Bounded Manifold の Relative Cycles の上の Differential Forms について

宮　本　堯　夫

（昭和45年10月31日受理）

Differential Forms on Relative Cycles of Bounded Manifold

Takao MIYAMOTO

(Recived 31. Oct. 1970)

Abstract

The relation between differentiable closed manifold and differential forms on the manifold is well known as the Theory of *De Rham-Kodaira*. As for every differentiable closed manifold, the number of independent differential forms (degree p) and p-th Betti number of the Manifold are equal. This paper investigates the relation between the differentiable manifold with boundary B and differentiable forms on the manifold, by the same methed as in the Theory of De Rham-Kodaira except that the condition "Closed" is removed form the Theory. That is, we take the p-chain whose boundary belongs to boundary B of the given manifold, in stead of representative p-cycle of Homology group of the closed manifold, call it relative cycle (mod B), and consider the periods of differential forms on the relative cycle as an analogue of the periods of differential forms on any cycle of differential closed manifold.

By making use of Duality Theorem of Lefschetz to study the relation between the diffentiable manifold with boundary B and the differential forms, we got following results.

〔**Theorem 1**〕

There exists closed differential p-form (*Carrier* D) *which has appointed the periods on the independent* $\mathbf{B}_{n-p}$ (D) *relative cycles* (*mod* B).

In this case, D means generalized domain from bounded manifold M and $\mathbf{B}_{n-p}$(D) (n-p) th Betti number of bounded domain D.

〔**Theorem** 4〕

When closed p-form Φ^p *of* D (*Carrier* D) *has period O on all relative cycles* (*mod* B) *of* D, Φ^p *is a derived form of* (p-1) *form* Ψ^{p-1} (*carrier* D).

These two theorems are analogues of the relation between the differentiable closed manifold and the closed differential forms on the manifold. In the latter half of this paper, by defining admissible tangential boundary value of differential forms on boundary B, we got some results concerning it. For example, there exist p-form which has appoined boundary value on B and the appointed periods on absolute cycles of B, etc.

序　　論

Riemanian Manifold の上の *differential forms* の理論は，いわゆる *Patential-theory* を抽象化して得られた大域の幾何学の一部門である。1931年に *G. DE RGAM* 〔1〕は *Differeniable Closed Manifold* の上の *differential forms* とその *Manifold* の *Betti numbers* との間に重要な関連が存在することを見出した。即ち，すべての *Differentiable Closed Manifold* について，その上の *p*-次の *differential forms* の中で独立なものの数は，その *Closed Manifold* の *p*-次の *Bstti number* に等しいということである。

これはその後 *HODGE* (1941) 〔2〕*KODAIRA* (1950) 〔4〕等によって，いわゆる *DE RHAM-KODAIRA* の理論として整備され，調和積分との関係を明らかにされた。そして小平氏に *FIELD* 賞 (1954) が与えられたことは衆知のことである。

ところで，この部門が *Potential Theovy* から発した以上，*Boundary-value-problems* に触れないわけにはいかない。既に，古典的には *DIRICHLHT-NEUMAN* の問題として提起され論じられてきたがそれらの成果の中で重要なものは *TUKER* (1941) 〔3〕によって見やすい形に整備されている。ところで *Boundary-value-problem* は *Boundary* を持った *Differentiable Manifold* の上の *differetial fohms* の問題とも関連していると見てよい。このテーマについては1950年代の初期 *Princton* の *SPENCER and TUKER* 〔3〕等によって研究が行なわれたが筆者が知る限りでは *TUKER* 〔3〕と *DUFF* (1952) 〔5〕のそれぞれ一編，計二編の論文の外には公刊された論文を知らない。

1952年 *DUFF* は *Boundary* を持つ *Differentiable Manifold* の上の *differential forms* についての論文〔5〕を書いているが，それはかなり直観的で *Manifold* の特殊の場合の外はその構成の面でかなり厳密性を欠いていると筆者は考える。そこでこの小論の目的は *regular boundary* を持つ *Differentiable Riemanian Manifold* の上の *differential forms* の数とその *Manifold* の大域的な形状との関連について若干の考察を試みることにある。

まず最初に，

DUFF が与えた二種の近傍よりなる近傍系に対し，*DUFF* が第二種の近傍と呼んでる集合が半開集合であり，従って近傍の条件を満たさぬためにこれを擬近傍と呼ぶことにする。更に与えられた *Manifold with regular boundary* をとり，その *Copy* と二つつなぎ合せて *Closed Manifold* にすることによってこれらの擬近傍から合成された *Closed* な *Manifold* の正規な近傍が存在することを示し，新しくつなぎ合わせて出来た *Closed Manifold* のつなぎ目，即ち *Closed Manifold* を構成する前の *Bounded Manifold* の *Boundary* 上において *differentibility* の一部に触れられていない点に着目して筆者なり

に厳密に構成したつもりである。後半では *Admissible Tangential Value* の定義を述べ，そのような *Admissible Tangential Value* を先に与えておき更にその他の条件を若干つけ加えて与えられた *boundary value* を持ち，与えられた条件を満たす p－次の *differential forms* の存在，及びその間での独立な p－*form* の数を考察の対象としたものである。

Manifold with boundary B

〔定義１〕

M を *HAUSDCRFF* 空間とし，n を自然数とする。M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と各 U_α において定義される n 次元 *EUCLID* 空間 R^n への写像 θ_α が与えられるものとし，次の３条件を満たすとき，$\{(U_\alpha, \theta_\beta)\}_{\alpha\in A}$ は M に *Differentiable Manifold* の構造を定義するといい，M を *Differentiable Manifold* と呼び n を M の次元と呼び，$dim\ M=n$ で表わす。

その３条件とは，

(i) $M=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$

(ii) 任意の $\alpha\in A$ について θ_α の像，$\theta_\alpha(U_\alpha)$ は R_n の開集合であり，U_α と $\theta_\alpha(U_\alpha)$ は同位相である。

(iii) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ のとき $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ とおくと写像 $\theta_\alpha\cdot\theta_\beta^{-1}$ は R^n の開集合 $\theta_\beta(U_{\alpha\beta})$ から $\theta_\alpha(U_{\alpha\beta})$ への C^∞ 同型写像であり，逆に $\theta_\beta\cdot\theta_\alpha^{-1}$ は R^n の開集合 $\theta_\beta(U_{\alpha\beta})$ から $\theta_\alpha(U_{\alpha\beta})$ への C^∞ 同型写像である。

以上は一般の *Manifold* (*differentiable*) の定義であるが次に *Boundary* を持った *Manifold* の定義を与えよう。但し，ここでは R^n_+ は $X^n\geqq 0$ を条件としてつけた R^n の部分集合，即ち半空間（n 次元）を意味するものとする。

〔定義２〕

M を *HAUSDORFF* 空間とし，n を自然数とする。M の集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と各 U_α において定義された半空間 R_{n+} への写像 φ_α が与えられ，次の４条件が満たされているとき M を *Boundary* を持った *Differentiable Manifold* と呼び，n を M の次元と呼ぶ。$dimM=n$ と表わす。

(i) $M=\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$

(ii) 任意の $\alpha\in A$ について，$\varphi_\alpha(U_\alpha)$ は R^n_+ の開集合，又は半開集合であって U_α と $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ とは同位相である。

(iii) $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$ のとき，$U_{\alpha\beta}=U_\alpha\cap U_\beta$ とおけば，$\varphi_\alpha\cdot\varphi_\beta^{-1}$ は R^n_+ の集合 $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ から $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ への C_∞ 型同型写像である。逆に $\varphi_\beta\cdot\varphi_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta})$ は $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ から $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ への C^∞ 型同型写像である。

(iv) M の部分集合 B が存在して B 上の点 p については $p\in U_\alpha$ ならば $\varphi_\alpha(p)$ は常に $(n-1)$ 次元 *Euclid* 空間 $X^n=0$（R^n の部分空間）上にあり，この B は〔定義１〕の $(n-1)$ 次元の *Differentiable Manifold* の条件をみたす。
この B を以後 M の *Boundary* と呼ぶことにする。

Coordinate neiborhoods of differentiable Manifold with boundary

M を前節で定義された *n-dimensional Differentiable Manifold with Boundary* とし，B はその *Boundary* とする。M は仮定により各点において R^n_+（$X^n\geqq 0$）なる半空間

と同位相な集合$p \in U_\alpha$ $U_\alpha \cap B = 0$ ならば，この U_α は *Cube* $0 < x^i < 1$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1, n)$ をもって置き換えてもよく同位相である。これは R^n_+ $(x^n \neq 0)$ における p の近傍と考えてよく，このようにして p の近傍 U_α に座標を導入することができる。

次に U_β を B 上の点 p を含む半開集合で M をおおっているものの一つとすれば，当然 $U_\beta \cap B \neq \phi$ この U_β は *Cube* $0 < x^i < 1$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ $0 \leqq x_n < 1$ と表わされる R^n_+ の半開集合で開集合ではないからこれを p の近傍と呼ぶことはできない。従って，ここでは p の擬近傍と便宜上呼んでおく。しかしこのようにして p の擬近傍にも座標を導入することが出来る。ここで点 $q(x^1, x^2 \cdots\cdots x^n)$ が $x^n = 0$ であるということは $q \in B$ を意味することで明らかである。

