凸函数について

吉田誠一郎

(Some properties of convex functions)

x の区間△に於ける凸函数の定義の仕方は二通りある。こゝではその二つの定義の間の関係を考える他に，△に於いて凸であることと△の各点で凸であることの関係，又$f'(x)$ の存在を仮定したときの凸函数の滑かな性質などについて考えることにする。凸函数の定義は

{1} $x_1<x_2<x_3$ である様な△の任意の三点x_1，x_2，x_3 に対して常に

$$f(x_2)\leqq\frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)}{x_3-x_1}$$

が成立つとき$f(x)$ を△に於ける凸函数と云う。そして常に不等号だけが成立つとき狭義の凸函数と云う。

{2} △の任意の二点x_1，x_2 に対して常に

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

が成立つとき$f(x)$ を△に於ける凸函数と云う。そして$x_1 \neq x_2$ のとき常に不等号だけが成立つとき狭義の凸函数と云う。

{3} $f(x)$ が△で微分可能のとき△の点aに於ける $y=f(x)$ の接線を $y=t(x)$ とするとき適当な$\delta>0$をとれば$x\in(a-\delta,\ a+\delta)\cap\triangle$のとき常に$f(x)\geqq t(x)$ が成立つとき$f(x)$ をaに於て凸と云う。そして不等号だけが成立つときaに於て狭義で凸と云う。

以下次の記号を定める。

△で定義 {1} の意味での凸函数の全体の集合を $K_\triangle$ {1} 狭義の場合は $K^s_\triangle$ {1} 又定義 {2} の意味での場合はそれぞれ$K_\triangle$ {2}，$K^s_\triangle$ {2} で表わすことにする。

又△の各点で凸な函数全体の集合を $E_\triangle$，狭義の場合は $E^s_\triangle$ で表わすことにする。

次の命題を考える。

〔1〕 $f(x)$ が△で微分可能のとき

(i) $f(x)\in K_\triangle\{1\}\to f(x)\in E_\triangle$

(ii) $f(x)\in K^s_\triangle\{1\}\to f(x)\in E^s_\triangle$

此の証明の仕方は普通の本にあるから省略する。[1] その逆命題は

〔2〕 $f(x)$ が△で微分可能のとき

(i) $f(x)\in E_\triangle\to f(x)\in K_\triangle\{1\}$

(ii) $f(x)\in E^s_\triangle\to f(x)\in K^s_\triangle\{1\}$

その証明の為に次の助定理を考える。

〔3〕 $f(x)$ は△で微分可能とする。

$g(x)=mx+k$ （m，kは実数）に対して $F(x)=f(x)-g(x)$ とおけば

$f(x)$が△の点aで凸であれば$F(x)$も点aで凸である。又$f(x)$がaで狭義で凸であれば$F(x)$もaで狭義で凸である。

〔証明〕　$g(x)=mx+k,\quad F(x)=f(x)-g(x)$

従って$F'(x)=f'(x)-m$

点$\{a,\ f(a)\}$に於ける　$y=f(x)$　の接線を$y=t(x)$，　点$\{a,\ F(a)\}$に於ける

$y=F(x)$の接線を　$y=T(x)$　とすれば

$$t(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

$$T(x)=F'(a)(x-a)+F(a)$$

まず　$x\in$△のとき常に$f(x)-t(x)=F(x)-T(x)$であることを証明する。それは

$$f'(x)-t'(x)=f'(x)-f'(a)$$

$$\begin{aligned}F'(x)-T'(x)&=\{f'(x)-m\}-F'(a)\\&=\{f'(x)-m\}-\{f'(a)-m\}\\&=f'(x)-f'(a)\end{aligned}$$

$\therefore\ \{f(x)-t(x)\}'=\{F(x)-T(x)\}'$

$\therefore\ \{f(x)-t(x)\}-F(x)-T(x)\}=C$（定数）

特に　$x=a$　のときを考えると

$$f(a)-t(a)=f(a)-f(a)=0$$

$$F(a)-T(a)=F(a)-F(a)=0$$

$\therefore\ C=0$

$\therefore\ f(x)-t(x)=F(x)-T(x)$

$f(x)$が$x=a$で凸であるときは適当な$\delta>0$を取れば$x\in(a-\delta,\ a+\delta)\cap$△のとき常に

$f(x)-t(x)\geqq 0$　よって$F(x)-H(x)\geqq 0$

又$f(x)$が$x=a$で狭義で凸であるときは

$x\in(a-\delta,\ a+\delta)\cap$△　のとき常に

$f(x)-t(x)>0$　よって　$F(x)-T(x)>0$　　　　（終）

〔2〕　(ii)の証明　$f(x)\in E^{s}_{\triangle}$　とする。

△上に　$x_1<x_2<x_3$　である様な任意の三点$x_1,\ x_2,\ x_3$をとり二点$\{x_1,\ f(x_1)\}$，$\{x_3,\ f(x_3)\}$を結ぶ直線の方程式を$y=g(x)$とし

