

共鳴・共振現象の多重波理論 V

——異なる線密度3本からなる複合弦の強制振動——

福山 豊・山口 要

長崎大学教育学部物理学教室

(平成6年3月15日受理)

Multiple Wave Theory of Resonance Phenomena V

——Forced Vibration of Compound String
with three different densities——

Yutaka FUKUYAMA, Kaname YAMAGUTI

Department of Physics, Faculty of Education

Nagasaki University, Nagasaki, Japan

(Received March 15, 1994)

Abstract

The resonance phenomena of a string with three different densities driven one end by a speaker are considered by applying the multiple wave theory. As the attenuation coefficients go to zero these results are the same as the results of the ordinary theory which has infinity values of the amplitude of the stationary waves.

1. はじめに

いままでに線密度の一樣な1本の弦や、2本の異なる線密度よりなる複合弦の共振現象について、有限な振幅をもつ共振定常波を表すために、多重波の手法を適用し、一般的な理論式を導き出した¹⁻⁷⁾。その結果、外部からの任意の振動数に対して生じる定常波の様子を議論できるようになった。特に、共振を生じる定常波の振幅の大きさの大小は、弦上を伝播する進行波の減衰効果の大小が反映しており、減衰係数が大きいほど振幅は小さくなることが導かれた。また、単一弦の第 n 共振振動数は基本振動数の整数 n 倍となるが、複合弦の場合の高次の共振振動数は、第1共振振動数の整数倍とはならず、ずれていることがわかった。本報は、これらの議論を3本の異なる線密度からなる複合弦の場合に拡張し、多重波の手法を用いて、この複合弦の1端を振動数 ν で振動させたとき生じる定常波の理論的解析を行うことを目的とした。

2. 3本の異なる密度よりなる複合弦の振動変位の多重波表示

3本の異なる密度よりなる複合弦のうち、振動源に結びつけたほうの弦(弦A)の長さとし、中央の張(弦B)の長さとし、線密度を ℓ_1 と ρ_1 とし、中央の張(弦B)の長さとし、線密度を ℓ_2 と ρ_2 、もう一方の固定端側の弦(弦C)の長さとし、線密度を ℓ_3 と ρ_3 とする。また、この複合弦の振動源側の端を座標の原点とし、弦Aと弦Bの結合点を ℓ_1 、弦Bと弦Cの結合点を $\ell_1 + \ell_2$ 、弦Cの固定端側の端を $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ とする。複合弦上の位置 x は、(A)弦A ($0 \leq x \leq \ell_1$)、(B)弦B ($\ell_1 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2$)、(C)弦C ($\ell_1 + \ell_2 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$) との3区間に分け振動の様子を別々に考察する(図1)。図1のM, C₁, C₂, NとXは、それぞれ、振動源、弦Aと弦Bの結合点、弦Bと弦Cの結合点、弦Cの固定点、それに弦上の着目点である。

振動源で発生する正弦波の振幅を a とし、その振動数と角振動数を ν と ω とする。また、弦A(左)、弦B(中央)、弦C(右)の伝播速度、波長と波数は v_1, λ_1, k_1 と v_2, λ_2, k_2 と v_3, λ_3, k_3 によって表すことにする。左端と右端の固定端での波の反射係数は、 $R_{10}(=-1)$ と $R_{34}(=-1)$ で表し、弦Aの波が弦Bの左端で反射される反射係数と弦Bの波が弦Aの右端で反射される反射係数は、それぞれ R_{12} と $R_{21}(=-R_{12})$ 、弦Bの波が弦Cの左端で反射される反射係数と弦Cの波が弦Bの右端で反射される反射係数は、それぞれ、 R_{23} と $R_{32}(=-R_{23})$ と表す。