よって M は前述の集合族，即ち近傍系，擬近傍の族でおおいつくされている。

ここで $p \in B$ であるということは p の座標を $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ としたとき $x^n = 0$ であることを意味し，且つ B 上の点 p の擬近傍の存在は次のようにしていわれる。

p を *Boundary* B 上の点，B は最初の仮定により $(n-1)$ 次元の *Differentiable Closed Manifold* であるから〔定義1〕から $(n-1)$ 次元 *EUCLID* 空間 R^{n-1} の上の近傍と同位相な B における p の近傍 V が存在する。

もちろん $V \subset B$ 且つ M の *Covering* の一つである。半開集合 $\overline{U}_\beta$ が存在し $U_\beta \cap B = \overline{V}$ となる U_β が存在することは明らかであろう。

Bounded Manifold からの Closed Manifold の構成

ここで M の *Copy* に M と逆方向に向きづけした *Bounded Manifold* を考えてそれを M' とする。M の上の点 p に対応する M' の点 p' を考えると，p が M の *Boundary* B 上にあれば，p' も B 上にあり，p と p' は一致することはその作り方から明らかである。即ち，$p \in B$ ならば $p' = p$ が成り立つ。従ってこの *Boundary* 上の点 p をすべて同一視するように M と M' をつなぎ合わせれば，ここに *Closed Manifold* を得る。それを K_0 とすれば K_0 はそのつなぎ目，即ち，M 及び M' の *Boundary* である B 上の点を除いては，*differentiable* になっているが，M 及び M' の *Boundary* 上ではそれはいえない。

ところでこのような場合，一部 *differentiable* でない角ばった *Manifold* であっても，それが *Closed Manifold* である限り，その角ばった *Closed Manifold* と同位相な *Differentiable Closed Manifold* の存在が *A. H. WALLACE* 〔3〕及び *J. MILNOR* 〔9〕によっていわれている。従って今後は角ばった *Closed Manifold* K_0 の代りにそれと同位相な *Differentiable Closed Manifold* K を取って論を進めることとする。ここで混乱をさけるために K_0 の点 p に対応する K の点をやはり p で表わし，K_0 をおおっていた集合族 U_α に対応する K の *Covering System* の表現もやはり，$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を用いることにすると，K は *Differentiable Closed Manifold* となり，小論は *smooth* に進行することになる。ここで $p \in B$ ($K_0 B$ に対応する $(n-1)$ 次 *Manifold*) を取り p の擬近傍 U_β と U_β' について $\bar{U}_\beta \cup \bar{U}_\beta'$ の内点の集合を取れば，これは *Manifold* K の点 p の（正規の）近傍となる。これを U_β' としよう。U_β' は，*Manifold* K の近傍の条件を満たす開集合となる。同じく M の内点の近傍 U_α その *Copy* の近傍 U_α' に対応する K の開集合 U_α 及び U_α' はそのまま，U_α，U_α' として *Differentiable Closed Manifold* K の上の点の近傍として *Differentiable Manifold with Boundary* の上の

differential forms の問題は *Differentiable Closed Manifold* の *Sub-Domain* の上の *differential forms* の問題に帰着させ，*DE RHA-KODAIRA* の *Differentiable Closed Manifold* の上の *differential forms* の *Theorems* を用いての考察が可能になったわけである。

Manifold の上の Differential Forms

Φ^p を M の上の p 次の *differential fonm* とする。ここに $\phi^p_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p}$ は M で定義された階数 p の交代共変テンソルとすれば Φ_p は次のように書かれる。

$$\Phi^p = \sum_{i_1 < i_2 \ll i_p} \phi^p_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} \, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots\cdots \wedge dx^{i_p}$$

Φ^p は M の任意の *p-Chain* C^p で積分可能な *p-form* であり，且つ $\int_{C^p} \Phi^p$ は C^p および C^p を M の *p-Chain* $\Phi^p \Psi^p$ とするとき，

$$\int_{C^p + C^p} \Phi^p = \int_{C^p} \Phi^p + \int_{C^p} \Phi^p$$

$$\int_{C^p} (\Phi^p + \Psi^p) = \int_{C^p} \Phi^p + \int_{C^p} \Psi^p$$

となり，

従って $\int \Phi^p$ は C^p および Φ^p について双一次関数になっているわけである。

又 dx^i $(i=,1\ 2,\cdots\cdots,n)$ は M の上の *Differentials* の作る *Grasmman Algebra* の基底になっており，従って，$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$，$dx^i \wedge dx^i = 0$ となる。

〔**定義 3**〕（*Differential form* の微分）

$$\Phi^p = \sum_{i_1 < i_2 \ll i_p} \phi^p_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_p} \, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots\cdots \wedge dx^{i_p}$$

に対してその *derivative* $d\Phi^p$ とは $(p+1)$ 次の *differential form* で次に書かれる *differential form* を意味する。

$$d\Phi^p = \sum_{i_1 < \ < i_p} (d\phi i_1,\ i_2 \cdots\cdots i_p)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots\cdots \wedge dx^{i_p}$$

ここに

$$d\Phi i_1,\ i_2 \cdots\cdots i_p = \sum_{h=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \phi i_1 \cdots\cdots i_p}{\partial x^h} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{\partial \phi i_1 \cdots\cdots i_{k-1}\ h\ i_{k+1} \cdots\cdots i_p}{\partial x^{ik}} \right\} dx^h$$

で決定される *Paffian form* とする。従って $d\Phi^p$ の係数はやはり $(p+1)$ 次の交代共変テンソルになっている。ところですべての *differential form* Φ^p については，いわゆる *STOKS* の定理が成立する。C^p を M の *p-Chain* 且つ $\partial C^p = Z^{p-1}$ なる $p-1$ *Chain* Z^{p-1} に対して次が成立つ。

$$\int_{C^p} d\Phi^{p-1} = \int_{\partial C^p} \Phi^{p-1} = \int_{Z^{p-1}} \Phi^{p-1}$$

そこで *differential forms* $\{\Phi^p\}$ についての定義を二つあげておく。

〔定義4〕

Differential form Φ^p は $d\Phi^p=0$ のとき *Closed p-form* であると呼ばれる。

〔定義5〕

Differential form Φ^p に対して α^{p-1} なる $(p-1)$ 次元の *differential* $(p-1)$ *form* が存在して $\Phi^p = d\chi^{p-1}$ と表わすことができるとき Φ^p は *derived* と呼ばれる。

この Φ^p については，どのような Φ^p についても $d(d\Phi^p)\equiv 0$ であることは，$d\Phi^p$ の定義から明らかである。従って Φ^p がもし *derived form* であれば Φ^p は *Closed form* である。

STOKS の定理から $\int \Phi^p$ は Φ^p が *Closed form* であるとき Z^p の属する *Homology Class* にのみ *depend* する。

そこで次の定義をおく。

〔定義6〕

Φ^p を *Closed differential form* とし Z^p をこの *Manifold* の上の任意の *Cycle* とするとき，$\int \Phi^p Z^p = \omega$ を Z^p の属する *Homology Class* の上の Φ^p の *period* と呼ぶ。

THEOREMS of G DE RHAM

DE RHAM の定理〔4〕と呼ばれるものの主要なものは次の二つである。

ここに $\mathfrak{M}$ を *Differentiable Closed Manifold* とし，$\mathfrak{M}$ の p 次の *Betti number* を $\mathbf{B}_p(\mathfrak{M})$ で表わすことにする。

〔Theorem of De Rham (1)〕

$\mathfrak{M}$ の上の $\mathbf{B}_p(\mathfrak{M})$ 個のそれぞれ独立な *p-cycles* Z_k^p $(k=1, 2,\cdots\cdots, \mathbf{B}_p(\mathfrak{M}))$ の上の *periods* ω^k 即ち $\int_{Z_k^p} \Phi^p = \omega^k$ が指定されたとき，この条件を満たすような $\mathfrak{M}$ の *closed form* Φ^p (*differential form*) が存在する。

〔Theorem of De Rham (2)〕

$\mathfrak{M}$のすべての *Homology Class* に対して，その上での *period* $\int_{Z^p} \Phi^p$ が常に0で，且つ Φ^p が *Closed form* であるならば，Φ^p は *derived differential form* $(p\leqq n-1)$ である。

この二つの定理はこの小論にとっては，非常に有用である。この場合次 p の *differential forms* はすべて *regular* 即ち，*Hommoginious differential form* であるとする。$(p\leqq n-1)$ 従って，このことから，連続な *Second derivative* の存在は十分満たされたわけである。

さてこの *DE RHAM* の定理の証明であるが，ここでは割愛して先に進むこととする。*DE RHAM* の定理の証明としては *HODGE* 〔5〕の外にわかりやすいものとしては *A.WEIL* 〔9〕の論文等があるから証明はそれらにゆずることにする。

Relative cycles and Duality Theorem of LEFSCHETZ

この節では M を節5節までに考えた *Differentiable Manifold with Boundar* として考える。そこで M の上の *Chain* の中で特に次の二種類の *Chains* について定義してお

