〔論文〕

構造部材の非線形振動

――非線形振動への誘い――

夏秋義広＊
高橋和雄＊＊

1．まえがき

「非線形振動」，この言葉は土木技術者にとってなじみにくい言葉の一つであろう．計算機の利用によって，非線形の領域まで含めた振動解析が可能になった現在，非線形振動を取り扱うチャンスが増えるものと思われる．設計を対象とする限り，計算機によるシミュレーションで十分と思われるが，現象の理解および解の大局的挙動を知るためには，解析的取り扱いが必要である．しかし，この方面のまとまったレビューがあまり見受けられないようである．そこで，本論文では，構造部材の幾何学的非線形振動を中心として，非線形振動の特徴，構造部材での問題，そのアプローチ手法，調和バランス法による解法の紹介，非線形振動問題として各種の現象が現われるケーブルの非線形振動および現在の課題を紹介するものである．

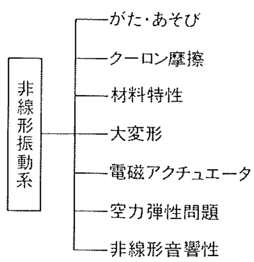
2．線形と非線形の振動

一般に変形が小さく，したがってそれによるひずみおよびたわみの傾斜角がいずれも十分に小さい場合には，変位とひずみ，ひずみと応力の間には線形化が許され，また応力間のつりあいには変形の影響は無視できるから微小変形理論が適用できる．この場合の系の運動を支配する方程式は線形で与えられる．線形振動問題においては，連続体を含めて統一的方法論と物理現象が見事に合体しており，その解法はほぼ完全に確立されている．微小振動論から得られる固有振動数および固有振動形は振幅の大きさに無関係に一定であり，周期的変動荷重が作用する場合の定常解は一義的に定まり，かつ安定であることがKirchhoffの解の唯一性の定理により保証されている．

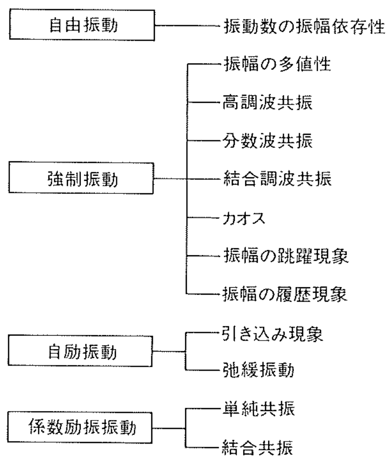
しかし，ひずみまたはたわみの傾斜角のうち，いずれか一つが微小でない場合には，非線形の有限変形理論を適用しなければならない．この場合の運動を記述する幾何学的非線形を考慮した構造部材の運動方程式は非線形偏微分方程式で与えられるために，その解析は微小振動の場合と比較してきわめて複雑になる．一般に振動の運動方程式において，復元力および減衰力が変位の1次以外の項で表される場合を非線形振動という．当然ながら，一般に線形振動を解明する際に威力を発揮した変数分離や重ね合わせなどの手法を適用することは無理であるから，非線形項の比較的大きな非線形振動の解法はまだ十分に確立していない．

非線形振動の問題は，構造物より自由度が少ない電気工学や機械工学の分野において古くから研究されている．たとえば，**図－1**に示したような事例は，非線形振動である．

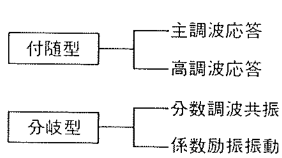
非線形振動の解法には一般的な方法は存在せず，現われる現象も線形振動に見受けられない各種の共振や特異な現象が存在する．非線形振動の特徴および現象をまとめると**図－2**のとおりである．非線形振動系では，固有振動数や固有振動形が振幅によって変化し，かつ周期的変動荷重が作用する場合には加振振動数以外の振動が卓越する高調波もしくは分数調波共振が存在する．周期解には**図－3**のように付随型と分岐型の2種類が