さらに、弦Aの波が弦Bへ伝播するときの透過係数と弦Bの波が弦Aへ伝播するときの透過係数とは $T_{12}(=1+R_{12})$ と $T_{21}(=1+R_{21})$ とし、弦Bの波が弦Cへ伝播するときの透過係数と弦Cの波が弦Bへ伝播するときの透過係数とは、 $T_{23}(=1+R_{23})$ と $T_{32}(=1+R_{32})$ とする。

弦上の波は距離 s だけ伝播すると、そのときの波の振幅は e^{-as} 倍だけ小さくなるものと仮定する。ただし、弦A、弦B、弦Cの減衰係数はそれぞれ a_1, a_2, a_3 とする。

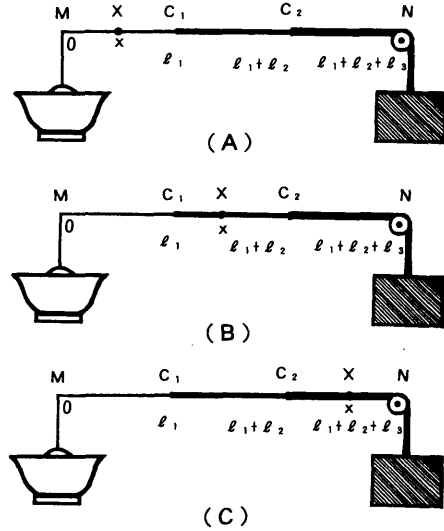


図1 x の範囲, (A) $0 \leq x \leq \ell_1$,
(B) $\ell_1 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2$,
(C) $\ell_1 + \ell_2 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$

A. 弦A ($0 \leq x \leq \ell_1$) の波の振動

振動源の振動は $a \sin \omega t$ と表されるものとする。時刻 t における弦A上の位置 x での振動変位 $y^A(x, t)$ は、振動源で発生し、弦A、弦B、弦Cへと伝播していく波が弦の両端と弦の結合点で透過や反射してとじこめられたすべての波と重ね合わせることによって表現できる。

まず、振動源で発生した正弦波が、時刻 t にはじめてXに到着している波 $y^A(x, t)$ は

$$y^A(x, t) = ae^{-a_1 x} \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

と表される。

以後の計算を簡単にする目的で、正弦関数を複素数の虚数部で表示することにし

$$y^A(x, t) = \text{Im}[Y_1^A(x, t)] \quad (2)$$

で定義する複素関数 $Y_1^A(x, t)$ を導入し、これからすべて複素数表示を用いて計算する。(3)式の複

素関数 $Y_1^A(x, t)$ は

$$Y_1^A(x, t) = ae^{-a_1x + i(\omega t - k_1x)} \quad (3)$$

と表される。

次に、さらに右へ伝播し、弦の結合点 C_1 、 C_2 や弦の右端 N で反射され、時刻 t に 2 度目に X に到着している波 $Y_2^A(x, t)$ のうち、 C_1 で弦 B から弦 A へ通過していく波 $\tilde{Y}_2^A(x, t)$ のみ取り上げると

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2^A(x, t) = & R_{12}e^{-2a_1(\ell_1-x) - i2k_1(\ell_1-x)} Y_1^A(x, t) \\ & + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2a_1(\ell_1-x) - i2k_1(\ell_1-x) - 2a_2\ell_2 - i2k_2\ell_2} Y_1^A(x, t) \\ & + T_{12}R_{23}R_{34}T_{32}T_{21}e^{-2a_1(\ell_1-x) - i2k_1(\ell_1-x) - 2a_2\ell_2 - i2k_2\ell_2 - 2a_3\ell_3 - i2k_3\ell_3} Y_1^A(x, t) \\ & + T_{12}T_{23}R_{34}R_{32}R_{34}T_{32}T_{21}e^{-2a_1(\ell_1-x) - i2k_1(\ell_1-x) - 2a_2\ell_2 - i2k_2\ell_2 - 4a_3\ell_3 - i4k_3\ell_3} Y_1^A(x, t) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