くことにする。

〔定義7〕

M の *p-Chain* Z^p がその *Boundary* を取ることによって0となるもの，即ち $\partial Z^p=0$ となる Z^p を *p* 次の *Absolute cycle of M* と呼ぶ。

〔定義8〕

M の *p-Chain* の中でその *Boundary* が *M* の *Boundary B* に属する *Chain* R^p 即ち $\partial R^p \in B$ となる R^p を *B* に関する *Relative cycle* と呼び，R^p は *Relative cyole (mod B)* と書く。

〔定義9〕

によって *M* の *Absolute Cycle* Z^p は $\partial Z^p=0$，0は *B* の要素と考えてもよいから *Absolute Cycles* はすべて *B* に関する *Relative Cycle* と考えることにする。

〔定義10〕

M の *Homology Group* の中で *Absolute Cycle* C^p の属する *Homology Class* の全体〔C_i^p〕($i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{M}^p(M)$) を *p* 次の *M* の *Betti Group* $H^p(M)$ という。同じく *Relative Cycle* R_i^p (*mod B*) の属する *Class* の全体〔R_i^p〕を *p* 次の *M* の *B* に関する *Betti Group* $H^p(M\,B)$ と呼ぶ。

これらの関係については次の *LEFSCHETZ* による *Duality Theorem* がよく知られている。

〔Duality Theorem of LEFSCHTZ〕

M を *Manifold with Boundary B* とするとき，*M* の *p* 次の *Betti Group* $H_p(M)$ と *M* の *B* に関する *Relative Cycles* の *class* からなる $(n-p)$ 次の *Betti Group* $H_{n-p}(M, B)$ とは同型であり，従って両者の *Betti number* は一致する。

この証明も省略する。*D. G. HODG* 〔2〕や *A. WEIL* 〔6〕 *LEFSCHETZ* 〔7〕等の文献による。そこで次に *M* の上の *differential forms* のことを考えよう。

先に第2節の〔定義2〕の条件を満たした *Bounded Manifold* については第4節で示した結果によって *Bounded Differentiable Manifold M* の上での *differential forms* を考えるのではなく既に *DE. RHAM & KODAIRA* が開拓した *Differentiable Closed Manifold K* 上にある *Sub-Domain M* 上の *differential forms* のその *Sub-Domain M* との関係を考察するということになったわけである。

そこでここでは更に一歩進めて *Differentiable Closed Manifold K* の *Sub-Domain M* としてではなく，もっと一般化して *Differentiable Closed Manifold K* の中の *Sub-Domain D* として考えることにする。

Closed Differential Forms of the Bounded Domain D

ここではまず *differential form* Φ^p の *Carrier* の定義から始めよう。

〔定義11〕

Φ^p が *Differentiable Manifold* の *p* 次の *differential form* であるとき，*D* が Φ^p の *Carrier* であるというのは，*D* が $\Phi^p=0$ とならない最小の *Closed point set* であるということである。Φ^p が *D regular form* の即ち，*Homoginious differential form* であると

き Φ^p を *Carrier D* の *diffenential form* と呼ぶ。

そこで *DE RHAM* の *Closed Manifold* における定理に対応する *differential forms* (*Carrier D*) の定理は次の形になる。ここで $\partial D=B$ とおくことにする。

〔**定理 1**〕

D の $\mathbf{B}^p(D, B)$ 個の独立な *Relative p−Cycle* (*Mod B*) の各々について指定された *periods* を持つ *Closed p-form* (*Carrier D*) が存在する。

ここで $\mathbf{B}^p(D, B) = \mathbf{B}^{n-p}(D)$ であることが LEFSCHTZ の Duality Theorem からいわれているからこの定理は次の形にも書くことができる。

即ち,

〔**定理1′**〕

D の $\mathbf{B}^{n-p}(D)$ 個の独立な *Relative p-Cycles* (*Mod B*) のそれぞれに指定された *period* を持つ *Closed p-form* Φ^p (*Carrier D*) が存在する。

但し, ここに *Relative p-Cycle* R^p (*Mod B*) の上の *period* とは $\int_{R^p} \Phi^p$ のことを意味するものとする。

〔**証　明**〕

この定理の証明をするために *Closed Manifold* におけるいわゆる〔DE RHAM の Theorem(1)〕の彼自身にする最初の証明の手順について述べておく。〔1〕

それは *Differentiable Closed Manifold* $\mathfrak{M}$ の *p-Absolute Cycle* 基底 Γ_j^p ($j=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^p(\mathfrak{M})$) に対して次の3条件を満たす *Closed p-forms* ω_i^p ($i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}_p(\mathfrak{M})$) を構成することによってなされた。即ち,

(i)　ω_i^p は $\mathfrak{M}$ において *regular fonm* である。

(ii)　$\int_{\Gamma_j^p} \omega_i^p = \delta_{ij}$ $\{i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^p(\mathfrak{M}), j=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}_p(\mathfrak{M})\}$

(iii)　ω_i^p の *Carrier* は Γ_i^R の $\mathfrak{M}$ における *dual* な基底 $(n-p)$·*Cycle* Γ_i^{n-p}の近傍の内部に含まれている。

その詳細については彼自身による文献〔1〕及び *W. V. D. HODGE* の著書〔2〕を参照されたい。

ところで, この〔定理1〕〔定理1′〕の証明について *LEFSCHETZ* の Duality-Theorem から D の *Retative p-cycles* (*Mod B*) の個数は D の $(n-p)$-*cycles* の個数に等しいところから *Differentiable Closed Manifold* の場合の *DERHAM* の証明と同じく D の $(n-p)$ 次の *Absolute Cycle* の近傍をその *Carrier* とする。D の *closed differential form* Φ^p が存在し, その個数は $\mathbf{B}_{n-p}(D)$ 個, つまり $\mathbf{B}_p(D, B)$ 個であり, 且つ互いに独立であることが得られる。この場合 D の $(n-p)$ 次の *Absolute Cycle* で D-B の中にそっくり含まれるものばかりで D の *Homology Group* 代表元をその中に見出すことができるかという疑点については B が D の *Regular Boundary* であるということから, その可能性が示されるわけである。これでこの〔定理1〕の証明は終わったことになる。この定理の場合 *Differentiable Manifold* であり, 且つ前述の3条件の中 (i) を ω_i^p は $\mathfrak{M}$ 全体ではなく *Carrier* 内において *regular* であると修正しただけで

その *Manifold* が *Closed* であるか，ないかには関係しなかったわけである。

そこで次の定理に移る。

〔**定理 2**〕

Φ^p を *Differentiable Closed Manifold* K の上の *Closed Differential p-form* (*Carrier* D)ですべての *Relative Cycles* R_j^p (*Mod* B) に対して，$\int_{R_j^p} \Phi^p = 0$ とすれば，

$$\int_{Z^{p-1}} \alpha^{p-1} = 0$$

$K-D$ のすべての ($p-1$) 次元 *Absolute Cycles* Z^{p-1} の上で

$$\int_{Z^{p-1}} \alpha^{p-1} = 0$$

となる α^{p-1} が存在して $\Phi^p = d\alpha^{p-1}$ となる。

〔**証　明**〕

まず，このような Φ^p が *Differentiable Closed Manifold* K の K-D 内だけではなく，K のどの点においてもやはり *derived form* である事を示す。K の *Absolute Cycle* Z^p は次のうち何れか１つに該当するからそれぞれの場合について証明を試みる。

(i)　$Z^p \in K$-D の場合

Φ^p の *Carrier* は D よって，Z^p の上では，$\Phi^p = 0$，よって $\int_{Z^p} \Phi^p = 0$

(ii)　*Absolute Cycle of* D が $B = \partial D$ の *cycles* と K の中で *Homologous* な場合，この場合は，

$Z^p \in D$, $Z'^p \in B$, $Z^p \approx Z'^p$ で $\Phi^p = 0$ nB であるから (Φ^p の *Carrier* は D である)

$$\int_{Z^p} \Phi^p = \int_{Z'^p} \Phi^p = 0$$

(iii)　*Absolute Cycles of* D で B の *Cycles* は *Homologous* ではない場合，

$\partial Z^p = 0$，よって，この場合は *Relative Cycles* R^p (*Mod* B) の特殊な場合であるから，仮定により，

$$\int_{Z^p} \Phi^p = 0$$

(iv)　*Absolute Cycle* Z^p が $Z^p = R^p + R'^p$ と書けるとき，但し，ここで R^p は D の *Relative Cycle* (*Mod* B) R'^p は K-D の *Relative Cycle* (*Mod* B) とする。

この場合，

$$\int_{Z^p} \Phi^p = \int_{R^p} \Phi^p + \int_{R'^p} \Phi^p = 0$$

ここに，$\int_{R^p} \Phi^p = 0$ は仮定より，$\int_{R'^p} \Phi^p = 0$ は Φ^p の *Carrier* が D であることから導かれる。