図－1　非線形振動の例



図－2　非線形振動の特徴



図－3　周期解の分類

＊　技術開発室，課長（長崎大学大学院博士課程在学中）
＊＊　工博，長崎大学工学部土木工学科，助教授

存在する．また，非線形連成項を介して，加振されない自由度のパラメーター励振が存在する．なお，非線形振動系では，解の唯一性が成立しないために，同一の加振振動数に対して複数個の応答が算定される．しかしながら，得られた解がすべて実現するとは限らないため，起こりうる解，すなわち安定な解を選びだすための安定判別が必要になってくる．また，安定な解から別の安定な解への過渡現象としてジャンプ現象が存在する．最近では，カオスと呼ばれる不規則応答が各種の非線形振動系に存在することがクローズアップされている．自励振動や係数励振振動も非線形振動と同じはんちゅうで取り扱われることが多い．

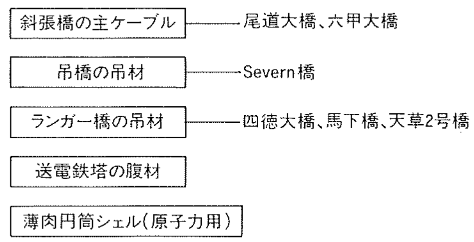
3．構造物の非線形振動概説

構造部材の非線形振動は，1950年代中葉のターボジェットエンジンの出現に伴い，強い音響負荷を受ける航空機のパネルの非線形応答が重要視されるに至って提案された問題である．

1951年に，はりの非線形振動の運動方程式がBurgreen[1]によって提案され，1955年には平板に関する運動方程式がHerrmann[2]によって提案された．

一方，土木構造物の分野においては，アーチ系橋梁の吊材や斜張橋，送電線，係留システムなどに使用される単一ケーブルなど，主として引張材として重要な機能を果す構造部材が数多く活用されている．これらの構造部材は，構造物の大型化に伴い，その使用性・美観・軽量化などの面から注目されてきたものである．これらの構造部材の力学的特色の第１は曲げ剛性が小さいこと，第２は変形性状に関して本質的に幾何学的非線形を示すことである．したがって，これらの部材で構成される構造物，特に大型構造物を設計するにあたっては，その幾何学的非線形挙動を十分に把握することがきわめて重要である．この分野に関する静的問題については，1970年代の構造解析手法の発達と電子計算機の発展によって，構造部材の非線形挙動を対象とした研究が活発に行われている．もちろん，その理論に基づいて設計された構造物は静的荷重に対して妥当な設計強度を有すると言えるが，現実の風荷重や走行荷重などの動荷重に対する的確な配慮が困難であること，および構造物の振動減衰性は継手などの単純化などのために，従来のものに比較してますます小さくなりつつあることなどから，かなりの振幅を伴う非線形振動が生ずる事例があることが知られている．たとえば，橋梁など構造物においてよく知られた例として，**図－4**に示すような報告がなされている[3)~5)]．

プラント，交通機関などの機器については，回転体から誘発される不平衡力が励振力になるが，土木構造物では，風による振動が原因となることが多い．このような構造部材の振動に関係する因子として，構造部材の動特性，部材の幾何学的形状特性および風の流体力学特性が挙げられる．これらのうち，風の流体力学特性も非線形を示すことが知られている．これらの相互作用によって構造物に振動が生ずるが，剛性が小さい部材においては大振幅振動が発生する可能性がある．したがって，剛

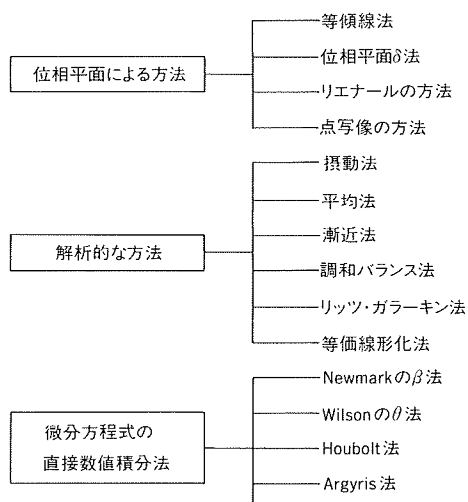


図－4　構造物に大振幅振動が生じた例

性の小さい部材の耐風安定性を問題とするとき，先ず，構造部材の構造的特性から決定される非線形動力学的特性が十分に把握されていることがその第一歩として必要である．また，非線形振動問題の解析が電子計算機の進歩によって可能になった今日，構造物の非線形振動特性を把握しておくことは大切なことと思われる．これにより線形振動解析の仮定の妥当性が評価され，また，エンジニアがもつ非線形に対する不安感も除去できる．

