが何人かいます。もちろん「すべて、叱った人が悪くて自分が正しいと思え」などとは決して申しません。反省すべき点があればこそ叱責されたのでしょう。

要は、こちらの受け止め方です。反省が自己卑下、悲観、逃避などへ連鎖反応を起こすタイプの人は、今のストレスだらけの社会では大成しません。反省の後に、「何くそっ」という負けじ魂<sup>たましい</sup>が首をもたげてくるような逞しさ、不愉快な部分だけは翌日ケロリと忘れてしまうような凶々しさは、諸君のこれからの学生生活で時には役に立つ心構えだと思います。

何だか、入学早々の諸君に、不逞のすすめを説いているようで気が引けますが、五月病を防ぐ一助にでもなればと念じ、あえて取り上げた次第です。おめでとう新入生諸君。

長崎大学 学園だより (昭和 62 年 4 月 10 日) より

最初から、1行1行納得するまで考えて読み進めて下さい。

また、例題や問題は、実際に自分で鉛筆を持って解いて確かめましょう。

そうすれば、“考えることの楽しさ”を味わえ、実力もつきます。

この講義ノートで著者の40年以上に亘るノウハウを伝授したいのです。特に、これまでの講義の経験から、理解しにくいところや誤りやすいところを丁寧に述べています。しかし、決してレベルを低くしている訳ではありません。これらの点は、他の教科書にはない特徴とっております。この講義ノートを作るために費やした時間は、莫大なものです。この講義ノートは、将来必ず役に立ちます。信じてください。例えば、電子回路、電気電子計測、電気機器、パワーエレクトロニクス、自動制御、電力システム、通信、電磁気学などの分野の基礎として、各種実験の基礎として、大学院入試、就職試験、資格試験、塾や家庭教師で教える物理、実際の仕事、家庭電気の常識として等々です。後で気がついて、別の本を買って読んでも、時間がかかり、苦勞します。一度勉強したテキストは、後で使うとすぐに理解が得られます。どうか、捨てたり、人に譲ったりしないで一生可愛がって下さい。なお、接着力が弱いので完全に開かず途中で紙を折り曲げて下さい。

## 参考文献

- (1) 大野克郎：大学課程 電気回路（1）（オーム社）
- (2) 尾崎弘：大学課程 電気回路（2）（オーム社）
- (3) 大野克郎：現代過渡現象論（オーム社）
- (4) 大木眞二郎：詳解電気回路演習 上，下（共立出版）
- (5) 野中作太郎：電気機器[ I ]（森北出版）
- (6) 山本義隆：新・物理入門（駿台文庫）
- (7) 松原正則：最新電磁気学 電気回路と磁気回路（昭晃堂）
- (8) 辻峰男：電気回路から見た電磁気学, 長崎大学リポジトリ

(1)(2)は、筆者が大学時代に学んだ教科書で、この講義ノートでも多くの箇所参考にして頂いた。現在でも、筆者が最も信頼している教科書です。参考書として購入するなら、この本を薦めます。(3)は過渡現象全般について分布定数回路を含め詳しく述べてある。(4)には多くの例題があるので自分の考え方で解いてみることを勧める。(5)は名著で変圧器も参考になる。(6)は是非読んで欲しい物理の入門書で電磁気も詳しい。高校生（予備校生）のために書かれているが、大学で学ぶ内容も含まれている。(7)は電気回路と電磁気学の関係が詳しい。(8)は pdf ファイルで自由にダウンロードできる。

最後に、貴重なご指摘を頂いた竹中隆教授、中野正基教授、石塚洋一准教授に感謝致します。また、本稿の図面作成、原稿入力にご協力頂いた浦憲一郎氏に深謝します。

# 付録

## ○ 電磁気学と電気回路の関連

### マクスウェルの方程式

#### 微分形

(空間の各点で物質に関係なく、ある時間に成立)

①  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  ①

面積分, ストークスの定理

変位電流: 電波

電流が流れる点は回転する磁界(渦)の発生源となる。

②  $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  ②

磁束密度の時間変化がある点にはそれを打ち消すように誘導電界の渦が生じる。

$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$\mathbf{v}$  で動く点で観測される電界

③  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  ③

体積分, ガウスの定理

正電荷がある点は電束の湧き出し口。

④  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  ④

磁界の湧き出し口(磁荷)は存在しない。

①, ④からビオサバールの法則が導ける。

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{r}}{r^3} dl$$

$\rho$  は自由電荷密度  
例: コンデンサの電荷  
導体中では  $\rho = 0$   
動く電子と対応する陽子の和が0

#### 連続の式

⑤  $\text{div } \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

#### 物質の式

$$\int_S (\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$
  
キルヒホッフの第1法則

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  (永久磁石の様に成立しない物質もある)

$\mathbf{i} = \kappa(\mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_e)$

オームの法則(電地の場合)  
コイル, 動く導体も同様

#### 電荷に働く力

$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$

ローレンツ力

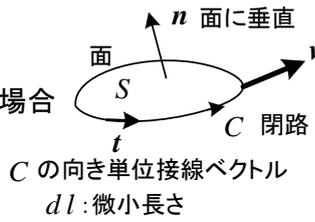
$\mathbf{v}$  で動く点で見ると  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  の電界が加わる。

$\mathbf{F} = l q N \mathbf{v} \times \mathbf{B} = l \mathbf{I} \times \mathbf{B}$

電流(動く電荷)に働く力  
フレミングの左手の法則

ヘルムホルツの定理:  $\text{div } \mathbf{A}$  と  $\text{rot } \mathbf{A}$  が与えられると場  $\mathbf{A}$  は一義的に決る。  
 $\mathbf{A}$  は各源だけがあるとして(他方を0とおき)求めた解の和  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$  になる。