と表される。

この式の右辺第 1 項は、 M で発生した波が X を 1 度通り右へ伝播し、結合点 C_1 で反射され 2 度目に X に到着した波を表し、第 2 項は、 M で発生した波が X を 1 度通り、結合点 C_1 を通過し結合点 C_2 で反射して、 C_1 を通過して X に到着した波を表す。第 3 項は、 M で発生した波が同様に C_1 と C_2 を通過し、右端 N で反射して、また C_2 と C_1 を通過して 2 度目に X に到着した波を表している。第 4 項は M からの波が C_1 と C_2 を通過し、 N で反射され、 C_2 でまた反射され、 N_2 で反射され C_2 と C_1 を通過して 2 度目に X に到着した波である。同様に、 M で発生した波が C_1 と C_2 を通過して N で反射され、それぞれ、 C_2 で 2 度、3 度、4 度と反射されて時刻 t に X に 2 度目に到着した波を考えることができる。

その結果、(4)式は

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2^A(x, t) = & e^{-2a_1(x)} Y_1^A(x, t) \left[R_{12} + T_{12}T_{21}e^{-2a_2} \left\{ R_{23} + T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3} (1 + R_{32}R_{34}e^{-2a_3} \right. \right. \\ & \left. \left. + (R_{32}R_{34}e^{-2a_3})^2 + (R_{32}R_{34}e^{-2a_3})^3 + \dots \right\} \right] \\ = & e^{-2a_1(x)} Y_1^A(x, t) \left[R_{12} + T_{12}T_{21}e^{-2a_2} \left\{ R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3}} \right\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

と表される。ただし、ここで $a_1(x)$ 、 a_2 、 a_3 は、それぞれ、

$$\begin{aligned} a_1(x) &= a_1(\ell_1 - x) + ik_1(\ell_1 - x), \\ a_2 &= a_2\ell_2 + ik_2\ell_2, \\ a_3 &= a_3\ell_3 + ik_3\ell_3 \end{aligned} \quad (6)$$

と置き、(5)式の最後の式は、等比級数の和の公式を用いて計算した。

$\tilde{Y}_2^A(x, t)$ は結合点 C_1 を弦 B から弦 A へ通過する波のみ考察したが、 C_1 で反射されまた弦 B へ伝播して C_2 と N で反射や通過し C_1 を弦 B から弦 A へ通過していく一連の波を考察していない。弦 B からの波が C_1 で何度も反射し、ついに C_2 を通過して 2 度目に X に到着した波を \tilde{Y}_2^A に加えて書き表すと

$$\begin{aligned} Y_2^A(x, t) = & e^{-2a_1(x)} Y_1^A(x, t) \left[R_{12} + T_{12}T_{21}e^{-2a_2} \left\{ R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3}} \right\} \right. \\ & \times \left\{ 1 \times R_{12}e^{-2a_2} \left(R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3}} \right) + R_{12}^2e^{-4a_2} \left(R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3}} \right)^2 \right. \\ & \left. \left. + \dots \right\} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

これを等比級数の和の公式を用いて計算すると

$$Y_2^A(x, t) = RY_1^A(x, t) \quad (8)$$

となる。ただし、 R は

$$R = e^{-2\alpha_1(x)} \left[R_{12} + T_{12} T_{21} e^{-2\alpha_2} \frac{R_{23} + T_{23} R_{34} T_{32} \times \frac{e^{-2\alpha_3}}{1 - R_{32} R_{34} e^{-2\alpha_3}}}{1 - R_{12} e^{-2\alpha_2} \times \frac{T_{23} R_{34} T_{32} e^{-2\alpha_3}}{1 - R_{32} R_{34} e^{-2\alpha_3}}} \right] \quad (9)$$