$f(x)-g(x)=F(x)$とおくと，$F(x)$は$[x_1,\ x_3]$で連続となるから$F(x)$は$[x_1,\ x_3]$上で最大値をとる。その場所を$x=x_0$とすると$F(x)$が微分可能となることから$F'(x_0)=0$故にx_0に於ける$y=F(x)$の接線を$y=T(x)$とすれば$T(x)=F(x_0)$今若し$F(x_2)\geqq 0$とすれば$F(x_0)$は$[x_1,\ x_3]$に於ける$F(x)$の最大値であるから$F(x_0)\geqq F(x_2)\geqq 0$

(i°)　$F(x_0)>0$のとき

$F(x_1)=F(x_3)=0$　であるから　$x_1<x_0<x_3$

となる。$f(x)$は点x_0に於ても狭義で凸であるから助定理〔3〕によりF(x)も点x_0に於て狭義で凸となり適当な$\delta>0$をとれば

$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap\triangle$ のとき $F(x)-T(x)>0$となる。

即ち $F(x)-F(x_0)>0$ 之は$[x_1,\ x_3]$に於けるF(x)の最大値がF(x_0)であることに反する。

(ii°)　$F(x_0)=0$ のとき

$F(x_0)\geqq F(x_2)\geqq 0$ より$F(x_2)=0$ すると$[x_1,\ x_3]$に於けるF(x)の最大値はF(x_2)に等しくなる。所がx_2に於ける $y=F(x)$の接線はx軸でありF(x)は $x=x_2$ でも狭義で凸であることから適当な$\delta>0$をとれば $x\in(x_2-\delta,\ x_2+\delta)\cap\triangle$ のとき

$$F(x)-0>0$$

之はF$(x_2)=0$ が$[x_1,\ x_3]$に於ける F(x) の最大値であることに矛盾する。

(i°)　(ii°)　により $F(x_2)<0$

$$\therefore\ F(x_2)<\frac{(x_3-x_2)F(x_1)+(x_2-x_1)F(x_3)}{x_3-x_1}\qquad(\because\ F(x_1)=F(x_3)=0)$$

所が $y=g(x)$ は直線であるから

$$g(x_2)=\frac{(x_3-x_2)g(x_1)+(x_2-x_1)g(x_3)}{x_3-x_1}$$

$$\therefore\ F(x_2)+g(x_2)<\frac{(x_3-x_2)\{F(x_1)+g(x_1)\}+(x_2-x_1)\{F(x_3)+g(x_3)\}}{x_3-x_1}$$

$$\therefore\ f(x_2)<\frac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)}{x_3-x_1}\qquad\{\because f(x)=F(x)+g(x)\}$$

$\therefore\ f(x)\in K^{s}_{\triangle}\{1\}$　　(終)

〔2〕　(i)　の証明 $f(x)\in E_{\triangle}$ とする。

△上に $x_1<x_2<x_3$ である様な任意の三点 $x_1,\ x_2,\ x_3$ をとり (ii) の場合と同様に $g(x)$, F(x)を作る。F(x) が$[x_1,\ x_3]$で最大となる所をx_0とする。もし $F(x_2)>0$ とすると $F(x_0)\geqq F(x_2)>0$ より $F(x_0)>0$ 従って $x_1<x_0<x_3$ $f(x)$がx_0に於て凸であることから F(x) も x_0 に於て凸となる。よって適当な $\delta>0$ をとれば$x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap\triangle$ のとき $F(x)-F(x_0)\geqq 0$ となる。もし $F(x)-F(x_0)>0$ となることがあれば F(x_0) が最大値なることに反する。よって $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\cap\triangle$ 上のすべてのxに対して $F(x)=F(x_0)$ となる。$(x_0-\delta,\ x_0]\cap\triangle=\phi$ 且 $[x_0,\ x_0+\delta)\cap\triangle=\phi$ であることはないから例えば $[x_0,\ x_0+\delta)\cap\triangle\neq\phi$ とすると $x\in[x_0,\ x_0+\delta)\cap\triangle$ のとき常に $F(x)=F(x_0)$ となる。此の様な性質をもつ δ の値の上限を ρ とすれば $F(x_3)=0$ と F(x)のx_3に於ける連続性とから $x_0+\rho<x_3$ となる。$x_0+\rho=c$ とおき適当な $\delta_1>0$ をとれば $0<h<\delta_1$ なるすべてのhに対して $(c-h,\ c+h)\subset\triangle$ で $x\in(c-h,\ c)$ のとき常に $F(x)=F(x_0)$ で $(c,\ c+h)$ の或る x に対して $F(x)<F(x_0)$ となる。すると F(x) の c に於ける連続性より $F(c)=\lim\limits_{x\to c-0}F(x)=F(x_0)$ 故にcに於ける左微係数 $F'_-(c)=0$ となり従って F(x) のcに於