①と②の場合



閉路の一部が速度  $\mathbf{v}$  で動くこともある。

$C$  と  $\mathbf{n}$  は右ねじの関係

①の場合  $\mathbf{v} = 0$  とする。

#### 積分形

(ある面と閉路で成立)

変位電流を無視のとき

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{t} dl = \int_S (\mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} dS (= \sum n_i I_i)$$

アンペアの周回積分の法則

閉路  $C$  に生じる誘導起電力

$$V_e = \int_C \mathbf{E}' \cdot \mathbf{t} dl = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d\phi}{dt}$$
 ファラデーの電磁誘導の法則

$$= -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{t} dl$$

変化する磁束による起電力  
変圧器起電力

速度起電力

動く物体に誘起する起電力

フレミングの右手の法則

$$V_e = l \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ガウスの法則

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dv = Q$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

磁束は連続

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\epsilon}$$

クーロンの法則 ( $\epsilon$  一定空間)

②'  $\mathbf{E}_c$ : クーロン電界(電荷が作る)(保存場)

$$\text{rot } \mathbf{E}_c = 0 \quad \int_C \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl = 0$$

電位差(電圧)  $V_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl$  は道筋によらず一定

電位  $V = -\int_{\infty}^P \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{t} dl$ ,  $\mathbf{E}_c = -\text{grad } V$

起電力は非クーロン電場の線積分である。一方電位差はクーロン電場の線積分である。けれど内部抵抗を無視すれば( $\kappa = \infty$ )起電力と電位差は等しくなる。

$\mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{cR} + \mathbf{E}_{cC} + \mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_{cv}$  : クーロン電界

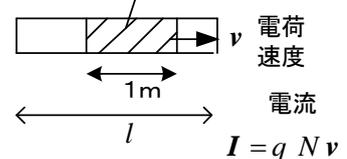
$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_e + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  : 非クーロン電場

$\mathbf{E}_{cR} + \mathbf{E}_{cC} + \mathbf{E}_{cL} + \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_{ce} + \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_{cv} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  等価電界

抵抗 コンデンサ コイル 電池 動く導体  
全電界の閉回路に沿って1周積分すると → キルヒホッフの第2法則

抵抗, コンデンサ, 内部抵抗電圧 = 起電力の和

電荷  $q$  が  $N$  個



電荷速度  $\mathbf{v}$

電流  $\mathbf{I} = q N \mathbf{v}$

→ キルヒホッフの法則 2つの法則が対応

前ページの図は“ごちゃごちゃして分かりにくい”と思うであろう。しかし、世界地図を見て日本が分かるように、電磁気学を勉強するとき羅針盤となろう。

記号  $D$  : 電束密度 [C/m<sup>2</sup>],  $E$  : 電界 [V/m],  $B$  : 磁束密度 [T]  
 $H$  : 磁界 [A/m],  $i$  : 伝導電流密度 [A/m<sup>2</sup>],  $F$  : 力 [N],  $v$  : 速度 [m/s]  
 $\rho$  : 自由電荷密度 [C/m<sup>3</sup>],  $Q$  : 閉曲面内の電荷 [C],  $\epsilon$  : 誘電率 [F/m]  
 $\mu$  : 透磁率 [H/m],  $\kappa$  : 導電率 [S/m]

ベクトルは空間の各点で、大きさだけでなく、向きを持った量である。これに対し、空間の各点で**1つの成分**しかない量は**スカラー**と呼ばれる。

回転(rotation)(うずの発生源)  $\text{rot } A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$  ベクトル

$\text{rot } A$  は、考える点で  $A$  が回転している(うずを作っている)程度を表す。 $\text{rot } A$  は考える点にうずで回る極小の水車を入れたときの最も速く回る軸方向を向き、大きさは回す力のイメージ。電流の周りに磁界  $H$  ができても電流が流れていない点の  $\text{rot } H$  は0である(変位電流無視の時)。

発散(divergence) (水の湧き出し)  $\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  スカラー

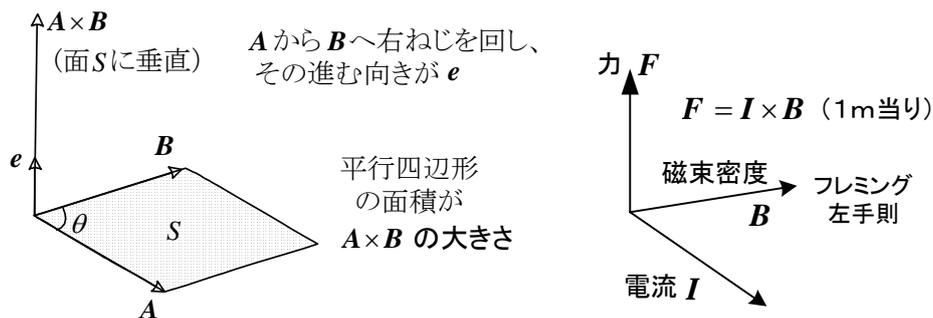
$\text{div } A$  は、考える点で  $A$  が矢として四方八方に飛び出す本数で、入るものは引く。電荷が存在する点でしか値はなく、たとえ電荷があってもその周りの点は0である。

勾配(gradient)  $\text{grad } V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$  ベクトル 考える点でスカラー  $V$  の傾き

内積  $A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = |A||B| \cos \theta$  スカラー  $A$  と  $B$  が同じ向きするとき最大

大きさ(絶対値)  $|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$  スカラー      ベクトル

外積  $A \times B = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) = |A||B| \sin \theta e$