と定義した。

次に、左端Mでさらに反射して、時刻 t に3度目にXに到着している波 $Y_3^A(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_3^A(x, t) &= R_{10} e^{-2\alpha_1 x - i2k_1 x} Y_2^A(x, t) \\ &= RSY_1^A(x, t) \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。ここで S は

$$S = R_{10} e^{-2\alpha_1 x - i2k_1 x} \quad (11)$$

と定義した。

以下同様にして、M, C_1 , C_2 , Nで反射・通過して時刻 t に4度目、5度目、6度目、……、にXに到着している波は、それぞれ、

$$Y_4^A(x, t) = RY_3^A(x, t) = R^2SY_1^A(x, t), \quad (12)$$

$$Y_5^A(x, t) = SY_4^A(x, t) = R^2S^2Y_1^A(x, t), \quad (13)$$

$$Y_6^A(x, t) = RY_5^A(x, t) = R^3S^2Y_1^A(x, t), \quad (14)$$

⋮

と表すことができる。

これらの式から、時刻 t にXに到着している奇数回目と偶数回目のそれぞれの合成波は、等比級数の和の公式を用いて計算することができる。時刻 t に奇数回目にXに到着した波の重ね合わせは、(3), (10), (13)式より

$$\begin{aligned} Y_{\text{odd}}^A(x, t) &= \{1 + RS + (RS)^2 + \dots\} Y_1^A(x, t) \\ &= \frac{1}{1 - RS} Y_1^A(x, t) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

時刻 t に偶数回目にXに到着した波の重ね合わせは、(8), (12), (14)式より

$$\begin{aligned} Y_{\text{even}}^A(x, t) &= R\{1 + RS + (RS)^2 + \dots\} Y_1^A(x, t) \\ &= \frac{R}{1 - RS} Y_1^A(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

と表される。

(15)式と(16)式を加え合ると、時刻 t にXに到着しているすべての波の重ね合わせとして表される振動変位の式 $Y^A(x, t)$ が得られ

$$Y^A(x, t) = Y_{\text{odd}}^A(x, t) + Y_{\text{even}}^A(x, t) = \frac{1+R}{1-RS} Y_1^A(x, t) \quad (17)$$

と表される。

この式の R , S と $Y_1^A(x, t)$ に(9), (11)と(3)式を代入し、 $R_{10} = R_{34} = 1$ と

$$T_{ij} = 1 + R_{ij}, R_{ij} = -R_{ji}, (i \neq j; i, j = 1, 2, 3) \quad (18)$$

の関係を考慮すると

$$Y^A(x, t) = \frac{1 + e^{-2\alpha_1(x)} \left\{ R_{12} + T_{12} \frac{T_{21} e^{-2\alpha_2} (R_{23} - e^{-2\alpha_3})}{(1 + R_{32} e^{-2\alpha_3}) - R_{21} e^{-2\alpha_2} (R_{23} - e^{-2\alpha_3})} \right\}}{1 + e^{-2\alpha_1} \left\{ R_{12} + T_{12} \frac{T_{21} e^{-2\alpha_2} (R_{23} - e^{-2\alpha_3})}{(1 + R_{32} e^{-2\alpha_3}) - R_{21} e^{-2\alpha_2} (R_{23} - e^{-2\alpha_3})} \right\}} a e^{-\alpha_1 x + i(\omega t - k_1 x)} \quad (19)$$

と表される。ただし、

$$\alpha_1 = a_1 \ell_1 + ik_1 \ell_1 \quad (20)$$

と定義した。

さらに簡単にするために

$$R_{ij} = \frac{\sqrt{\rho_i} - \sqrt{\rho_j}}{\sqrt{\rho_i} + \sqrt{\rho_j}}, \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3) \quad (21)$$

と(18)式を用いると、結局、この範囲の位置 x における振動変位は

$$Y^A(x, t) = ae^{i\omega t} \left[\sinh \alpha_1(x) \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 \right\} \right. \\ \left. + \cosh \alpha_1(x) \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 \right\} \right] / Z \quad (22)$$

となる。ただし、分母 Z は

$$Z = \sinh \alpha_1 \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 \right\} \\ + \cosh \alpha_1 \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 \right\} \quad (23)$$