4．非線形振動の解法概説

非線形振動を解析するためには，非線形微分方程式を解かねばならない．非線形性が小さいときには，各種の近似解法が確立されているが，非線形性が大きい本質的な非線形振動に対しては，一般的な近似解法はまだ確立していない．電子計算機を用いた数値解法が主として用いられる．**図－5**に非線形振動の解法をまとめている[6)7)]．



図－5　非線形振動の解析法

位相面による方法は，自律系において時間 t が陽に表われないので，x，y（$y=\dot{x}$）を軸とする位相平面で解曲線を描くものであり，非線形微分方程式の大局的な解の性質や特異点を知るうえで有効な手段である．

解析的な方法では，非線形性の小さな系に対して摂動法・平均法・漸近法などが適用でき，平均法と漸近法は定常振動だけでなく過渡振動にも適用できる．調和バランス法は非線形性が大きい場合にも有効であり，分数調波および高調波振動の解析にも有効である．さらに，多自由度系に対する適用も可能であ

る．調和バランス法では，支配方程式が非線形連立代数方程式の解法に帰着されるために，Newton-Raphson法などの数値解法が必要となり[1]，自由度数や仮定した調波の数が増えると計算時間が増大する．また，得られた解の安定性の検討が必要である．なお，Ritz-Galerkin法は，調和バランス法の第一項近似に相当する．等価線形化法は，系の励振振動数成分について等価な線形化を行うものである．

微分方程式の直接数値積分による方法は，非線形特性を断片線形などに近似し，時刻歴応答を求めるものである．Newmarkのβ法をはじめ，各種のアルゴリズムが提案されている．計算機の発展にともなって，無条件安定のアルゴリズムが用意されている．しかし，この方法は時間領域での解析であり，周波数応答解析には膨大な計算時間が必要である．

5．調和バランス法による解法[7]

非線形の連続体の支配方程式をモード解析法を用いて離散化した場合，多自由度の非線形方程式が得られる．非線形項が大きくなっても，有効性を失わない唯一の方法はFourier級数解析法に基づく調和バランス法である．以下，端部で軸方向変位が拘束された細長いはりに，一様分布周期荷重が作用する場合について，調和バランス法の概要を示す．

5.1　運動方程式

$$L(y)=EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+c\frac{\partial y}{\partial t}+P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-p_0\cos\Omega t=0 \quad (1)$$

$$P=-\frac{1}{2\ell}\int_0^\ell EA\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \quad (2)$$

ここに，E：はりのヤング率，I：断面２次モーメント，y：たわみ，x：原点からの距離，ρ：質量，A：断面積，c：粘性減衰抵抗係数，t：時間，P：たわみによって生ずる軸力，p_0：外力の荷重強度，Ω：荷重の円振動数．

式(1)の運動方程式において，非線形項は，振幅によって生ずる軸力Pである．なお，はりの軸方向変位uは，端部で拘束されているという条件より消去されている．

5.2　解法

(1)　Galerkin法による非線形常微分方程式への変換

連続体の運動方程式を線形振動の基準関数を用いて離散化する．いま，はりのたわみyを次のように変数分離形に仮定する．

$$y=r\sum_{n=1}X_n(x)T_n(t) \quad (3)$$

ここに，$r=\sqrt{I/A}$：回転半径，X_n（x）：境界条件を満足する座標関数，T_n（t）：未知の時間関数．

式(3)の座標関数として，対応する線形振動の基準関数を用いて，Galerkin法を適用するものとする．すなわち，

$$\int_0^\ell L(y)X_q dx=0 \quad (4)$$

ここに，q＝1，2，…

上式の物理的意味は，解の仮定によって生じた不平衡力L（y）が仮想変位δX_qに対して仕事をしないという条件に対応する．はりの基準関数に関する直交性および減衰に関しても直交性が成立することを仮定すれば，次のような時間に関する３次の非線形項をもつDuffing形の非線形連立常微分方程式が得られる．

$$\ddot{T}_n+2h_n\alpha_n\dot{T}_n+\alpha_n^2T_n+\sum_{k=1}\sum_{\ell=1}\sum_{m=1}\beta^n_{k\ell m}T_kT_\ell T_m$$
$$=\gamma_n p\cos\bar{\omega}\tau \quad (5)$$