覚え方 ① エッチ ( $H$ ) な頭の回転(rot)は愛( $i$ )をダメ ( $D$ ) にすると ( $t$ )。

② 胃 ( $E$ ) の回転(グルグル)は、ビタミン ( $B$ ) 使って ( $t$ ) マイナスに(減らす)。

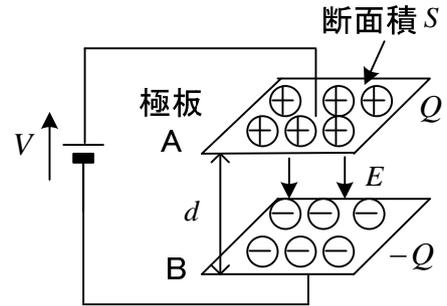
(これは辻が大学生のとき作ったもの)

\* 電磁気学は、高校までの物理と比べて新しい記号が多く、誰でも難しく感じるものである。しかし、よく見ると、偏微分(微分するとき他の変数は固定して考える)と線積分(線の上のお金を集める)、面積分(面の上のお金を集める)、体積分(貯金箱の中のお金を集める)で何とかなる。一様にお金が分布していたら線、面、体積を掛けるだけでよい。高校で習った積分は線(x軸)上のお金(yの値)を集めた線積分である(違いは  $dx$  には正負があるが  $dl$  は常に正)。お金は負にもなる(お金が取られるときでも考えよ)。

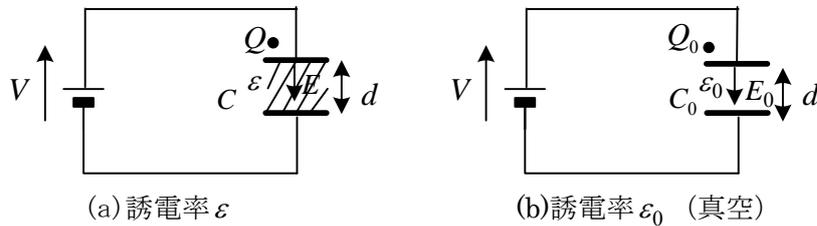
# コンデンサの話

## ○ 静電容量

2枚の金属板 A,B に、電圧  $V$  を印加すると、極板に電荷がたまる。電荷がたまるということは、金属の中にある自由電子が、多くなったり（マイナスに帯電）、少なくなったり（プラスに帯電）することである。これらの電荷によって、コンデンサの中には、**クーロン電界**(電場)が生じる。この向きは、プラスの電荷からマイナスの電荷の向きである。コンデンサの中にできる電界  $E$  は、極板が広いとどこでも同じであり、極板間の電圧  $V$  と  $V = Ed$  の関係がある（この式は、 $E$  がどこでも一定のときしか成り立たない）。コンデンサの容量  $C$  [F] は、極板の面積  $S$  [m<sup>2</sup>]、極板間の距離  $d$  [m]、極板間に挿入する絶縁物の誘電率(permittivity)  $\epsilon$ （イプシロン）で決まり、 $C = \epsilon S / d$  と表せる。真空中の誘電率を  $\epsilon_0$  で表すと、**比誘電率**(relative permittivity)  $\epsilon_r$  は  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$  で定義される。コンデンサの電荷と電圧には、 $Q = CV$  の関係があるから、以上の式より  $Q = CV = \epsilon SE$  従って、電界と電荷の関係は  $E = Q / (\epsilon S)$  であたえられる。



**問** 図の回路で、コンデンサの極板間に誘電率  $\epsilon$  の絶縁体を挿入したとき、真空中に比べて静電容量は何倍になるか。また、極板間の電界の強さは何倍になるか。



(解) 極板の断面積を  $S$ 、極板間の距離を  $d$  とすると、

(a)  $C = \epsilon S / d$     (b)  $C_0 = \epsilon_0 S / d$

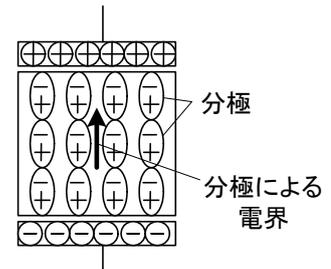
よって、 $C = \epsilon_r C_0$  すなわち、静電容量は、比誘電率  $\epsilon_r$  倍になる。比誘電率は空気では 1.00054、雲母で 7、磁器で 6~10、セラミック（酸化チタン）で 16~100 である。すなわち、雲母を入れると容量  $C$  が 7 倍になる。電荷は、次式のように比誘電率倍になる。

(a)  $Q = CV$     (b)  $Q_0 = C_0 V$

電界の強さは、この場合電圧が一定に保たれているから、次式のように変わらない。

(a)  $E = V / d$     (b)  $E_0 = V / d$

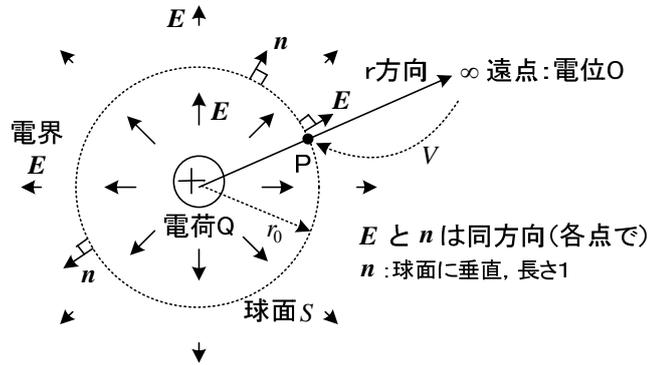
絶縁体を入れると分極をおこし、電界を妨げる。この問題では電圧が一定であるから、同じ電界にするために、極板の電荷が増える。よって、絶縁体を入れると、電荷が多いたまるので、より強力なコンデンサとなるのである。