で表される。

B. 弦B ($\ell_1 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2$) の波の振動

次に、中央の弦Bの位置 x の振動について考察する。ここでも複素数表示をつかう。

まず振動源で発生した正弦波が、時刻 t にはじめてXに到着している波 $Y_1^B(x, t)$ は

$$Y_1^B(x, t) = ae^{i\omega t} \left[T_{12} e^{-a_1 \ell_1 - ik_1 \ell_1 - a_2(x-\ell_1) - ik_2(x-\ell_1)} \right. \\ + R_{12} R_{10} T_{12} e^{-3a_1 \ell_1 - i3k_1 \ell_1 - a_2(x-\ell_1) - ik_2(x-\ell_1)} \\ + (R_{12} R_{10})^2 T_{12} e^{-5a_1 \ell_1 - i5k_1 \ell_1 - a_2(x-\ell_1) - ik_2(x-\ell_1)} \\ + (R_{12} R_{10})^3 T_{12} e^{-7a_1 \ell_1 - i7k_1 \ell_1 - a_2(x-\ell_1) - ik_2(x-\ell_1)} \\ \left. + \dots \right] \quad (24)$$

と表される。

この式の右辺第1項はMで発生した波が右へ伝播し、結合点 C_1 を通過してXに到着した波を表し、第2項はMで発生した波が右へ伝播し結合点 C_1 で反射され、またMで反射され C_1 を通過してXに到着した波を表す。以下同様にして C_1 で2度、3度、4度……と反射された後ついに C_1 を通過してXに到着した波を表している。

(24)式は等比級数の和の公式を用いると

$$Y_1^B(x, t) = ae^{i\omega t} T_{12} e^{-a_1 \ell_1 - ik_1 \ell_1 - a_2(x-\ell_1) - ik_2(x-\ell_1)} / (1 - R_{12} R_{10} e^{-2a_1 \ell_1 - i2k_1 \ell_1}) \quad (25)$$

と表される。

さらに右へ伝播し結合点 C_2 や右端Nで反射され、時刻 t に2度目にXに到着している波 $Y_2^B(x, t)$ は

$$Y_2^B(x, t) = [R_{23} e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x)} \\ + T_{23} R_{34} T_{32} e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - 2a_3 \ell_3 - i2k_3 \ell_3} \\ + T_{23} R_{34} R_{32} R_{34} T_{32} e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - 4a_3 \ell_3 - i4k_3 \ell_3} \\ + T_{23} R_{34} (R_{32} R_{34})^2 T_{32} e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - 6a_3 \ell_3 - i6k_3 \ell_3} \\ \left. + \dots \right] Y_1^B(x, t) \quad (26)$$

と表される。

この式の右辺第1項は、1度Xに到着した波がさらに右へ伝播せ、結合点 C_2 で1度反射されて

2度目にXに到着した波を表し、第2項は1度Xに到着した波が右へ伝播し、結合点C₂を通過した右端で反射され、またC₂を通過して2度目にXに到着した波を表す。第3項は1度Xに到着した波が右へ伝播し、C₂を通過しNで反射され、またC₂で反射され、さらにNで反射されC₂を通過して時刻 t に2度目にXに到着した波を表す。以下同様にして1度Xに到着した波がC₂を通過しNで反射され、それがC₂で2度、3度、4度……と反射され時刻 t に2度目にXに到着した波を表している。

(26)式は等比級数の和を用いて計算でき

$$Y_2^B(x, t) = e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x)} \left\{ R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3\ell_3 - i2k_3\ell_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3\ell_3 - i2k_3\ell_3}} \right\} Y_1^B(x, t) \quad (27)$$

$$= EY_1^B(x, t)$$

と表される。ただしEは

$$E = e^{-2a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) - i2k_2(\ell_1 + \ell_2 - x)} \left\{ R_{23} + \frac{T_{23}R_{34}T_{32}e^{-2a_3\ell_3 - i2k_3\ell_3}}{1 - R_{32}R_{34}e^{-2a_3\ell_3 - i2k_3\ell_3}} \right\} \quad (28)$$