ける可微分性から $F'(c)=0$ となる。よって $x=c$ に於ける $y=F(x)$ の接線は $y=F(c)$ となる。所が正数 h が δ_1 より小なる如何なる値をとっても $x\in(c, c+h)$ で $F(x)-F(c)<0$ となる x が存在する。之は $F(x)$ が c に於ても凸であることに反する。よって $F(x_2)\leqq 0$ でなければならぬ。

即ち $F(x_2)\leqq \dfrac{(x_3-x_2)F(x_1)+(x_2-x_1)F(x_3)}{x_3-x_1}$

所が $g(x_2)=\dfrac{(x_3-x_2)g(x_1)+(x_2-x_1)g(x_3)}{x_3-x_1}$ で $f(x)=F(x)+g(x)$

であることから $f(x_2)\leqq \dfrac{(x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)}{x_3-x_1}$

$\therefore\ f(x)\in K_{\triangle}\{1\}$　　　　（終）

次に微分可能な凸函数は滑かであることについて考える。

〔4〕 $f(x)$ が△で微分可能であるとき $f(x)\in K_{\triangle}\{1\}$ ならば $f'(x)$ は△で連続である。

（従って $f(x)\in K^{s}_{\triangle}\{1\}$ のときは勿論 $f'(x)$ は△で連続となる。）

〔証明〕 まず△の任意の点 a をとる。

a が△の内点であるときは a の右にある△の一点 b をとると $f(x)\in K_{\triangle}\{1\}$ であることから $f'(a)\leqq f'(b)$ となる。

$f'(a)=f'(b)$ のときは (a, b) のすべての点 x に対して $f'(a)\leqq f'(x)\leqq f'(b)$ より

$f'(x)=f'(a)$

$\therefore\ \lim_{x\to a+0} f'(x)=f'(a)$

又 $f'(a)<f'(b)$ なら導函数に関しても中間値の定理が成立つから $f'(b)-f'(a)$ より小なる任意の $\varepsilon>0$ に対して $b-a$ より小なる適当な $\delta>0$ を取れば $f'(a)<f'(a+\delta)<f'(a)+\varepsilon$ となる。このとき $(a, a+\delta)$ のすべての点 x に対して

$f'(a)\leqq f'(x)\leqq f'(a+\delta)$ となることから

$f'(a)\leqq f'(x)<f'(a)+\varepsilon$

$\therefore\ \lim_{x\to a+0} f'(x)=f'(a)$

同様にして $\lim_{x\to a-0} f'(x)=f'(a)$

又 a が，△の右端の点なら $\lim_{a\to a-0} f'(x)=f'(a)$

△の左端の点なら $\lim_{x\to a+0} f'(x)=f'(a)$ となるから，いずれにしても $f'(x)$ は $x=a$ に於て連続である。よって $f'(x)$ は△で連続である。　　　　（終）

$f(x)$ が△で微分可能のとき△で凸なら $f'(x)$ が連続なこと迄は云えたが $f''(x)$ の存在までは云えない。

〔注意〕 $f(x)$ が△で微分可能のとき

$f(x)\in E^{s}_{\triangle}$ から△に於ける $f''(x)$ の存在は云えない。（従って $f(x)\in E_{\triangle}$ から△に於け

る $f''(x)$ の存在は云えない。）それには実例を作ればよい。△の内点を a とし一次式 $f_1(x)$ $f_2(x)$ を次の様にして作る。

$f_1(x)$ は $(-\infty, a]$ で定義され，$y=f_1(x)$ は点 $(a, 0)$ を通る勾配正の半直線を表わし，$f_2(x)$ は $[a, +\infty)$ で定義され，$y=f_2(x)$ は点 $(a, 0)$ を通る半直線を表わしその勾配は $y=f_1(x)$ のそれより大であるとする。$(-\infty, +\infty)$ で定義される $f(x)$ を次の様に定める。

$f(x)=f_1(x) \quad (x\in(-\infty, a])$

$f(x)=f_2(x) \quad (x\in[a, +\infty))$

すると $f(x)$ は $(-\infty, +\infty)$ で連続となり不定積分が存在する。それを $F(x)$ とすると $F(x)\in E^s_\triangle$ となるが $F''(a)$ は存在しない。