式(5)は対称な復元力をもつ．偏平アーチやケーブルのように非対称復元力をもつ場合には，２次の復元力の項 $\sum_{k=1}\sum_{\ell=1}\delta^n_{k\ell}T_kT_\ell$ が含まれる．

(2)　非線形連立常微分方程式の解法

多自動度系の非線形振動の定常応答解析にはFourier級数解析法に基づく調和バランス法を用いる．調和バランス法は，運動中に卓越する振動数成分を予測して各調波成分ごとの力の平衡を考えるものである．あるいは，時間に関してのGalerkin法の適用と考えてもよい．いま，式(5)の非線形復元力がすべて３次式であることを考慮すれば，周期振動においてcosおよびsinの奇数次の調波成分が卓越するから，式(5)の解は次のように仮定される．

$$T_n=\sum_i(a_n^i\cos i\bar{\omega}\tau+b_n^i\sin i\bar{\omega}\tau) \quad (6)$$

ここに，　a_n^i，b_n^i：未定定数，i＝1，3，5…．

なお，式(5)の形の微分方程式には，1／3次の分数調波共振が存在することが知られており，これを求めるために，Tnを式(6)に変えて，次のように仮定する．

$$T_n=\sum_i(a_n^{i/3}\cos i\bar{\omega}\tau/3+b_n^{i/3}\sin i\bar{\omega}\tau/3) \quad (7)$$

式(5)の非線形項$T_iT_jT_k$に上式を代入して，cosおよびsin関数の積を加法定理を用いて分解する．仮定した調波成分に含まれない項を無視して，各調波成分cos $i\bar{\omega}\tau$, sin $i\bar{\omega}\tau$についてのつりあいをとると，次のような非線形連立代数方程式となる．

$$(\alpha_n^2-i^2\bar{\omega}^2)a_n^i+2ih_n\bar{\omega}b_n^i+\sum_{k=1}\sum_{\ell=1}\sum_{m=1}\beta^n_{k\ell m}f^i_{k\ell m}$$
$$=\gamma_n^i\delta_{i1}\bar{p} \quad (8\text{-}1)$$
$$(\alpha_n^2-i^2\bar{\omega}^2)b_n^i-2ih_n\bar{\omega}a_n^i+\sum_{k=1}\sum_{\ell=1}\sum_{m=1}\beta^n_{k\ell m}g^i_{k\ell m}$$
$$=0 \quad (8\text{-}2)$$

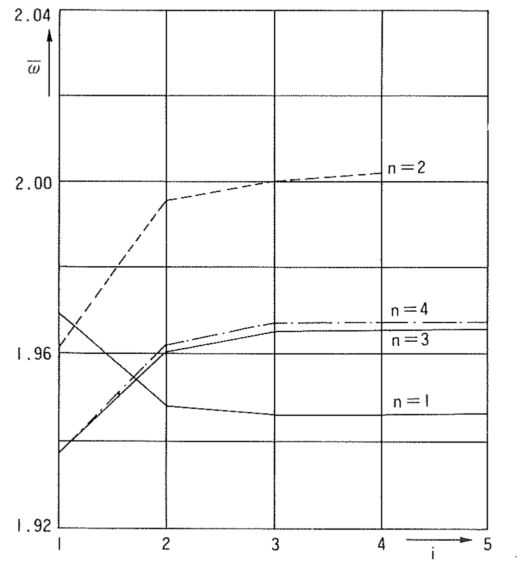
ここに，i＝1，2，…，δ_{ij}：クロネッカーのデルタ関数．

上式にNewton-Raphson法を適用し，適当な初期値のもとに解けば，各自由度の調波成分が求められる．応答曲線が周波数応答曲線上で鉛直接線をもつ付近では，Newton-Raphson法の直線近似の勾配が無限大となる．このために，解の収束性がきわめて悪くなる．解が複数個存在する場合や，分岐問題のように特定の領域にのみ解が存在する場合には，初期値の設定に注意を要する．