従って，K のすべてのタイプの *Absolute Cycle* Z^p の上で $\int_{Z^p} \Phi^p = 0$ となるから，〔Theorem De Rhem(2)〕からその Φ^p は K の中で *derived* 即ち，$\Phi^p = d\,\alpha_0{}^{p-1}$ となる K の $(p-1)$-*form* $\alpha_0{}^{p-1}$ が存在する。ここで，Φ^p の *Carrier* は D であるから，$(K-D)\cup B$ の上では，$\Phi^p = d\,\alpha_0{}^{p-1} = 0$ となる。即ち，$\Phi^p = d\,\alpha_0{}^{p-1}$ の $\alpha_0{}^{p-1}$ は $(K-D)\cup B$ の上では *Closed* 且つ，$\alpha_0{}^{p-1}$ は，$(p-1)$-次元の $(K-D)\cup B$ の *cycle* の上で *period* を持つ。

そこで，もし，その $(p-1)$ 次元の *cycles* Z_i^p が，$(K-D)\cup B$ の *Bounded cycle* ならば，α_0 が$(K-D)\cup B$ において，*Closed* であることからその *periods* は 0 である。

また，$K-D$ で Z^{p-1} が *bounded* でなくても，K で *bounded* でありさえすれば，B の上の *Absolute Cycle* Z_B^{p-1} で，Z^{p-1} と *Homologue* な p 次元 *Absolute Cycle* Z_B^{p-1} が存在し，$Z_B^{p-1} = \partial R_D^p$ となるものが存在する。ここに $R_D^p \in B$ となる。

よって，仮定より Φ^p の *Carrier* は D であり，$\partial D = B$

$$\int_{Z^{p-1}} \alpha_0{}^{p-1} = \int_{\partial R_p^D} \alpha_0{}^{p-1} = \int_{R_D^p} \alpha_0{}^{p-1} = \int_{R_D^p} \Phi^p = 0$$

要するに，この場合もK の *Absolute Cycle* Z^{p-1} の上の $\alpha_0{}^{p-1}$ の *periad* は 0 となる。

そこで，次に K の *Absolute Cycle* Z^{p-1} が K でも *bounded* にならない場合を考えよう。

〔Theorem of De Rhəm(1)〕から Z_i^{p-1} の上の *periods* $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^{p-1}(K))$ を持つ *differential form* が存在する事が言われているから $(p-1)$ 次元の K の *cycle* の基底を Z_i^{p-1} $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^{p-1}(K))$ としたとき，$\int_{Z_i^{p-1}} \alpha_0{}^{p-1} = \alpha i$ とおくことにする。

また，K の上の *Closed differential forms* の基底（$(p-1)$ *degree*）であって ω_j^{p-1} $\int_{Z_i^{p-1}} \omega^{p-1} = \delta_{ij}$ となる ω_j^{p-1} $(j=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^{p-1}(K))$ をとる。このような基底の存在は，*De Rhəm* が，〔Theorem of De Rhəm(1)〕を導くときに，既に明らかにしてある。また，ω_j^{p-1} は言うまでもなく *regular closed form* で独立である。

そこで各々について，

$$\alpha^{p-1} = \alpha_0{}^{p-1} - \sum \alpha^j\,\omega_j^{p-1},\quad \Phi^p = d\,\alpha^{p-1}$$

とおけば，Φ^p は K-D において，

$$d\,\Phi^p = d\alpha^{p-1} = d\alpha_0{}^{p-1} - \sum \alpha_j\ \ d\ \omega_j^{p-1} = d\,\alpha_0{}^{p-1}$$

且つ，Z_i^{p-1} $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}^p(K))$ を K の $(p-1)$ 次の *cycle* の基底とすれば，

$$\int_{Z_i^{p-1}} \alpha^{p-1} = \int_{Z_i^{p-1}} \alpha_0{}^{p-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \alpha^j \int_{Z_i^{p-1}} \omega_j^{p-1} = \int_{Z_i^{p-1}} \alpha_0{}^{p-1} - \alpha_i = 0$$

ここに，Z_i^{p-1} は K の $(p-1)$ 次 *cycles* の基底であるから，K の *bounded* でないすべての *Absolute cycle* について $\int_{Z^{p-1}} \alpha^{p-1} = 0$ となり，勿論，Z^{p-1} を $K-D$ の中に

極限しても，$\int_{Z^{p-1}} \alpha^{p-1} = 0$ となる。また，*K-D* においては，$\Phi^p = d\,\alpha^{p-1}$ も成立するから，よってこの定理が証明されたわけである。

〔**定理3**〕

N を $B\times I$ で定義される *Domain* とする。
N の *Relative Cycle* (*Mod* B_0+B_1) の上の *period* が，常に0となるような *Closed p−form* Φ^p (*Carrier N*) はある $(p-1)$-*form* ψ^{p-1} (*Carrier N*) の *derived form* である。即ち，$\Phi^p = d\,\psi^{p-1}$ となる ψ^{p-1} (*Carrier N*) が存在する。但し，ここで B_0+B_1 は N の *Bourdary* とする。

〔**証　明**〕

x^n ($0\leqq x^n \leqq 1$) は区間 I の座標と考えることができる。*Differential p-form* Φ^p の *Carrier* が $B\times I$ と言うのであるから，この両端は閉じている。ここで x^n を固定して定数と考えると，$B\times I$ の内部に B と同位相な $(n-1)$ 次元 *Closed Manifold* が見出される。それを $B(x^n)$ と定義する。従って，$B(0)=B$ となる。
$B(0)=B=B_0$, $B(1)=B_1$ と書くことにする。そこで，Φ^p を考えると，

(i) $d\,\Phi^p = 0$ *inK*

(ii) $\int_{R^p} \Phi^p = 0$ $R^p \in H^p(N, B_0+B_1)$

(iii) $\Phi^p = 0$ *K-N*

が仮定から与えられている。よって，前述の〔定理2〕より

$\Phi^p = d\,\alpha_0{}^{p-1}$ *in K-N*

$\int_{Z^{p-1}} \alpha^{p-1} = 0$ $Z^{p-1} \in H_{p-1}(B(x^n))$

以後 $x^n =$ 定数と考え上の条件を満たす Φ^p を考える。Φ^p から $d\,x^n$ という *component* を分離して，

$\Phi^p = \Phi_0{}^p[x^n] + \Phi_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n$

とおけば，この $\Phi_0{}^p[x^n]$, $\Phi_1{}^p[x^n]$ は dx^n を *component factor* として含んでいない *differetial form* であり，*regular* ではない。

$\Phi_0{}^p[x^n] = \Phi^p - \Phi_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n = d\,\alpha^{p-1} - \Phi_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n$ $B(x^n)$ では，$dx^n = 0$ であるから，

$\Phi_0{}^p = d\,\alpha^{p-1}$, よって，

$$\int_{Z^p} \Phi_0{}^p = \int_{\partial Z^p} \alpha^{p-1} = 0 \qquad Z^p \in H_p(B(x^n))$$

$B(x^n)$ は $(n-1)$ 次元 *Differentiable Closed Manifold* であるから，$B(x^n)$ においては，〔Theorem De Rham(2)〕から，

$\Phi_0{}^p[x^n] = dx^n\,\gamma_0{}^{p-1}[x^n] + \Phi_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n = dx^n\,\gamma_0{}^{p-1}[x^n]$

となる $B(x^n)$ の $(p-1)$-*form* $\gamma_0{}^{p-1}$ が存在する。ここに dx^n は *Closed Manifold* $B[x^n]$ の上での *differential form* としての *differential operator* とする。
そこで，*p-form* $\gamma_0{}^{p-1}$ に n 次の *differential operator* d を 作用させて，

$d\,\gamma_0{}^{p-1}[x^n] = dx^n\,\gamma_0{}^{p-1}[x^n] + \gamma_1{}^{p-1} \wedge dx^n = \Phi_0{}^p[x] + \gamma_1{}^{p-1}[x^n] \wedge dx^n$
とおく。ここで，$\gamma_0{}^{p-1}[x^n]$ は *paramater* としての x^n に *depend* し，且つ，x^n について連続微分可能な関数となる。

また，$\Phi_0{}^p[x^n]$ はその定義から $0<x^n<1$ 以外の x^n の値については 0 である。そこで，$\gamma_0{}^{p-1}[x^n]$ は，$0<x^n<1$ 以外の x^n の値については 0 であるような関数と言うことは，x^n について連続微分可能ということから明らかである。

従って，$\gamma_0{}^{p-1}[x^n]$ は $0<x^n<1$ 以外の x^n に対しては 0 である。そこで，$\gamma_1{}^{p-1}$ は $0<x^n<1$ では，0 の値を取るような連続微分可能な $(p-1)$-*form* とならざるを得ない。

ところで，$B(x^n)$ においては $dx^n=0$，よって，

$d\,(\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1}[x^n]) = \Phi^p - \Phi_0{}^p[x^n] - \Phi_1{}^{p-1}[x^n] \wedge dx^n = 0$

従って，

$\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1}[x^n]$ は $B(x^n)$ という $(n-1)$ 次元 *Differentiable Closed Manifold* の上で *Closed* $(p-1)$-*form* になる。

更に，$B(x^n)$ は $(n-1)$ 次元 *Differentiable Closed Manifold* であるから，

$B(x^n)$ における $(p-1)$-*cycles* の基底を Z_k^{p-1} $(k=1, 2,\cdots\cdots, \mathbf{B}_{p-1}(B(x^n)))$ とすれば，

$$\int_{Z_i^{p-1}} (\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1}[x^n]) = \nu^i(x^n)$$