凸なることの必要十分条件をまとめると，$f(x)$ が△で微分可能のとき

Ⅰ　$f(x)\in K_\triangle\{1\}$　となる為の必要十分条件は $f'(x)$ が△で増加函数であることである。

　$f(x)\in K^s_\triangle\{1\}$　となる為の必要十分条件は $f'(x)$ が△で狭義の増加函数であることである。

之は普通の本にあるから省略する。

Ⅱ　$f(x)\in K_\triangle\{1\} \ \leftrightarrows \ f(x)\in E_\triangle$

　$f(x)\in K^s_\triangle\{1\} \ \leftrightarrows \ f(x)\in E^s_\triangle$

$f(x)$ が△で $f'(x)$, $f''(x)$ をもつときはよく知られている様に

　$f(x)\in K_\triangle\{1\} \ \leftrightarrows \ f''(x)\geqq 0 \ (x\in\triangle)$

　$f''(x)>0 \ (x\in\triangle)\rightarrow f(x)\in K^s_\triangle\{1\}$

　しかし $f(x)\in K^s_\triangle\{1\}\rightarrow f''(x)>0 \ (x\in\triangle)$ は云えない。

次は凸函数の連続性について考える。

〔5〕 $f(x)\in K_\triangle\{1\}$ ならば△の任意の内点を a とすれば $f'_-(a)$ 及び $f'_+(a)$ が存在する従って $f(x)$ は $x=a$ に於て連続である。

〔証明〕 △内に $x_1<a<x_2$ なる点 x_1, x_2 をとり $m_1=\dfrac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}$

$m_2=\dfrac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a}$　とすると $f(x)\in K_\triangle\{1\}$ であることから

$$m_1\leqq m_2$$

今 x_1 を固定して $x_2\rightarrow a+0$ とすると m_2 は x_2 と共に減少（非増加）してしかも下界 m_1 を持つから $\lim\limits_{x_2\rightarrow a+0} m_2$ は存在して有限である。即ち $f'_+(a)$ は存在する。そして $m_1\leqq f'_+(a)$ こゝで $x_1\rightarrow a-0$ とすれば $f'_-(a)$ の存在が云える。

$f'_+(a)$ が存在すれば $f(x)$ は a に於て右連続で $f'_-(a)$ が存在すれば $f(x)$ は a に於て左連続であるから $f(x)$ は $x=a$ で連続である。即ち $f(x)\in K_\triangle\{1\}$ なら $f(x)$ は△の内部で連続である。　　（終）

以上は定義{1}による凸函数を考えたが今度は定義{2}による凸函数について考える。よく知られた定理を引用すると，

〔6〕 $f(x)\in K_{\triangle}\{2\}$ で $f(x)$ が△で上に有界ならば $f(x)$ は△の内部で連続である。[2)]

この結果から $f(x)\in K_{\triangle}\{2\}$ で $f(x)$ が△で上に有界ならば $f(x)\in K_{\triangle}\{1\}$ が云える。

すると $f(x)\in K_{\triangle}\{2\}$ であるが $f(x)\notin K_{\triangle}\{1\}$ となる様な函数はどの様な性質を持つであろうか。そこで次の命題を考える。

〔7〕 $f(x)\in K_{\triangle}\{2\}$ で $f(x)$ が△の内点 a で連続ならば $f(x)$ は△の内部で連続である。

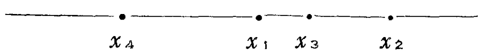
〔証明〕 任意の正数 $\varepsilon>0$ を与えて固定すると $\delta>0$ を十分小さくとれば $(a-\delta,\ a+\delta)\subset\triangle$ であって $x\in(a-\delta,\ a+\delta)$ のとき常に