5.3　解の収束性

一般に非線形振動系では，振幅によって固有振動数が異なるとともに，固有振動形も変化する．式(5)でn＝1以外の項数が必

要なのはこのためである．すなわち，振幅が大きい場合は，n＝1（1自由度近似）では不十分な場合もある．一例として，**図－6**に両端固定ばりの振幅比A＝8の調和バランス法の収束状況を示す．横軸は調和バランス法の項数i，縦軸は無次元固有振動$\bar{\omega}$で，自由度の数nをパラメーターとしてプロットしたものである．図より，調和バランス法の項数は，3項程度で十分であり，自由度数は3項～4項程度で十分である．一般に，自由度数の方が調和バランス法の項数より多く必要とする．



図－6　調和バランス法の収束状況

5.4　解の安定性

非線形振動問題では得られた解がすべて安定であるとは限らない．このために，振幅の安定性を吟味する必要がある．周期解に微小な外乱を与えたとき，この外乱による運動が有界ならば，この周期解は安定であると判断される．多自由度系として取り扱い，かつ調和バランス法を適用して得られた振幅の安定性を確かめるための第1変分方程式は，連立のHillの方程式になる．

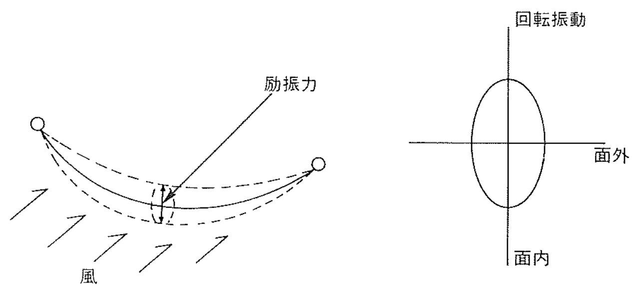
$$[I]\{\ddot{\delta}\}+2[H]\{\dot{\delta}\}+[A]\{\delta\}+\Sigma([B_k]\cos 2k\bar{\omega}\tau+[C_k]\sin 2k\bar{\omega}\tau)\{\delta\}=\{0\} \quad (9)$$

ここに〔I〕：単位行列，〔H〕：減衰行列，〔A〕：剛性行列，〔B_k〕，〔C_k〕：非線形ばね定数と振幅成分の2次の項からなる行列．

上式の一般的な解法は，調和バランス法を拡張して得られる．詳しい現象の説明および解法は文献8）に詳しい．はりやケーブルにおいて，直接加振されないモードの励振および面内加振を受けるケーブルの面外不安定振動などの分岐問題も，分岐点近傍における解の挙動はHillの方程式で表わされる．

6．ケーブルの非線形振動

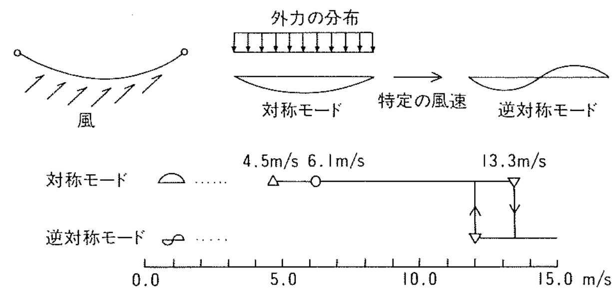
サグをもつケーブルの振動問題はきわめて独特複雑である．その理由は，ケーブルが変形性状に対して本質的に幾何学的非



図－7　面内加振によるケーブルの面内・面外の連成振動

線形性を示すためである[9]．たとえば，**図－7**のような単一ケーブルにおいて，面内方向にのみ荷重が作用した場合に，面内および面外振動の連成した回転振動が生じた例が報告されている．[10)11)]また，風胴実験において，8字型ケーブルがギャロッピングを起こしたときの発現モードが風速によって変化することが報告されている（**図－8**）[12)]．これらの現象は，線形振動では説明できない．ケーブルの幾何学的非線形項を介しての面内振動のもと生ずる面外振動（あるいは逆対称振動）の分岐振動として解釈することができる．

ケーブルの解析の歴史を振り返ると，**図－9**に示すように1974年にIrvineら[13)]によるサグのあるケーブルの固有振動解析が発表されてから，本格的に開始された．1970年代の終わりまでに線形振動解析が行われ，1980年～1985年の間に非線形振動解析が