と定義した。

次に、時刻 t にXに3度目に到着する波 $Y_3^B(x, t)$ を考察すると、 $Y_3^B(x, t)$ は

$$Y_3^B(x, t) = [R_{21}e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1)} + T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1) - 2a_1\ell_1 - i2k_1\ell_1} + T_{21}R_{10}R_{12}R_{10}T_{12}e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1) - 4a_1\ell_1 - i4k_1\ell_1} + T_{21}R_{10}(R_{12}R_{10})^2T_{12}e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1) - 6a_1\ell_1 - i6k_1\ell_1} + \dots] Y_2^B(x, t) \quad (29)$$

と表される。

この式の右辺第1項は、Xに2度到着した波が左に伝播しC₁で反射されて3度目にXに到着した波を表し、第2項はXに2度到着した波が左に伝播し、C₁を通過しMで反射され、またC₁を通過してXに3度目に到着した波を表す。第3項は、Mで反射された後C₁で反射されもう一度Mで反射されC₁を通過してXに到着した波を表す。以下同様にしてMで反射された波がC₁で2度、3度、4度……と反射されて時刻 t にXに3度目に到着した波を表している。

(29)式は等比級数の和の公式を用いて計算すると

$$Y_3^B(x, t) = e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1)} \left\{ R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a_1\ell_1 - i2k_1\ell_1}}{1 - R_{12}R_{10}e^{-2a_1\ell_1 - i2k_1\ell_1}} \right\} Y_2^B(x, t) \quad (30)$$

$$= OY_2^B(x, t)$$

$$= OEY_1^B(x, t)$$

と表される。ただしOは

$$O = e^{-2a_2(x - \ell_1) - i2k_2(x - \ell_1)} \left\{ R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a_1\ell_1 - i2k_1\ell_1}}{1 - R_{12}R_{10}e^{-2a_1\ell_1 - i2k_1\ell_1}} \right\} \quad (31)$$

と定義した。

同様にしてM, C₁, C₂, Nで反射通過して時刻 t に4度目、5度目、6度目、……、にXに到着する波は、それぞれ、

$$Y_4^B(x, t) = EY_3^B(x, t) = OE^2Y_1^B(x, t), \quad (32)$$

$$Y_5^B(x, t) = OY_4^B(x, t) = O^2E^2Y_1^B(x, t), \quad (33)$$

$$Y_6^B(x, t) = EY_5^B(x, t) = O^2E^3Y_1^B(x, t), \quad (34)$$

⋮

と表すことができる。

これらの式から、時刻 t にXに到着している奇数回目の波と偶数回目の波は、それぞれ、等比級

数の和の公式を用いて加え合わせることができる。時刻 t に奇数回目に X に到着する波の重ね合わせは、(25), (30), (33)式より

$$\begin{aligned} Y_{\text{odd}}^B(x, t) &= \{1 + OE + (OE)^2 + \dots\} Y_1^B(x, t) \\ &= \frac{1}{1 - OE} Y_1^B(x, t) \end{aligned} \quad (35)$$

となり、時刻 t に偶数回目に X に到着する波の重ね合わせは、(27), (32), (34)式より

$$\begin{aligned} Y_{\text{even}}^B(x, t) &= E \{1 + OE + (OE)^2 + \dots\} Y_1^B(x, t) \\ &= \frac{E}{1 - OE} Y_1^B(x, t) \end{aligned} \quad (36)$$

となる。

時刻 t に X に到着しているすべての波を重ね合わせることによって表現できる振動変位 $Y^B(x, t)$ は、(35), (36)式から

$$\begin{aligned} Y^B(x, t) &= Y_{\text{odd}}^B(x, t) + Y_{\text{even}}^B(x, t) \\ &= \frac{1 + E}{1 - OE} Y_1^B(x, t) \end{aligned} \quad (37)$$