## ○ 電界、電位、電圧の関係

図の様に導体球面上（ボールみたいな）に一様に分布した電荷  $Q$ （正とする）により、誘電率  $\epsilon$  の物質中に電界ができています。電界は電荷から遠いほど弱くなり、無限遠点では 0 である。半径  $r_0$

の球面  $S$  をとると、電界の大きさは、対称性より球面上ではどこでも同じで、向きは球面に垂直で  $n$  方向と一致すると考えてよからう。 $S$  上の点  $P$  の電界をガウスの法則を使って求めてみよう。ガウスの法則の面積分は単に球の表面積を掛ければよいので、 $E = |\mathbf{E}|$  とおいて



$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S |\mathbf{E}| |\mathbf{n}| \cos 0 dS = \int_S E dS = 4\pi r_0^2 E = \frac{Q}{\epsilon} \quad ①$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0^2} \quad ②$$

となる。もし、 $P$  点に電荷  $q$  があれば、それに働く力  $F$  [N] は (このとき  $Q$  は点電荷とする)

$$F = qE = \frac{qQ}{4\pi\epsilon r_0^2} \quad ③$$

であり、これは**クーロンの法則**(Coulomb's law)と呼ばれる。

次に電圧、電位について考える。

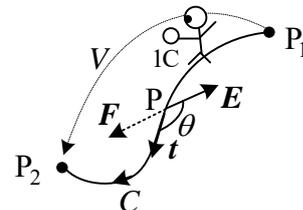
$P_1$  点を基準とした  $P_2$  点の電圧  $V$  は、次式で定義される。

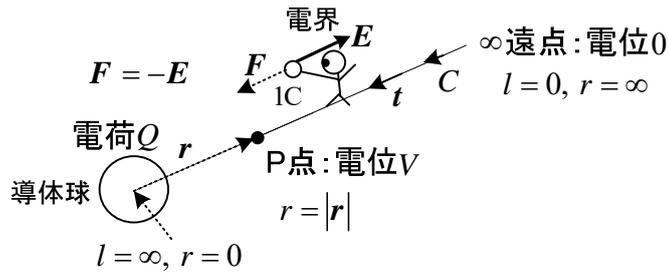
$$V = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} dl = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl \quad ④$$

これは、1クーロンの電荷を  $P_1$  から  $P_2$  点まで運ぶのに必要なエネルギーを表す (このために加える力  $\mathbf{F}$  は、1クーロンの電荷が電界から受ける力の逆方向で  $\mathbf{F} = -1 \times \mathbf{E} = -\mathbf{E}$  となる)。④式は線積分とよばれ、決められた積分路  $C$  について  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$  を集めたものである。 $\mathbf{t}$  は  $C$  の単位接線ベクトルである。 $dl$  は  $P_1$  から  $P_2$  への積分路  $C$  で  $P_1$  からの距離  $l$  の微小長さなので常に正のベクトルである。 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl$  は、電界の  $C$  方向成分に  $dl$  を掛けたもので、

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = |\mathbf{E}| |\mathbf{t}| \cos \theta dl = E \cos \theta dl \quad ⑤$$

となり、 $dl$  間の小さな電圧を意味する。仮に、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}$  が路  $C$  に落ちているお金なら、これを路上で集め、総額いくらになるかを表すのが線積分である。一様にお金が落ちていたら、お金×道のりで総額(線積分)が求まる。一般には、路  $C$  の形が違えば積分値も違ってくる。しかし、電荷が作る電界を考えると、路  $C$  の選び方に関係なく  $P_1$  点と  $P_2$  点だけで積分値が決まる。これは、どんな道を通っても、登った高さだけ位置エネルギーが増えることと似ている。高校で習う積分は  $x$  軸に落ちているお金 ( $y$  の値) を集めた線積分と考えてよい。 $y$  が負ならお金を落としたと考える。ただし、 $dl > 0$  なのに対し、積分範囲のとり方で  $dx$  は正または負と考えられる点は異なる。





次に**電位**を求める。電位とは、 $P_1$ 点を無限遠点としたときの電圧である。 $P_2$ 点をP点にとり、路Cがどんな曲線でも電位は等しいから、これらを結ぶ直線とする。

$$\text{図より, } \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = |\mathbf{E}| |\mathbf{t}| \cos \pi dl = -E dl \quad (6)$$

P点の電位は,

$$V = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = \int_{P_2}^{P_1} E dl \quad (7)$$

$dl$ の代わりに $dr$ を用いると、 $r: \infty \rightarrow r_0$ へ積分することになり、このとき $dr < 0$ と考え、 $dl = -dr$ とおける。故に、無限遠点を基準としたP点の電位Vは、次式となる。

$$V = -\int_{\infty}^{r_0} E dr = -\int_{\infty}^{r_0} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \right]_{\infty}^{r_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0} \quad (8)$$

$E dr$ は、 $dr$ 間の電圧を意味し、これを集める（積分する）ことによって無限遠点を基準としたP点の電位になる。平行板コンデンサのように電界Eがどこでも一定なら単純に長さを掛ければよいが、Eがrによって違うため積分をしないとイケなくなる。