図－8　ケーブルの逆対称分岐応答

1．線形振動

(1) 固有振動特性（Irvineら　1974，山口ら　1979）
　モードの遷移現象

(2) 減衰特性（山口ら　1987）
　モード減衰

2．非線形振動

(1) 非線形振動特性（山口ら　1981，高橋ら　1983，Luongoら　1982，Al-Nouryら　1985）
　3次元振動，硬化・軟化バネ特性

(2) 係数励振振動問題（高橋ら　1984，高橋ら　1984）
　面内加振による面外不安定振動
　面内対称加振による逆対称振動

(3) カオス（Benedettiniら　1988）
　調和加振のもとに生じる不規則振動

3．ケーブルに現われた振動現象

(1) システムダンピング（前田ら　1983）
(2) レインバイブレーション（名港西大橋　1986）

図－9　ケーブルに現れる振動問題

行われた．現在では，モード減衰性状，カオスおよび流体関連振動が解析されている．また，現象面についても興味ある話題が注目を浴びている．

完全可撓性，伸張性を仮定したケーブルの三次元非線形運動方程式は，面内変位（u，v）と面外変位（w）が連成した形で与えられる．この運動方程式を面内，面外の自由度P_i，Q_iで離散化すると次式が得られる[9]．

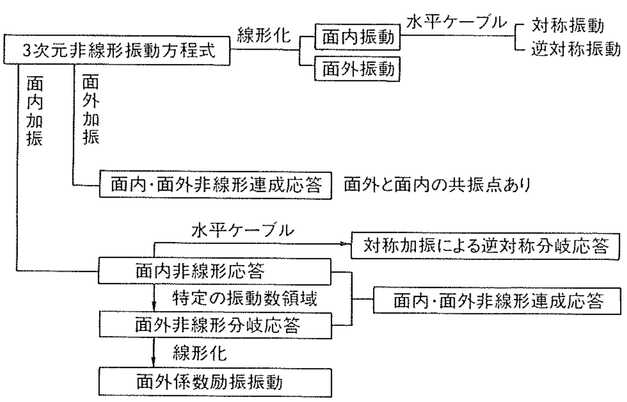
$$m_n^i \ddot{P}_n + k_n^i P_n + k^2 \sum_{j=1}\sum_{\ell=1} k_{j\ell}^{in} P_j P_\ell + \frac{1}{2} k^2 \sum_{q=1}\sum_{p=1} k_{qp}^{in} Q_q Q_p + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}\sum_{\ell=1}\sum_{m=1} k_{j\ell m}^{in} P_j P_\ell P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum_{j=1}\sum_{q=1}\sum_{r=1} k_{jqr}^{in} P_j Q_g Q_r = 8\gamma \cdot f_n^i \cos\omega\tau \quad (10\text{-}1)$$

$$m_n^0 \ddot{Q}_n + k_n^0 Q_n^0 + k^2 \sum_{p=1}\sum_{\ell=1} k_{p\ell}^{0n} Q_p Q_\ell + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}\sum_{\ell=1}\sum_{m=1} k_{p\ell m}^{0n} Q_p P_\ell P_m + \frac{1}{2} k^2 \sum_{p=1}\sum_{q=1}\sum_{r=1} k_{pqr}^{0n} Q_p Q_q Q_r = 8\gamma \cdot f_n^0 \cos\omega\tau \quad (10\text{-}2)$$