なる値 $\nu^i(x^n)$ を持つ。

この *period* $\nu^i(x^n)$ は x^n について，すべての i $(i=1, 2,\cdots\cdots, \mathbf{B}_{p-1}(B(x^n)))$ について連続微分可能になる。且つ，$0<x^n<1$ 以外の x^n については，$\nu^i(x^n) = 0$ は明らかである。そこで，ω_i^{p-1} $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}_p(B))$ 個の独立な *differential* $(p-1)$-*form* で，$Z_j^{p-1} \in H_{p-1}(B(x^n))$ の基底 Z_j^{p-1} を取るとき，

$$\int_{Z_j^{p-1}} \omega_i^{p-1} = \delta_{ij}$$

となるような $(p-1)$-*form* の基底とすれば，その存在は，〔Theorem of De Rhəm(1)〕の証明の途中で既に導かれている。〔1〕

そこで，$B(x^n)$ の *closed* $(p-1)$-*form* として，$\rho_0{}^{p-1}[x^n] = \nu^i(x^n)\,\omega^{p-1i}$ とおけば，$\rho_0{}^{p-1}$ は x^n に *depend* 且つ，$0<x^n<1$ の時以外は，$\rho_0{}^{p-1}(x^n)=0$ となる $B(x^n)$ 上の $(p-1)$-*form* として定義される。$\rho^{p-1}(x^n)$ は $B(x^n)$ においては，*Closed form* であり，従って，$d\,\rho_0{}^{p-1}(x^n) = \rho_1{}^{p-1}[x^n] \wedge dx^n$ と書くことができる。ここで，$(\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1} - \rho_0{}^{p-1})$ を考えると，

$d(\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1} - \rho_0{}^{p-1}) = \{(\Phi^p - \Phi^p[x^n]) - (\gamma_1{}^{p-1}[x^n] + \rho_1{}^{p-1}[x]) \wedge dx^n\}$

ここで，$\Phi^p = \Phi_0{}^p[x^n] + \Phi_1{}^{p-1}[x^n] \wedge dx^n$ を代入して，

$d(\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1} - \rho_0{}^{p-1}) = (\Phi_1{}^{p-1}[x^n] - \gamma_1{}^{p-1}[x^n] - \rho_1{}^{p-1}[x^n]) \wedge dx^n$

この左辺は，K において *derived form* 従って，右辺は *closed form*

よって，

$d[(\Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}) \wedge dx^n] = 0$ から $d(\Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}) \wedge dx^n = 0$

よって，

$\psi^{p-1}[x^n] = \Phi_1{}^{p-1}[x^n] - \gamma_1{}^{p-1}[x^n] - \rho_1{}^{p-1}[x^n]$

とおけば,

$d\ \psi^{p-1}[x^n] \wedge dx^n = 0$,

ところで, $d\ \psi^{p-1}$ を分解すれば,

$d\ \psi^{p-1}[x^n] = dx^n\ \psi^{p-1}[x^n] \wedge dx^n$

従って,

$(dx^n\ \psi^{p-1}[x^n] + \psi_1{}^{p-1}[x^n] \wedge dx^n) \wedge dx^n = 0$

即ち, $dx^n\ \psi^{p-1}[x^n] \wedge dx^n = 0$

よって, $dx^n\ \psi^p = 0$

即ち, $\psi^{p-1} = \Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}$ は $B(x^n)$ において, *closed form* $x^n = 0$ のときも, $dx^n\ \psi^p = 0$, よって, B において, *closed form* となる。

次に, $\psi^{p-1} = \Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}$ は, $B(x^n)$ において, すべての *Absolute Cycles* の上で *periods* 0 を持つ事を示そう。Z_{x^n} を $B(x^n)$ における $(p-1)$ 次の *cycle* とするとき, $C^p_{x^n}$ を $Z^{p-1}_{x^n} \times [0\ \ x^n]$ と同位相な K の *p-Chain* とすると,

この $C^p_{x^n}$ は $\partial C^p{}_{x^n} = Z_0{}^{p-1} - Z^{p-1}{}_{x^n}$ であり, 且つ,

$$I(x^n) = \int_{C^p_{x^n}} d(\alpha^{p-1}[x^n] - \gamma_0{}^{p-1}[x^n] - \rho_0{}^{p-1}[x^n])$$

を考える。

$d(\alpha^{p-1} - \gamma_0{}^{p-1} - \rho_0{}^{p-1}) = (\Phi_1 - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}) \wedge dx^n$

であるから, B_0 および $B(x^n)$ では

$(\alpha^{p-1}[x^n] - \gamma_0{}^{p-1}[x^n] - \rho_0{}^{p-1}[x^n])$

は B_0 および $B(x^n)$ で は *closed form* となる。

$\partial C^p_{x^n} = Z_0{}^{p-1} - Z^{p-1}_{x^n}$ $(0 \leqq x^n \leqq 1)$ である事から

$Z^{p-1}_{x^n} \in H_{p-1}(B(x^n))$

$$I(x^n) = \int_{\partial C^p_{x^n}} \{(\Phi_1{}^{p-1}[x^n] - \gamma_1{}^{p-1}[x^n] - \rho_1{}^{p-1}[x^u]) \wedge dx^n\}$$

$$= \int_{Z_0{}^{p-1}} d(\alpha_0{}^{p-1}[0] - \gamma_0{}^{p-1}[0] - \rho_0{}^{p-1}[0])$$

$$- \int_{Z^{p-1}_{x^n}} d(\alpha_0{}^{p-1}[x^n] - \gamma_0{}^{p-1}[x^n] - \rho_0{}^{p-1}[x^n]) = 0$$

従って,

$$I(x^n) = \int_{C^p_{x^n}} (\Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}) \wedge dx^n$$

$$= (-1)^{p-1} \int_0^{x^n} dx \int_{Z^{p-1}_x} (\Phi_1{}^{p-1} - \gamma_1{}^{p-1} - \rho_1{}^{p-1}) = (-1)^{p-1} \int_0^{x^n} f(x)dx$$

そこで, $0 < x \leqq x^n < 1$ ならば,

$f(x)=\int_{Z_x^{p-1}}(\Phi_1{}^{p-1}-\gamma_1{}^{p-1}-\rho^{p-1})=0$ となる。

従って，$\Phi_1-\gamma_1-\rho_1$ は $B(x^u)$の上で *period* 0 を持つ。

よって，

$\Phi_1[x^n]-\gamma_1[x^n]-\rho_1[x^n]=dx^n X^{n-2}[x^n]$

と書くことができる。且つ，$X^{n-2}(x^n)$ は

$0<x^n<1$ 以外ならば，

$X^{p-2}(x^n)=0$ となり，

x^n に関する連続な導関数を持つ事が示される。

そこで，$d[X^{p-2}(x^n)\wedge dx^n]=dBX^{p-2}(x^n)\wedge dx^n$

$=(\Phi_1-\gamma_1-\rho_1)\wedge dx^n$ から，

$d(\alpha_0{}^{p-1}-\gamma_0{}^{p-1}-\rho_0{}^{p-1})=(\Phi_1-\gamma_1-\rho_1)\wedge dx^n$ 即ち，

$d[X^{p-2}(x^n)\wedge dx^n]=(\Phi_1-\gamma_1-\rho_1)\wedge dx^n$

$=d(\alpha_0{}^{p-1}-\gamma_0{}^{p-1}-\rho_0{}^{p-1})=(\Phi_1{}^p-\gamma_1{}^p-\rho_1{}^p)\wedge dx^n$

よって，

$d[X^{p-2}(x^n)\wedge dx^n]=d(\alpha_0{}^{p-1}-\gamma_0{}^{p-1}-\rho_0{}^{p-1})$

において，

$d\,\alpha^{p-1}=\Phi^p\,\Phi^p=d\,\alpha_0$

$\Phi^p=\Phi_0{}^p[x^n]+\Phi_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n$

$d\gamma_0{}^{p-1}[x^n]=\Phi_0{}^p[x^n]+\gamma_1{}^{p-1}\wedge dx^n$

および

$d\,\rho_0{}^{p-1}[x^n]=\rho_1{}^{p-1}[x^n]\wedge dx^n$ を代入して，

$\Phi^p=d\,\gamma_0{}^{p-1}+d\,\rho_0{}^{p-1}+d\,[X^{p-2}(x^n)\wedge dx^n]$

$=d\{\gamma_0{}^{p-1}+\rho_0{}^{p-1}+X^{p-1}(x^n)\wedge dx^n\}$

となり，Φ^p は *derived p-form* であることが証明された。

ここに，$\gamma_0{}^{p-1}[x^n]$，$\rho_0{}^{p-1}[x^n]$，$X^{p-2}[x^n]$ は $0<x^n<1$ の場合を除き，

$\gamma_0{}^{p-1}[x^u]=\rho_0{}^{p-1}[x^n]=X^{p-2}[x^n]=0$ は仮定されており，且つ，*parameter* としての x^n は $0\leqq x^n\leqq 1$ の間を動くので Φ^p の *Carrier* が N 即ち，$B\times I$ である事は明らかである。よって，この〔定理3〕は証明された。

〔**定理4**〕

Differential Closed p-form Φ^p (*Carrier D*) が D におけるすべての *Relative Cycle* (*Mod B*) の上の *periods* が常に 0 であれば，その *p-form* は $(p-1)$-*form* ψ^{p-1} (*Carrier D*) の *derived form* として表わされる。