$f(a)-\varepsilon/2<f(x)<f(a)+\varepsilon/2$ となる様に出来る。

即ち $f(x)$ は $(a-\delta,\ a+\delta)$ で有界となり〔6〕によって $f(x)$ は $(a-\delta,\ a+\delta)$ で連続となる。すると $f(x)$ は $[a,\ a+\delta)$ で連続となる。$[a,\ a+\delta)$ で $f(x)$ が連続となる様な δ の値の上限を δ_0 とし，$a+\delta_0=x_1$ とおく今△が閉区間でないときは△に端点を添加した閉区間を $\overline{\triangle}$ で表わしその右端の点を b とする。$x_1<b$ なら $f(x)$ は x_1 に於て不連続となる筈である。それはもし連続なら $f(x)$ が有界となる範囲が x_1 をより右に延びて $f(x)$ が連続となる範囲も右に延びることになるからである。x_1 は△の内点で $f(x)$ は x_1 に於て不連続であると x_1 の如何なる近傍に於ても x_1 の両側で共に $f(x)$ は上に有界であり得ないことが示される。まず両側で上に有界なら $x=x_1$ で $f(x)$ は連続となり不合理である。又一方だけで上に有界なら即ち適当な $\delta>0$ をとれば $(x_1-\delta,\ x_1]$ で $f(x)$ は上に有界となり如何なる $\delta_1>0$ に対しても $[x_1,\ x_1+\delta_1)$ に於て $f(x)$ が上に有界でないとする。

今 $f(x)<k$ $(x\in(x_1-\delta,\ x_1])$ とすると

$x_1<x_2<b,\ x_2-x_1<\delta$ である様な x_2 をとり $(x_1,\ x_2)$ 上に $x_1<x_3<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ で $f(x_3)>k$, $f(x_3)>f(x_2)$ となる様な x_3 が取れるから $2x_3-x_2=x_4$ とすれば



$x_4<(x_1+x_2)-x_2=x_1$

よって $0<x_1-x_4=x_1-(2x_3-x_2)$

$$=(x_2-x_1)-2(x_3-x_1)$$
$$<x_2-x_1$$
$$<\delta$$

故に $f(x_4)<k$

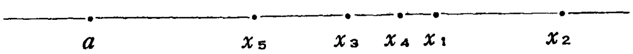
すると $\left.\begin{array}{l} f(x_3)>f(x_2) \\ f(x_3)>f(x_4) \end{array}\right\}$

より　$f(x_3) > \dfrac{f(x_2)+f(x_4)}{2}$

$\therefore\ f\left(\dfrac{x_2+x_4}{2}\right) > \dfrac{f(x_2)+f(x_4)}{2}$　となり $f(x) \in K_\Delta\{2\}$ なることに反する。

かくして x_1 の如何なる近傍に於ても x_1 の両側で $f(x)$ は上に有界でないことがわかった。

しかし此の場合も又矛盾を含んでいる。それは x_1 の性質から $[a,\ x_1)$ に於ては $f(x)$ は連続である。今 $x_1 < x_2 < b,\ 0 < x_2 - x_1 < \dfrac{x_1-a}{2}$ である様な x_2 をとり $x_1 - \dfrac{x_2-x_1}{2} = x_3$ とおき，$[a,\ x_3]$ に於ける連続函数 $f(x)$ の最大値を k とする。又 $(x_3,\ x_1)$ 上には $f(x_4) > f(x_2)$，$f(x_4) > k$ である様な x_4 がとれる。



よって $x_4 - x_5 = x_2 - x_4$ となる様な x_5 をとれば x_5 は $(a,\ x_3)$ 上にある。

$$\left(\begin{array}{ll} \because\ \ x_5 - a = 2x_4 - x_2 - a & x_3 - x_5 = x_3 - 2x_4 + x_2 \\ \qquad\qquad > 2x_3 - x_2 - a & \qquad\quad > x_3 - 2x_1 + x_2 \\ \qquad\qquad = 3x_1 - x_2 - x_2 - a & \qquad\quad = (x_2 - x_1) - (x_1 - x_3) \\ \qquad\qquad = (x_1 - a) - 2(x_2 - x_1) & \qquad\quad = \dfrac{x_2 - x_1}{2} \\ \qquad\qquad > 0 & \qquad\quad > 0 \end{array}\right)$$

よって　$f(x_5) \leqq k < f(x_4)$

　　　　$f(x_2) \qquad < f(x_4)$

故に　$\dfrac{f(x_5)+f(x_2)}{2} < f(x_4) = f\left(\dfrac{x_2+x_5}{2}\right)$

之は $f(x) \in K_\Delta\{2\}$ なることに反する。

以上は $x_1 < b$ とした為の不合理である。

故に $x_1 = b$ 即ち $f(x)$ は $[a,\ b)$ で連続である。a の左側についても同様に考えると△の左端の点を c とすれば $f(x)$ は $(c,\ a]$ で連続となる。即ち $f(x)$ は△の内部で連続となる。（終）

かくして $f(x) \in K_\Delta\{2\}$ で $f(x) \notin K_\Delta\{1\}$ である様な函数は△の内部で至る所不連続で△の内点の如何なる近傍に於ても上に有界でないと云う様な性質を持たねばならぬことになった。

〔註〕 1） 矢野健太郎；微分積分学　P. 72

　　　2） 辻正次；実変数函数論　P. 361