## コイルの話

### ○ でんじゆうどう 電磁誘導の法則 (law of electromagnetic induction)

“電気を発生させてください”と言われたら、“そんなことは自分にはできない”と言う人がほとんどだろう。しかし、実は以外に簡単に電気を作れる。磁石と電線を準備し、電線をぐるぐる巻いてコイルを作り、そのコイルに磁石を素早く近づけるだけでよい。立派にコイルに電気（起電力）が発生する。磁石が作る磁束密度  $\mathbf{B}$ （磁界）の向きは、N極からS極に向かう向きと決められている（永久磁石の中では  $\mathbf{B}$  の磁束線はS極からN極を向き連続である。 $\mathbf{H}$  の磁力線は永久磁石の外は  $\mathbf{B}$  と同方向だが磁石の中では逆を向くので注意）。図1に示すように、磁石を近づけたり遠ざけたりすると、磁界がコイルの中で変化し、誘導起電力を発生する。これは、ファラデーにより発見され、**電磁誘導の法則**と呼ばれる。なお、コイルの中の磁界が変化しないとイケないので、磁石を静止させた状態では誘導起電力を生じない。**誘導起電力** (electromotive force 略 emf)  $e$  [V] は、磁石がコイルを貫く**磁束**  $\phi$  [Wb]（ファイウエーバ）(magnetic flux)の時間変化すなわち微分に比例し、コイルの巻数  $N$  にも比例する。すなわち、

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

で与えられる。この負号には磁束の変化を妨げる向きに起電力が発生するというレンツの法則が込められている。しかしこの式には前提がある。磁束  $\phi$  の矢印(測定の向き, 法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の向き, 磁束の定義参照)に右ねじを進めるとき, 誘導起電力  $e$  の矢印(測定する向き, 正の向き, 正方向ともいう)をねじの回る向きにコイル上にとらないといけない。図1のように開放した端子の場合, 誘導起電力  $e$  は, コイル端子での電圧  $v$  (磁束  $\phi$  の向きに進むねじの回る向きにコイルをなぞり, その出口に矢をとる) と等しくなる ( $e = v$ ) \*。図1では, (a)の場合磁束が増えるので  $d\phi/dt > 0 \therefore e = v < 0$ , (b)の場合磁束が減るので  $d\phi/dt < 0 \therefore e = v > 0$  となる。

\*誘導起電力は変化する磁場が作る電界 (非クーロン電界) の線積分だが, 電圧は電荷が作るクーロン電界の線積分である。図のように端子部分に電荷が生じクーロン電界を作るので電圧が定義できる。電流が流れないとき両電界は打ち消すので  $e = v$  となる。

起電力は等価な電池として図1のように考えよう。  $v'$  の様に  $v$  と逆向きに電圧の矢印を定義すると  $v' = -v$  で  $v' = N d\phi/dt$  となる。等価な電池の負極から正極に向けた向きを 実際の誘導起電力の向き ということがある (実際の起電力は流そうとする電流の向きだが, 都合良く正となる電池の電圧の矢印の向きと一致する)。 実際の のをつけないで単に “起電力の向き” ということもあり, “起電力  $e$  の正の向き” と混同しやすい。前者は等価な電池の負極から正極に向けた向き, 後者は  $e$  の矢印の向きである。(a)の場合  $e$  と反対向きが, (b)の場合  $e$  の向きが実際の起電力の向きである。“起電力  $e$  の矢印” は, 磁束  $\phi$  の矢印 ( $\mathbf{n}$  の向きで自由に選べる) の取り方で決まり, 通常右ねじの関係にとるので, このとき①が成立する。

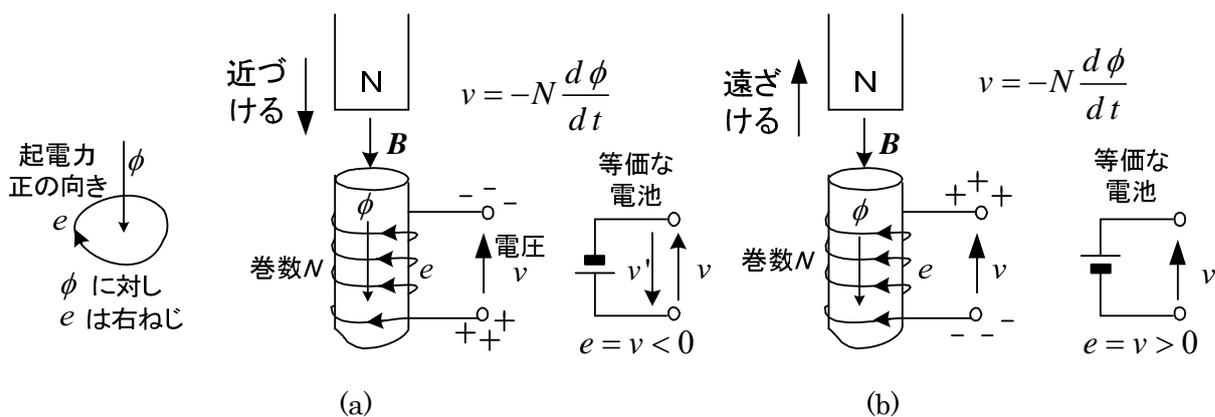


図1 電磁誘導の法則

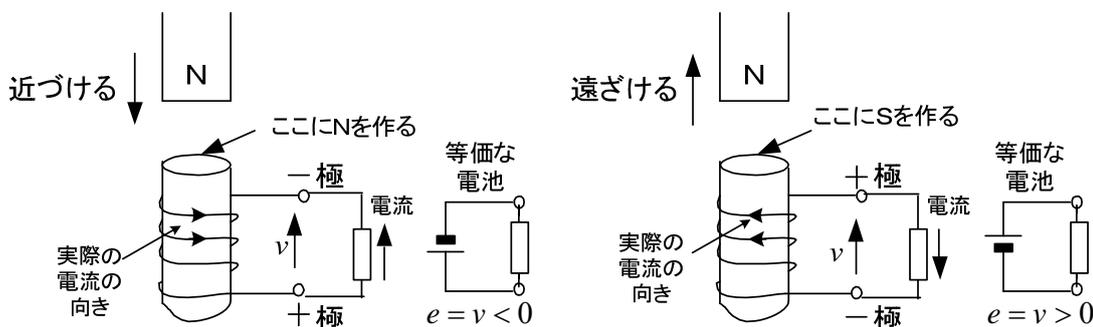


図2 電磁誘導の法則 (誘導電流  $i$ ) (コイルの抵抗無視)