〔**証　明**〕

Φ^p を与えられた条件を満たす *differential p-form* とする。$N=B\times I$ を〔定理3〕と同様に定義すると〔定理2〕より $\Phi^p=d\,\alpha^{p-1}$ となるような α^{p-1} が存在する。そこで $(p-1)$-*form* β^{p-1} で $\beta^{p-1}=\alpha^{p-1}$ *in* $(D-N)$ 且つ，$\beta^{p-1}=0$ *in* $K-D$ となる β^{p-1} を考える。そのような β^{p-1} は必らず存在する。秋月氏の著書〔10〕を参照されたい。また，この β^{p-1} は K における *reguler differential form* である。そこで，次の *differential form* $\Phi_1{}^p$ を考える。即ち，$\Phi_1{}^p=\alpha\,(\alpha^{p-1}-\beta^{p-1})$ この $\Phi_1{}^p$ の *Carrier* は，

定義によって N になる。ここでこのようにして定義された Φ_1 が N における *Relative Cycles* (*Mod* B_0+B_1) の上の *beriod* がすべて 0 である事を示そう。

R_N^p を N の B_0+B_1 に関する *relative cycles* とすると，$\partial R_N^p = Z_0{}^{p-1}+Z_1{}^{p-1}$ と書くと，$Z_0{}^{p-1}$ および $Z_1{}^{p-1}$ は B_0 または B_1 の *cycle* になる。且つ，これらの *cycles* $Z_0{}^{p-1}$ と $Z_1{}^{p-1}$ は *Homologue* な関係にあることは明らかである。よって，それを用いて，R_N^p (*relative cycle*) で

$$\int_{R_N^p} \Phi_1{}^p = \int_{R_N^p} d\,(\alpha^{p-1}-\beta^{p-1}) = \int_{\partial R_N^p} (\alpha^{p-1}-\beta^{p-1})$$

$$= \left\{ \int_{Z_0{}^{p-1}} \alpha^{p-1} - \int_{Z_0{}^{p-1}} \beta^{p-1} \right\} - \left\{ \int_{Z_0{}^{p-1}} \alpha^{p-1} - \int_{Z_1{}^{p-1}} \beta^{p-1} \right\} = 0$$

が得られる。即ち，Φ_1 の N における *Relative Cycles* の上の *period* は常に 0 である。
よって，〔定理 3〕によって，この $\Phi_1{}^p$ に対して，$\Phi_1{}^p = d\,\psi_1{}^{p-1}$ となる
$(p-1)$-*form* ψ^{p-1} (*Carrier D*) が存在する。
そこで，$\Phi_1{}^p = d\,(\alpha^p - \beta^{p-1})$ また，$\Phi^p = d\,\alpha^p$ から，

$$\Phi^p = d\,\alpha^{p-1} = \Phi_1 + d\,\beta^{p-1} = d\,(\psi_1{}^{p-1}-\beta^{p-1})$$

$\psi_1{}^{p-1}$ の *Carrier* は D であるから，$\psi_1{}^{p-1}-\beta^{p-1}$ の *Carrier* も D よって，
Φ^p は *differential* $(p-1)$-*form* $\psi_1{}^{p-1}+\beta^{p-1}$ (*Carrier D*) の *derivative* となり，
この定理は証明された。

この定理は，先に挙げた *Differentiable Closed Manifold* に関する〔Theorem of De Rhəm(2)〕に対応するものである。

〔**定理 5**〕

D_1 を *Boundary B* を含む K の *Sub-Domain* とする。ψ^p を D_1 で定義された *Closed differential p-form* で K の中で *bounded* な D_1 の $p-$*cycle* の上で *periods* 0 を持つものとする。その時，この ψ^p は K における *Closed differential p-form* に拡張することが可能である。

〔**証　明**〕

$\psi_1{}^p$ を ψ^p の K への任意の *extension* とする。この場合その存在は明らかであるが，それが K で *Closed form* であるという事は仮定出来ない。よって $d\,\psi_1{}^p$ は *Closed* $(p+1)$ *form* (*Carrier* $K-D_1$)
そこで，R^{p+1} を $K-D_1$ の $(p+1)$ 次の *Relative Cycle* (*Mod B*) とすると，

$$\int_{R^{p+1}} d\,\psi^{p-1} = \int_{\partial R^{p+1}} \psi_1{}^p = \int_{Z^p} \psi^p = 0$$

ここに，$\partial R^{p+1} = Z^p$ は仮定にある K で *bounded* な *cycle of B in Di* である。従って，$d\,\psi_1{}^p$ は〔定理 4〕の条件を $K-D_1$ をその *Carrier* としてみたす。故に *p-form* λ^p (*Carrier* $K-D_1$) が存在し，

$d\,\psi_1{}^p = d\,\lambda^p$ よって，$\bar{\psi}=\psi_1-\lambda$ とおけば，$\bar{\psi}$ は K への ψ^p の拡張であり，K において *Closed form* である。
よって，ψ が K で *Bounded* である D_1 の *Cycle* の上の ψ の *periods* が 0 であるという条件は，ψ を D_1 から K まで *extend* するのに必要十分な条件であり，それが満た

されたわけである。

Tangential component of differentia forms on the bounded manifold

M を第2節の〔定義2〕で与えられた *Differen tiable Manifold with Boundary* とし，B をその M の *Boundary* とする。ここで，M の上の *differential forms* Φ^p

$$\Phi^p = \sum_{j_1<j_2<\cdots\cdots<j_p} \phi^p_{j_1 j_2 \cdots\cdots j_p} dxj_1 \wedge dxj_2 \wedge \cdots\cdots \wedge dxj_p \quad (1 \leqq j_k \leqq n) \text{ の}$$

Tangential component form を定義しよう。

〔定義12〕

Φ^p を上で与えられた M の上の *differential p-form* とするとき，その *Tangential compcnent form* $t\ \Phi^p = \Phi^p_B$ を次で定義する。即ち，

$$\Phi^p_B = t\ \Phi = \sum_{j_1<j_2<\cdots\cdots<j_p} \phi j_1 j_2 \cdots\cdots j_p \ dxj_1 \wedge dxj_2 \wedge \cdots\cdots \wedge dxj_p \ (1 \leqq j_k \leqq n-1) \text{ こ}$$

れを簡単に Φ^p の *Tangential form* または，*Boundary value of* Φ^p と呼ぶ。

ここで，Φ^p の p が $p=n$ であれば，$t\ \Phi^p = 0$ は当然である。そこで，Φ^p の *Normal component-from* Φ^p_n として，$\Phi^p_n = n\Phi^p = \Phi^p - t\ \Phi^p = \psi^{p-1} \wedge dx^n$ と定義しよう。

〔定義13〕

Φ^p が M の *differential p-from* であるとき，その *Norml compcnent form* $n\ \Phi^p$ を $n\ \Phi^p = \Phi^p - t\ \Phi^p = \psi^{p-1} \wedge dx^n$ となる *p-form* の事であると定義する。

d_B を *differential operator in* $(n-1)$ 次元 *Differentiable Closed Manifold* B (M の *Boundary*) とすれば，すべての Φ^p に対して

$d_B\ t\ \Phi^p = t d_B\ \Phi^p$ が成立，Φ^p に *operate* する作用素 t および d_B は M の *Boundary* B によってのみ決定され，他の要因とは無関係である。

ここで，特に，$t\ \Phi^p = 0$ なる Φ^p を *differential p-form* (*Null B*) と呼ぶ。そこで，$d\ \Phi^p = \xi^{p+1}$ (*Null B*) 即ち，$td\ \Phi^p = 0$ は $d\Phi^p = \xi^{p+1}$ より強い条件となり，これは，*Absolute Cycle* Z^p ($\partial Z^p = 0$) の方が *Relative Cycle* R^p (*Mod B*) 即ち，($\partial R^p \in B$) よりも強い条件になっている事と *dual* な関係になっている。そこで次の定義を与えよう。

〔定義14〕

M を *Differentiable Manifold with Boundary* とする。この時，α^p が *Admissible Tangential Boudnary valne of closed differential form* (*in M*) であるという事は，次の2条件を満たした場合をいう。

即ち，

(i) α^p が B で *Closed form* であること，即ち，$d^B \alpha^p = 0$

(ii) α^p が M で *Bounded* な B のすべての *p-cycles* の上で常に *period* 0 を持つ。

M で *Closed* な *differential p-form* Φ^p が M で *bounded* な B のすべての *cycle* で 0 になる *periods* を持つのは明らかである。何となれば，

$$\int_{Z^p} \Phi^p = \int_{\partial C^{p+1}} \Phi^p = \int_{C^{p+1}} d\ \Phi^p = 0 \qquad Z_p \in H_p(B)\ C^{p+1} \in M\ \partial\ C^p \in B$$

となるからである。ところで，B の上では，*differential operator* $d=d_B$ であるから，
$d\ (t\ \Phi^p\ ) = d_B\ (t\ \Phi^p\ )\ =\ t\ d_B\ \Phi^p = td\ \Phi^p = 0$