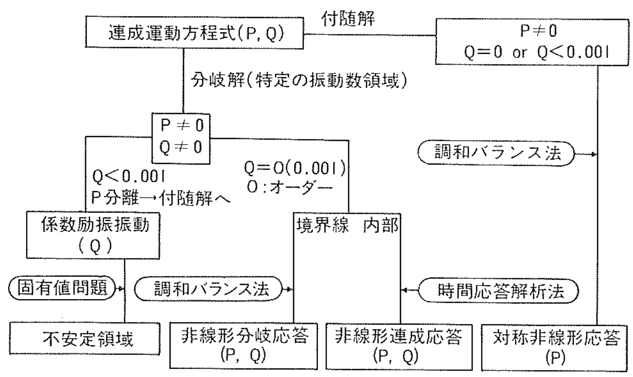
ここに，k：縦波-横波伝播速度比．

上式に示すように，ケーブルはサグをもつために，非対称復元力の項である２次の非線形項が含まれる．この方程式に現われる解の分類を示すと，**図－10**のように得られる[14][15]．線形振動では面内と面外の振動が分離可能であるが，非線形項が入ってくると，完全に分離することはできない．面外加振の場合，面内方向に$2\omega_o$（ω_o：面外の固有円振動数）が作用するために，これによって面内振動が連成する．$2\omega_o = \omega_i$（ω_i：面内固有円振動数）ならば，面内振動が共振を起こし，強い面外・面内連成振動となる．また，面内加振を受ける場合には，面内非線形応答が必ず生ずるが，この他に，特定の振動数領域で面外振動が分岐する．これによって，ケーブルには面内，面外連成応答が生ずる．また，水平ケーブルでは対称加振によって，逆対称振動が分岐する．これらの応答の分類をまとめると**表－１**のとおりである．なお，分岐問題においては，分岐点上での解は周期解をもつが，分岐点で囲まれる応答曲線の内部では運動に周期性がないので，その応答解析は時間応答解析によらねばならない（**図－11**）．

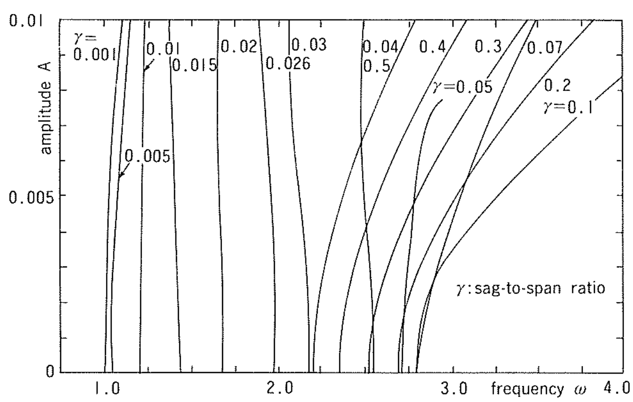
図－12に水平ケーブルの面内振動の振幅比A（振幅/スパン長）と振動数比ω（非線形自由振動数/線形自由振動数）との関係を，サグ比γ（＝f/ℓ）をパラメーターに表示している．図のようにケーブルの非線形性はサグ比の影響を著しく受け，特定のサグ比では弱い軟化バネ特性を示し，振動数は振幅とともに減少する[14][16]．



図－10　ケーブルの非線形振動問題の分類



図－11　応答の分類とアプローチ法



図－12　水平ケーブルの非線形自由振動（対称振動，k＝30）

表－１　ケーブルに表われる応答の分類

加振方向	区　分	応　答　の　種　類	型	備　　　考
面　　内	線　形	・面内線形応答（u，v）	付随型＊	モードの遷移現象
	非線形	・面内非線形応答（u，v）	付随型	
		・対称加振の応答の分岐応答（u，v）	分岐型＊＊	対称性が失われる
		・面外非線形分岐応答（u，v，w）	分岐型	面内、面外連成振動
		・面外係数励振振動（u，v→w） （面外の非線形項を無視した場合）	分岐型	
面　　外	線　形	・面外線形応答（w）	付随型	
	非線形	・面内・面外非線形連成応答（u，v，w）	付随型	内部共振（$\omega^i = 2\omega^o$）

＊　付随型・・・加振によって生ずる応答
＊＊分岐型・・・特定の振動数領域のみに生ずる応答

7．非線形振動はいま

1984年８月デンマーク工科大学で開催された第16回国際理論応用力学会議（IUTAM総会）で，応用力学の大きな転機をかいまみた．有限要素法のような大勢の研究者を必要とする大きなテーマがなくなりつつあるなか「What is future applied mechanics？」という国際会議を開いたら人が集まるのではという冗談がとびだすなかで，「Development of Chaotic Behavior in Dynamic Systems」の熱気あふれる特別セッションにおいて，非線形振動系の研究の中心がカオスに移り，流体から構造へと広い工学分野で存在することを知った．この会議のClosing LectureでスタンフォードカワのKeller教授[17]は「解析，実験の制御およびデータ解析における計算機の利用によって，力学系の応答にカオスが広く存在すること，およびある種の規則性があることを知り得た．カオスの内容は？その規則性は？いかに解析するか？制御するか？はまだ解決されていない．多くの研究が始まったが，まだ，その表面に触れていない．」と訴えた．その後，1985年10月の中国・上海市での「非線形力学の国際会議」，1988年６月のアメリカ・バージニアでの「第２回非線形振動安定性…に関する国際会議」，1988年８月のフランス・グルノーブルでの「第17回国際理論応用力学会議」[18]ならびに1989年８月西ドイツ・シュツットガルトでのIUTAMシンポジウム「工学系における非線形動力学」と，非線形振動を含む国際会議のメインテーマとしてカオスは発展してきている．IUTAMシンポジウムでは，カオスの発生条件，解析手法および構造物に現われる事例などが明確になってきた．また，カオスの実験および映画なども現象を理解するのに役立った．わが国においても1985年12月の第35回応用力学連合講演会でカオスが取り上げられ，1988年11月に設立された日本機械学会「非線形振動研究会」は1990年の例会のテーマをカオスにしている．