図2に示すように, コイルの端子に抵抗をつなぎ磁石を近づけたり遠ざけたりすると, 電流 (誘導電流) が流れる。誘導電流の向きは, 誘導電流による磁界が, 磁石による磁界の変化を妨げる向きである (レンツの法則)。図1で説明したように電流が流れなくても誘導起電力は生じているが,

その極性をレンツの法則から求めることも可能である（高校ではそう習う）。このとき、コイルを図2に示すように電池に対応させると判りやすい（コイルには、一極から+極に電流が流れていることに注意）。抵抗をつないだ場合にも①式は成り立つが、磁束 $\phi$ としては、磁石が作る磁束の他に、流れる電流による磁束（後述の自己誘導）も加えたものでなくてはならない（大学受験問題では問題が難しくなるのでよく無視されるが、電流が急変するときこの項は大きい）。電流が流れると①式の誘導起電力と図2の端子電圧 $v$ は一般に一致しない。これはコイルに**内部抵抗**があるためである。しかし、コイルの内部抵抗を0とすると非クーロン電界とクーロン電界の和は0なので両者は一致し、 $e=v$ である。結局、コイルの内部抵抗が無視できるなら、どのような場合でも誘導起電力 $e$ は端子電圧 $v$ （矢印の向きに注意）に等しくなる。このため図1や図2の向きに定義された $v$ を起電力と呼ぶこともある。だから図1の $\phi, v$ の矢印とその時の式を覚えておけばよい。

**磁束の定義** 磁束 $\phi$ は、面 $S$ をとり、その面に垂直な法線ベクトル $\mathbf{n}$ を自分で決めて、磁束密度 $\mathbf{B}$ の $\mathbf{n}$ 方向成分 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B \cos \theta$ （内積：スカラー量：お金）を面 $S$ で集めた面積分（総額）

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (2)$$

で定義される。磁束 $\phi$ は $\mathbf{B}$ と違ってスカラーであり、面 $S$ や $\mathbf{n}$ を決めないと決まらない。 $\mathbf{n}$ のとり方（ $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ の2通りある）で符号が違ってくる。ただ面 $S$ や $\mathbf{n}$ を詳しく定義するのは、回路として考えるには煩雑である。そこで、面 $S$ はコイルの断面とし、 $\mathbf{n}$ の矢印の代わりに $\phi$ に矢印を付けて表わす。 $\mathbf{n}$ の向きが $\phi$ の測定の向きである。また図中に $\mathbf{B}$ のベクトルまたは磁束線が書かれていたら、その向き側に法線ベクトル $\mathbf{n}$ が選ばれていると考えよう。 $\mathbf{B}$ の磁束線を描いて、 $\phi$ とだけ書いている本も多い。誘導起電力 $e$ の測定の向きは、 $\mathbf{n}$ の矢印（磁束 $\phi$ の測定の向き）に対して通常右ねじを回す向きを選ぶ。

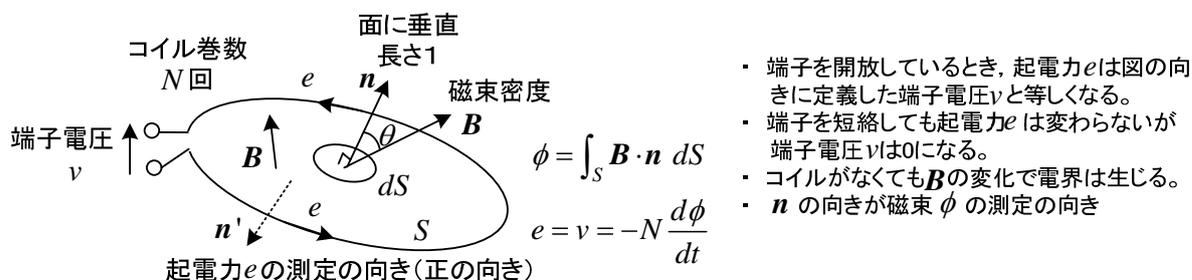


図3  $\mathbf{n}$ の向きを自分で決め、右ねじの回る向きに起電力 $e$ の測定の向きをとる！

## ○ コイルに成り立つ式（自己誘導 self-induction）

鉄心に巻かれたコイル(coil)に電源を接続し、電流 $i$ [A]を流す。この電流により鉄心には磁界ができる。電源電圧を変えて電流を変化させるとコイルの磁束 $\phi$  [Wb]が変化し、電磁誘導の法則によりコイルに誘導起電力が発生する。コイルが作った磁束によって、コイル自身に起電力が発生するので、これは**自己誘導**と呼ばれる。図4の(a), (b)はコイルの巻き方が異なる。コイルでは**自分で決める電流 $i$ の矢印に対し、右ねじの進む向きに $\mathbf{n}$ の矢印（磁束 $\phi$ の測定の向き）を取る。**つまり(a), (b)の各場合、 $\mathbf{n}$ の向きは図のように選ぶ（このとき後述の③式が成立）。起電力 $e$ の測定の向きは $\mathbf{n}$ の矢印と通常右ねじの関係に選ぶので、このとき**電流 $i$ の測定の向きと起電力 $e$ の測定の向きは一致す**