且つ，$\displaystyle\int_{Z^p} t\Phi^p = \int_{C^{p+1}} d\ (t\Phi^p\ )\ = \int_{C^{p+1}} d^B(t\ \Phi^p\ )\ = \int_{C^{p+1}} t\ (d_B\ \Phi^p\ )\ = \int_{C^{p+1}} t\ (d\ \Phi^p\ ) = 0$

よって，$t\Phi^p = \alpha^p$ は M で *bounded* な B の *cycles* の上で *periods* 0 を持ち，且つ，$d_B\ \alpha^p = 0$ となる。即ち，この場合，*Closed p-form* Φ^p の *Boundary value* α^p は *Admissible Tangential Bourdary value of* Φ^p になっている。従って，$t\ \Phi^p = \alpha^p$ は B の上だけではなく，M の *differential form* にまで拡げることができる。

そこで，K を第4節で M から構成した *Closed Manifold* K_0 と同位相な *Differentiable Closed Manifold* とする。

M の *cycles* の中で K_0 で *bounded* なものは K の中の M と同位相な部分の中でやはり，*bounded cycles* になる事は K_0 従って，K の作り方から明らかである。そこで，若し B の *clsed differential form* が M の *differential form* まで拡張可能であるとし，且つ，その M の *closed form* が *Admissible* であるならば，その *differential form* は M から K まで拡張可能であることが，〔定理5〕よりいわれる。

〔**定理6**〕

Z_i^p $(i=1, 2,\cdots\cdots, \mathbf{B}_p(M))$ を M の上の独立な *Cycles* とする。この時，これらの *Cycles* の上の *period* ν_i および *Admissible Boundary Value* β^p が指定されていて，

$$t\ \Phi^p = \beta^p\ ,\ \int_{A_i^p} \beta^p = \nu_i$$

となる *closed p-form* Φ^p が存在する。ここに，A_i^p は Z_i^p に *Homologne* な B の上の *cycle* である。

〔**証　明**〕

K を M の *double* と同位相な *Closed Manifold* であって *Differetiable* であるとする。ここで，M の *p-cycles* の基底および K における *p-cycle* の基底で M の *cycles* の何れの像とも *Homologue* でない *cycles* を取る。M において *Homologue* 0 である *cycles* の像は，K においても *Homologue* 0 であるから，これらの2つの *cycles* の集合の和は K の *Absolute cycles* の基底をなしている。

〔Theorem　of De Rham(1)〕によって，

$\displaystyle\int_{Z_i^p} \Phi_0{}^p = \nu^i$ （但し，$j \leqq \mathbf{B}_p(M)$ ならば $\nu^i = 0$）となる *Closed differential p-form* $\Phi_0{}^p$ *of* K が存在する。ここで，$j > \mathbf{B}_p(M)$ となる j に対しては，ν^i は任意の *periods* を指定する事ができる。そこで，この $\Phi_0{}^p$ に対して $\Phi_1{}^p = t\Phi_0{}^p$ なる $\Phi_0{}^p$ の *Boundary value* を取る。すると，M において，$d\ \Phi_0{}^p = 0$ 且つ，B の上では，$\Phi_0{}^p = t\Phi_0{}^p = \Phi_1{}^p$
よって，B の上では $dx^n = 0$ であるから B の上で，

$$0 = d\ \Phi_0{}^p = d\ \Phi_1{}^p = d^B\ \Phi^p + \psi^p \wedge dx^n = d_B\ \Phi_1{}^p$$

よって，$d_B\ \Phi_1{}^p = 0$ となる。

また，M で *Bounded* なすべての B の *cycles* に対して，

$$\int_{Z^p} \Phi_1{}^p = \int_{\partial C^{p+1}} \Phi_1{}^p = \int_{\partial C^{p+1}} \Phi_0{}^p = \int_{C^{p+1}} d\,\Phi_0{}^p = 0 \qquad Z^p \in H_p(B)\ C^{p+1} \in M$$

よって，この $\Phi_1{}^p = t\Phi_0{}^p$ は *Admissible* 先に与えられた *p-form* β^p は仮定により *Admissible* であったから，$\Phi_1{}^p$ およびβ^p は共に，*Admissible Tangential Boundary valne of closed p-form* になる。そこで，$\beta^p - \Phi_1{}^p$ を考えると，*Admissible* である事から $d_B(\beta^p - \Phi_1{}^p) = 0$ 即ち，$\beta^p - \Phi_1{}^p$ は *Closed p-form* (*on B*) である。

また，*Admissible* という条件から，

$$\int_{Z^p} \beta^p - \int_{Z^p} \Phi_1{}^p = \int_{Z^p} (\beta^p - \Phi_1{}^p) = 0$$

$Z_1{}^p \in H^p(B)$, $Z^p \in \partial C^{p+1}$ $C^{p+1} \in M$

よって，$(n-1)$-次元 *Differentiable Closed Manifold B* の上では，

$\beta^p - \Phi_1{}^p = d\,\alpha^{p-1}$

となる B の *differential* $(p-1)$-*form* α^{p-1} が存在する。ここで，α^{p-1} を K 全体に *regular extension* して，それを $\overline{\alpha}^{p-1}$ とおく。そして，この $\overline{\alpha}^{p-1}$ を用いて Φ^p を次のように定義する。

即ち，M の *differential p-form*

$$\Phi^p = \Phi_D^p + d\,\overline{\alpha}^{p-1},\quad d\Phi^p = d\Phi_0{}^p + d\,(d\overline{\alpha}^{p-1}) = 0$$

即ち，Φ^p は M の *closed p-form* 且つ，$Z_i^p \in H^p(M)$

$$\int_{Z_i^p} \Phi^p = \int_{Z_i^p} \Phi_p^D + \int_{Z_i^p} d\,\overline{\alpha}^{p-1} = \int_{Z_i^p} \Phi_D^p = \nu_i\ (i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ \mathbf{B}_p(M))$$

また B 上では $\beta^p - \Phi_1{}^p = d\,\alpha^{p-1}$ $\Phi_1{}^p = t\,\Phi_D^p$

$$\int_{A_i^p} \beta^p = \int_{A_i^p} \Phi_1{}^p + \int_{A_i^p} d\,\alpha^{p-1} = \int_{A_i^p} \Phi_1{}^p = \int_{A_i^p} \Phi_D^p = \nu_i \qquad A_i^p \ni H_p(B)$$

即ち，$\displaystyle\int_{Z_i^p} \Phi^p = \nu_i \qquad \int_{A_i^p} \beta^p = \nu_i\ (i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ \mathbf{B}_p(M))$

よって求める *p-form* Φ^p の存在が証明された。

与えられた条件をみたす differential form の存在

〔定理 7〕

Φ^{p+1} を *Differentiable Maniffold with Boundary M* における *closed* $(p+1)$ *form* とし Φ^{p+1} の M におけるすべての *Absolute Cycles* の上の *periods* が 0 になるとき，この Φ^{p+1} に対して M の *p-form* α^p が存在して $\Phi^{p+1} = d\,\alpha^p$ とすることができる。

〔証 明〕

K を M の *doble* と同位相な *Closed Manifold* で *differentiable* であるとする。M のすべての *cycle* で K の中で *bounded* となる *Cycle* は M でも *bounded* これは K の作り方から明らかである。そこで Φ^{p+1} は仮定から

$$\int_{Z^{p+1}} \Phi^{p+1} = 0 \quad \text{ここに } Z^{p+1} \in H_{p+1}(M)\ \partial C^{p+2} = Z^{p+1}\ C^{p+2} \in M \text{ である。}$$

ここで $\overline{\Phi}^{p+1}$ を Φ^{p+1} の M から K への *reguler extension* とする。このような

extention が可能な事は〔定理5〕から導かれる。

そこで，$Z^{p+1} \in H_{p+1}(K)$ から任意にとる。その取り方として，$Z_0{}^{p+1} \ni H_{p+1}(M)$ ならば仮定より $\int_{Z_0{}^{p+1}} \bar{\Phi}^{p+1} = 0$

また $Z_1{}^{p+1} \in H_{p+1}$ (M') (M' は M の *copy* とする）のときも同様に

$\int_{Z_1{}^{p+1}} \bar{\Phi}^{p+1} = 0$ となる。

そこで問題は，$Z_i^{p+1} \in H_{p+1}(K)$ が $Z_i^{p+1} = R_0{}^{p+1} + R_1{}^{p+1}$ $R_0{}^{p+1} \in H_{p+1}$ (M, B) $R_1{}^{p+1} \in H_{p+1}(M'$ $B)$ となっている場合である。そこで今 $\left\{Z_i^{p+1}\right\}$ を K の *cycles* の中で M の *Absolute Cycles* と *Homologue* でないものの基底の中で最小のものとする。その基底に属する K の *Cycle* は $R_i^{p+1} \in H_{p+1}(M, B)$ と R_i^{p+1} の $M \to M'$ における像 R_i^{p+1} との和集合と同相である。そこで，α^{p+1} を (*Carrier* $K-M=\overline{M}'$) の *Closed* $(p+1)$-*form* としてその *Relative Cycle* R_i^{p+1} の上の *period* $\int_{Z^{p+1}} \bar{\Phi}^{p+1} = \nu_i$ で与えられる。*Carrier* $K-M$ の *Closed* $(p+1)$-*form* としよう。このような α^{p+1} の存在は〔定理1〕において示されている。