計算機の進歩は非線形振動の研究にも大きな影響を及ぼし，その解析，同定法，カオスと新しい領域を拡げ，研究の成果は設計，振動診断に活用されつつある．基礎である応用力学とは言え，時代の変化とともにさまざまに変化し，現代では「ロボットの力学」，「宇宙構造物」，「制振」がその中心となっている．

8．あとがき

非線形振動は，線形振動と異なって，きわめて複雑な挙動を示すことを紹介できたと思う．非線形振動問題では，解が多く存在するので，どのような場合に，どの種類の解が卓越するかを解析的に明らかにしておくことが必要であろう．構造部材を対象とするかぎり，その解法として，空間にモード解析法を，時間に調和バランス法を適用することは，実用的なアプローチ法と思われる．もちろん，非線形振動固有のモードが現われる場合には，この方法では追従できないので，本法は必要十分条件を満足するものではない．しかし，線形解との相違を定量的に明らかにする方法として，本法は多自由度系でかつ，非線形項が大きい場合にも有効性を失わない唯一の方法である．構造物の非線形振動を取り扱う場合は最も一般的な方法といえよう．

参考文献

1）Burgreen,D.：Free Vibrations of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Ends, J.Appl.Mech., Vol.18, pp.135～139,1951

2）Herrmann,G.：Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, NACA TN3578,1955.

3）成田：風による橋梁部材の振動，橋梁と基礎，第５巻，pp.１～５，1971.

4）土木学会編：構造物の安全性・信頼性，土木学会，昭和51年.

5）白木：現場において経験せる非線形振動とその対策（その１），日本機械学会第373回講習会「非線形振動とその理論と実際」，pp.111～122，1973.

6）日本機械学会編：モード解析の基礎と応用，丸善，pp.68～69，1986.

7）高橋・河原・山辺：はりおよび薄板の非線形振動のGalerkin法による解の収束性について，土木学会論文報告集，第293号，pp.９～22，1980.

8）夏秋・高橋・小西：構造物の動的安定性－そのアプローチ手法と橋梁構造への応用－，片山技報，Vol.８，pp.７～15，1988.

9）山口・宮田・伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，pp.59～68，1983.

10）山口・宮田・伊藤：ケーブル系の非線形動的応答における一挙動，第24回，構造工学シンポジウム論文集，pp.55～61，1978.

11）山口・清水・伊藤：ケーブルの非線形動的応答に関する実験的研究，土木学会第36回年次学術講演会講演概要集，第Ⅰ部，pp.371～372，1981.

12）藤野・大島・Phoonsak,P.・山口：ケーブルの面内非線形振動とモードのエルゴード性，土木学会第43回年次学術講演会講演概要集，pp.882～883，1988.

13）Irvine, H.M. and Caughey, T.K.：The Linear Theory of Free Vibrations of Suspended Cable, Proc.Roy.Soc.(London), A341, pp.295～315，1974.

14）Takahashi, K. and Konishi,Y.：Non-linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, PartⅠ：Nonlinear Free Vibrations, Journal of Sound and Vibration, Vol.118, №１, pp.69～84, 1987.

15）Takahashi,K. and Konishi,Y.：Non-linear Vibrations of Cables in Three Dimensions, PartⅡ：Out-of plane Vibrations under In-plane Sinusoidally Time-varying Load, Journal of Sound and Vibration, Vol.118, pp.85～97，1987.

16）高橋・藤本・村中・田川：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集，第338号，pp.59～68，1983.

17）Niordson, F.I. and Olhoff, N.：Proceedings of the ⅩⅥth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland，1985.

18）Germain, P.,Piau,M. and Caillerie, D.：Proceedings of the ⅩⅦth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland,1989.