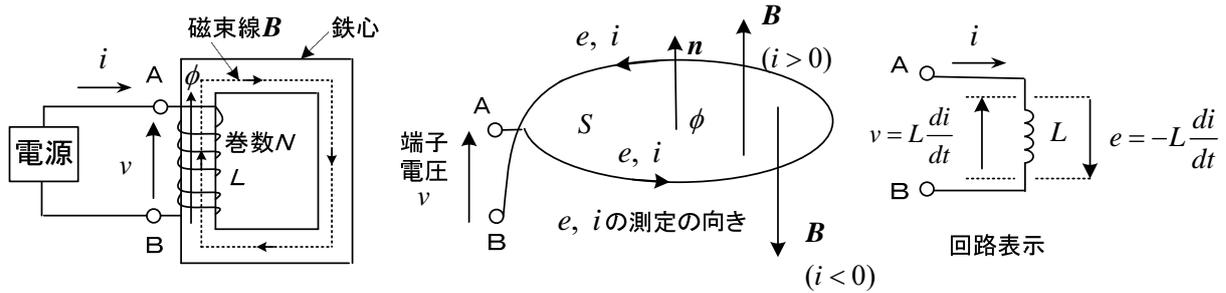
る。図4(a), (b)いずれの場合も電流*i*が磁束 $\phi$ を作るが、 $i > 0$ なら右ねじの法則より  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{n}$  の向きが一致するので  $\phi > 0$  ( $i < 0$ なら  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{n}$  が逆向きだから  $\phi < 0$ ) となることから次式が成り立つ。③は自己インダクタンスの定義式である。

$$N\phi = Li \tag{3}$$

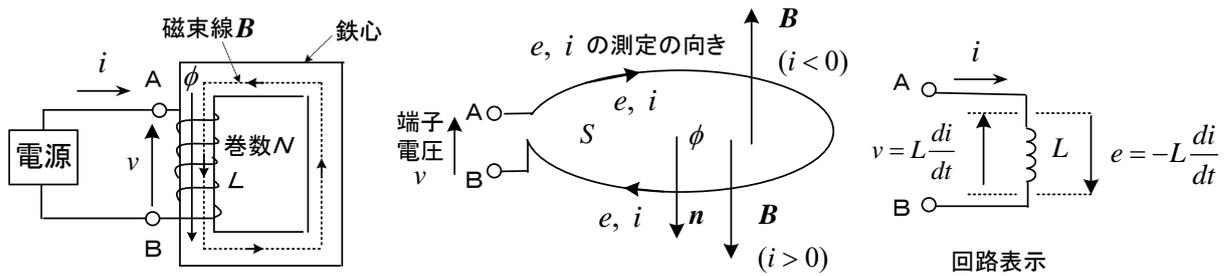
$L$  : 自己インダクタンス(self-inductance)[H] (ヘンリー) (常に正)

$N\phi$  (巻数×磁束) : 鎖交磁束 (linkage flux) ,  $N$  : コイルの巻数 (常に正)

端子電圧  $v$  の測定の向き (矢印) を図4のようにとると (図1,2,3とは逆に選んでいることに注意), (a),(b)いずれの場合でも  $v = -e$  だから①より



(a)コイルの巻き方 I



(b)コイルの巻き方 II

図4 コイルの電流, 磁束, 起電力

$$v = N \frac{d\phi}{dt} \tag{4}$$

となる。これは磁束の測定の向きに右ねじを進めるとき、ねじの回る方向にコイルをなぞり、その最終端に電圧  $v$  の矢印の根をとっていることから判る。③, ④より、

$$v = L \frac{di}{dt} \tag{5}$$

が得られる。この式は、コイルの基本式として大変重要である。注意点として、 $v$  と  $i$  の矢印 (測定の向き) を逆方向にとることを忘れてはいけない。誘導起電力  $e$  は、 $e = -v$  の関係から、

$$e = -L \frac{di}{dt} \tag{6}$$

となる。コイルの巻き方が逆だと磁束  $\phi$  は逆方向になるが、巻き方に関係なく⑤, ⑥式は成立する。

以上の電磁気学に関しては、文献(8)の“電気回路から見た電磁気学”が参考になる。

## 数学公式

○ 三角関数(trigonometric function, trig function)

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

sin		cos	
II	+	+	I
-	-	-	IV
III	-	+	+

$\theta \pm \frac{n\pi}{2}$  の三角関数 :  $\sin(\theta \pm \frac{n\pi}{2})$  や  $\cos(\theta \pm \frac{n\pi}{2})$  は  $\pm \sin \theta$  ,  $\pm \cos \theta$  のどれかになる。

- ・ 関数の決定  $n$  偶数 : そのまま  $n$  奇数 :  $\cos \rightarrow \sin$  ,  $\sin \rightarrow \cos$
- ・ 符号の決定  $\theta$  を第 I 象限の角と考えると処理する。

例えば,  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$  は,  $n=1$  で奇数 だから  $\cos$  になり,  $\theta$  を第 I 象限の角(45度)と考え  $\theta + \frac{\pi}{2}$

が II 象限だから, もとの  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$  は正と考え, よって,  $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$  になる。同様に

$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$  ,  $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos \theta$  ,  $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$  ,  $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$  である。

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta , \quad \cos(-\theta) = \cos \theta , \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} , \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

和から積

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

### 積から和

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}$$

$$\cos \theta + \cos\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 0$$

$$\sin \theta + \sin\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 0$$

$$\cos^2 \theta + \cos^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \cos^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}$$

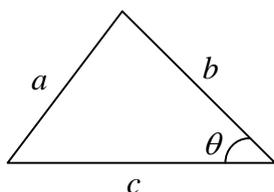
$$\sin^2 \theta + \sin^2\left(\theta - \frac{2}{3}\pi\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2}$$

### 三角関数の合成

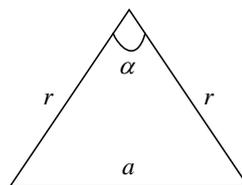
$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