そこで改めて K の上の $(p+1)$-*form*

$\bar{\Phi}^{p+1} - \alpha^{p+1}$ を考えると，

$d\,(\bar{\Phi}^{p+1} - \alpha^{p+1}) = 0$ かつ

$$\int_{Z_i^{p+1}} (\bar{\Phi}^{p+1} - \alpha^{p+1}) = \int_{Z_i^{p+1}} \bar{\Phi} - \int_{Z_i} \alpha^{p+1} = \nu_i - \nu_i = 0$$

ここに，$Z_i^{p+1} \in H_{p+1}$ (K) である。〔Theorem of De Rham(2)〕によって

$\bar{\Phi}^{p+1} - \alpha^{p+1} = d\,\alpha^p$ となるような α^p が K の *differential p-form* の中に存在する。そこで $\bar{\Phi}^{p+1} - \alpha^{p+1} = d\,\alpha^p$ の定義域を M に限定すると α^{p+1} の *Carrier* は $K-M$ であったから $\alpha^{p+1} = 0$ (*in* M) 又 $\bar{\Phi}^{p+1}$ は M の $(p+1)$-*form* Φ^{p+1} の K への *regular extension* であったから $\bar{\Phi}^{p+1} = \Phi^{p+1}$ *and* $\Phi^{p+1} = d\,\alpha^p$ (*in* M) よって M において $\Phi^{p+1} = d\,\alpha^p$ となる *differential p-form* の存在が証明されたわけである。

ここで *Relative Cycles* の上の *periods* は *Relative Cycles* の基底の取り方によっては必ずしも一意的に決定されるものでないと云う例をあげる。

ここに *Relative p-Cycles* の基底 $\left\{R_i^p\right\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}_p(M, B))$ が与えられているとする。従ってすべての *Relative Cycle* R^p は $R^p \approx \sum a_i R_i^p$ と書くことができる。ところで C_B^p を B の任意の*p-Chain* とした時，前記の R^p は $R \approx \sum a_i R_i^p + C_B^p$ と書くこともできる。と云うのは，$\partial R^p = \sum a_i \partial R_i^p + \partial C_B^p$ となり $\partial C_B^p \in B$ であるからである。従って，

$$\int_{R^p} \Phi^p = a_i \int_{R_i^p} \Phi^p + \int_{C_B^p} \Phi^p = \sum a_i \nu_i + \int_{C_B^p} \Phi^p$$

と云う事も起り得る事を意味している。その意味で *Relative periods* に関しては *Absolute*

Cycles の上の *periods* のように *Homology Class* の代表元の上だけでは決定できない事になるわけである。

〔**定理8**〕

任意に指定された $\mathbf{B}_{n-p}(M)$ 個の独立な *Relative Cycles* の上での *periods* ν_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, \mathbf{B}_{n-p}(M)$) と指定された *Admissible Boundary Value* β^p を持つ *Closed* な *differentil p-form* Φ^p が M の上に存在する。

〔**証 明**〕

次のような K の *Closed p-form* $\bar{\Phi}^p$ を考えよう。K のすべての *p-cycle* の中で B の *p-cycle* と *Homologue* な *Cycles* の上で，$\bar{\Phi}^p$ の *periods* を *Boundary value* β^p を B の *Closed p-form* と考えた時の B の同じ *p-cycle* の上での *period* を一致させる事ができる。そのような $\bar{\Phi}^p$ の存在は〔Theorems of De Rham (1)〕からすでに得られている。そこで $\beta^p - \bar{\Phi}^p$ を考えるとこの *p-form* は B の上では *Closed* であり，かつすべての B の *p-cycle* の上の *period* は 0 となる。従ってこの $(n-1)$ 次元 *Manifold* B の上での *p-form* $\beta^p - \bar{\Phi}^p$ は〔Theorems of De Rham (2)〕により *derived form* 即ち $\beta^p - \bar{\Phi}^p = d\,\psi^{p-1}$ なる。*Differentiable Manifold* B の上の $(p-1)$ *form* ψ^{p-1} が存在する。そこでこの ψ^{p-1} に対してその定義域を B から K までに拡大して K の $(p-1)$-*form* $\bar{\psi}^{p-1}$ を作る。

そこで M において

$$\Phi_1{}^p = \bar{\Phi}^p + d\,\bar{\psi}^{p-1}$$

とおく。α^p を次のような *p-form* とする。即ち $\Phi_1{}^p - \alpha^p$ は与えられた M の *Relative Cycles* (*mod B*) の上での *penods* があらかじめ指定された *periods* になるような *p-form* (*Carrier M*) である。そのような *Closed p-form* (*Carrier M*) の存在は〔定理1〕ですでに云われている。そこで $\Phi^p = \Phi_1 - \alpha^p$ とおけば Φ^p が求める *Closed p-form* である。

結 語

最初の意気込みにも拘らずこのような取りとめのない小論に終ってしまった。数学には多方面の知識を必要とすると云う事実をつくづく感じさせられる。

筆者をしてこのテーマを手がけさせたのは何と云っても *Differentiable Closed Manifold* におけるその上の *Differential Form* の *DE RHAM-KODAIRA* の見事な数学的な成果であろう。それが筆者をしてその魅力のとりこにし，*HODGE*〔2〕**秋月**〔10〕等々を諸先輩の「むずかすぎる」との制止も聞かないで読みあさったものである。そこに現れたのが本小論の直接のきっかけとなった *DUFF*〔5〕である。

筆者等は *discussion* をたたかわせながら *DUFF* の論文をもとにセミナリーを行いそこにややもろい構成を感じた。例えばつなぎ目の C^∞ 微分可能性等々である。しかしそれをどのように書きなおせばよいものかわからない中に今日に到ってしまった。今日になって再びこのテーマについて考えると *DUFF* の論文〔5〕ができた当時（1952年）とうってかわって *Differential Topology* の発展は目ざましく，*Closed Manifold* でさえあればそれと同位相な *Differentiable Closed Manifold* の存在が *WALLACE* 等によって証明されている〔8〕〔9〕。となると先に *DUFF* の論文のつなぎ目の問題は，「それ等を用いて肯定的にその難点を解消できるであろう」この確信のもとにこの小論が生れたわけである。

この小論を書くに当って多くの方々に御世話になった。最初筆者が *DUFF*〔5〕を無批判に

読んでいた頃，その構成の粗雑さと，もろさを指摘して下さった九大(理)の村主恒郎教授
早大（理工）の小島順助教授，又これまで終始一貫筆者の良き相談相手となって頂いた九大（教養）の上野清太郎，大和田広元両教授および *Differential Topology* の面において貴重なる助言を頂き *WALLACE*〔8〕 *MILNOR*〔9〕等の論文の存在を知らせて下さった九大（工）の塚本陽太郎助教授に特に深甚な感謝の意を表する次第である。

又何回となく足を運んではその度に御世話になった九大図書館理学部分館の方の学外者である筆者に対しても学内者と同様の親切な取扱いには感謝している。ここに紙面を借りて感謝の意を表する次第である。

最後に筆者の恩師である都立大学理学部本部均教授には終始変らず研究上の便誼をはかって頂きその御好意を筆者が身にしみてありがたく感じている事を附記しておく。そして更にこの稿の浄書に協力して下さった本田昇，陣内恵美子，相川雅則の三君にも感謝している。三君の協力がなかったら正味30時間では清書は不可能であったであらう。諸賢の批判を待つ次第である。

参 考 文 献

〔1〕 **G DE RHAM**
*Sur lànalysis situs variete á n-dimension*l
〔Journa de Mathematiques pure et appliquées Tom 10 (1931)〕

〔2〕 **W. V. D. HODGE**
The theory and application of Harmonic Integrals.
〔Cambrige University Press (1941)〕

〔3〕 **A. W. TUCKER**
A Boundary-value theorem for Harmonic Tensors.
〔Bulletin of American Mathematical Society Vol 47. No. 8 (1941)〕

〔4〕 **G. DERHAM** and **K. KODAIRA**
Harmonic Integrals Mimeographed Note
〔The Institute for Advanced study Princton (1950)〕

〔5〕 **F. D. DUFF**
Differential form in Manifolds with Boundary
〔Annals of mathematics Princton (1952)〕

〔6〕 **A WEIL**
Sur ler théorines de De RHAM
〔Commentaric mathematii Helveticii Vol 26 (1952)〕

〔7〕 **S. LEFSCHTZ**
ALGEBRAIC TOPOLOGY
〔Princton (1952)〕

〔8〕 **A. H. WALLACE**
Modifications and cobounnding manifold
〔Canadian Journal of Mathematics Vol 12 (1960)〕

〔9〕 **J. MILNOR**
A Pro-ceduce for Killing the Homotopy Groups of Differentiable Manifold.
〔Symposia in pur Mathematics. American Mathematical Society Ⅲ (1961)〕

〔10〕 **秋 月 康 夫**
調和積分論 上
〔岩波書店 (1952)〕
〔11〕 **松 島 与 三**
多様体入門
〔掌華房 (1965)〕
〔12〕 **村 上 信 吾**
多様体
〔共立出版 (1969)〕