但し,  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a}$  (アークタンジェント)

### 余弦定理



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$



$$a = 2r \sin(\alpha/2)$$

### 微分・積分

$$(\sin t)' = \cos t \quad , \quad (\cos t)' = -\sin t \quad , \quad (\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t} \quad , \quad (e^{at})' = a e^{at}$$

$$(f g)' = f' g + f g' \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2} \quad , \quad \int f g' dx = f g - \int f' g dx$$

$$(\sin at)' = a \cos at \quad , \quad (\cos at)' = -a \sin at$$

$$\int_a^b \frac{d f(t)}{d t} dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

**定数** 円周率  $\pi = 3.141592653589 \dots$

自然対数の底  $e = 2.718281828459045 \dots$  (鯛一発二発一発二発しごととオイシイ)

## 索 引

アークタンジェント	38,40	共振回路の Q	69	実効値	31,34,42
アース	14	共振周波数	63,167	実効値(一般式)	143
アドミタンス	47	共役複素数	39	実部	38
アドミタンス行列	123	極形式	38	時定数	152,153
位相	31,61	虚数単位	38	周期	31
位相遅れ, 位相進み	61	虚部	38	縦続行列	123
位相定数	183	キルヒホッフ第一法則	9,43	周波数	31
位相量	130	キルヒホッフ第二法則	9,43	ジュール熱	7
一次コイル(巻線)	29,89	クラメルの公式	10	出力インピーダンス	130
インダクタ	25	グラウンド	14	受動素子	46
インピーダンス	47	K 行列	123	瞬時値	42,45
インピーダンス行列	123	結合係数	96	瞬時電力	7,33
枝	104	減衰振動	155	純抵抗負荷	53
枝電流	10	減衰定数	183	初期位相	31,61
枝電流法	105	減衰量	130	初期条件	151
エネルギー	6	コイル	25	初期値	20
オイラーの公式	38	コイルエネルギー	26	磁路長	95
オームの法則	3	合成インピーダンス	47,48	進行波	185
遅れ	54	合成抵抗	4,5	振幅	31
開放	12	高調波	137	進み	54
回路網方程式	104	交流	31	スペクトル	137
角周波数	31	交流電圧計	42,52	正弦波	31
重ね合わせの理	111	交流電流計	42,52	整合	115,189
過渡現象	22,150	交流理論	38,42	整合回路	122
過渡項	21,150	コンダクタンス	3,47	静電容量	19
過渡状態	61	コンデンサ	19	正の向き	2
木	104	コンデンサエネルギー	21	絶縁物	19
基準の向き	2	鎖交磁束	25,30	絶対値	38
基準フェーザ	51,61	鎖交磁束不変の理	160	接地	14
起磁力	95	サセプタンス	47	接点	104
基本波	137	三相交流	75	接点電位法	105
基本波力率	143	磁気抵抗	95	接点方程式	108
基本閉路	105	自己インダクタンス	25	Z 行列	123
キャパシタ	19	指数関数形式	38	線間電圧	76
Q	63	磁束	200	線形回路	111
供給電力最大の法則	115	磁束線	25	線電流	83
共振	62	磁束密度	25	相互インダクタンス	30,91

総合力率	143	電流則	9	並列	5,48
相互誘導	29	電流の向き	1	並列共振	62
相順	75	電力	7,64,143	閉路	104
相電圧	76	電力量	7	閉路電流	11
相電流	83	同位相	33	閉路電流法	11,105
相反性の条件	124	等価電圧源定理	111	閉路方程式	107
第3高調波	137	等価電流源定理	112	変圧器	89
対称電源	75	同次方程式	150	変圧器等価回路	94
対称負荷	78	透磁率	95	偏角	38
単位	202	同相	54	変成器	89
単位インパルス関数	169	特殊解	150	巻数比	95
単位ステップ関数	170	特性インピーダンス	183	右ねじの法則	25
短絡	12	特性方程式	150	密結合	89,90
中性点	78	内部インピーダンス	112	無効電力	65
直流電圧源	2	二次コイル(巻線)	29,89	無損失線路	185
直流分	137	二端子対網	123	漏れインダクタンス	95
直列	4,47	入力インピーダンス	130	漏れ磁束	90
直列共振	62	能動素子	46	矢印	2
直交形式	38	ノートの定理	112	有効電力	64
抵抗	1,2	パーシバルの定理	141	誘電体	19
抵抗分	47	反射係数	189	誘導起電力	198
定在波	188	反復インピーダンス	131	誘導性負荷	53
定常項	21,151	反復伝達量	131	誘導リアクタンス	35
定常状態	61	反復パラメータ	131	容量	65
テブナンの定理	111	ひずみ波交流	137	容量性負荷	53
$\Delta$ 結線	82	ひずみ率	143	容量リアクタンス	35
電圧	1	皮相電力	65,143	四端子定数	123
電圧計	14	微分方程式	21,150	ラプラス逆変換	168
電圧源	8	フーリエ級数	137	ラプラス変換	168
電圧則	9	フェーザ形式	38	リアクタンス	47
電位	2, 14	フェーザ図	51,62	リアクタンス分	47
電荷	1,19	フェーザ表示	42	力率	64,143
電荷量不変の理	163	フェーザまとめ	45	力率改善	72
電磁誘導の法則	198	複素数	38	理想変成器	89,92
伝達関数	130	複素電力	65	励磁電流	89,90
伝達量	130	部分分数展開	168	Y行列	123
伝搬定数	183	分圧	4,48	Y結線	76
電流	1	分布定数回路	180	Y- $\Delta$ 変換	127
電流計	14	分流	5,48		
電流源	8	平均電力	7,64		