と表される。

(37)式の E , O と $Y_1^B(x, t)$ に(28), (31), (25)式を代入し、(18)式を考察すると

$$\begin{aligned} Y^B(x, t) &= \frac{1 + e^{-a_2(x)} \left\{ R_{23} - \frac{T_{23} T_{32} e^{-2a_3}}{1 + R_{32} e^{-2a_3}} \right\}}{1 - e^{-2a_2} \left\{ R_{21} - \frac{T_{21} T_{12} e^{-2a_1}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \right\} \left\{ R_{23} - \frac{T_{23} T_{32} e^{-2a_3}}{1 + R_{32} e^{-2a_3}} \right\}} \\ &\quad \times a e^{i\omega t} \frac{T_{12} e^{-a_1 - a_2(x - \ell_1) - ik_2(x - \ell_1)}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \end{aligned} \quad (38)$$

と表される。

この式を(21)式と

$$a_2(x) = a_2(\ell_1 + \ell_2 - x) + ik_2(\ell_1 + \ell_2 - x) \quad (39)$$

の定義式を用いると、この範囲 ($\ell_1 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2$) の位置 x の振動変位は

$$Y^B(x, t) = a e^{i\omega t} \left[\sinh a_2(x) \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \cosh a_3 + \cosh a_2(x) \sinh a_3 \right] / Z \quad (40)$$

と表される。この式の分母 Z は(23)式で表されている。

C. 弦 C ($\ell_1 + \ell_2 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$) の波の振動

まず振動源で発生した正弦波が時刻 t にはじめて X に到着している波 $Y_1^C(x, t)$ を計算する。 $Y_1^C(x, t)$ のうち結合点 C_2 を弦 B から弦 C へ通過する波のうち、 C_2 で 2 度以上反射した波をはぶいた波を $\tilde{Y}_1^C(x, t)$ とすると

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1^C(x, t) &= a e^{i\omega t} [T_{12} T_{23} e^{-a_1 \ell_1 - ik_1 \ell_1 - a_2 \ell_2 - ik_2 \ell_2 - a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - ik_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + T_{12} R_{23} R_{21} T_{23} e^{-a_1 \ell_1 - ik_1 \ell_1 - 3a_2 \ell_2 - i3k_2 \ell_2 - a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - ik_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + T_{12} R_{23} T_{21} R_{10} T_{12} T_{23} e^{-3a_1 \ell_1 - i3k_1 \ell_1 - 3a_2 \ell_2 - i3k_2 \ell_2 - a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - ik_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + T_{12} R_{23} T_{21} R_{10} R_{12} R_{10} T_{12} T_{23} e^{-5a_1 \ell_1 - i5k_1 \ell_1 - 3a_2 \ell_2 - i3k_2 \ell_2 - a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - ik_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + T_{12} R_{23} T_{21} R_{10} (R_{12} R_{10})^2 T_{12} T_{23} e^{-7a_1 \ell_1 - i7k_1 \ell_1 - 3a_2 \ell_2 - i3k_2 \ell_2 - a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - ik_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + \dots] \end{aligned} \quad (41)$$

と表される。

(41)式の右辺第 1 項は M で発生した波で C_1 と C_2 を通過して X に時刻 t にはじめて到着した波を表し、第 2 項は、 C_2 で 1 度反射されその波が C_1 で反射され C_2 を通過して X にはじめて到着した

波を表す。第3項はC₂で1度反射されC₁を通過してMで反射して、さらにC₁とC₂を通過してXにはじめて到着した波を表し、第4項はC₂で1度反射されC₁を通過してMで反射して、C₁で反射しMでもう1度反射され、C₁とC₂を通過してXにはじめて到着した波を表す。以下同様にしてC₁とMの間で何度も反射されて結局Xにはじめて到着した波を表す。

この式は等比級数の和の公式を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1^C(x, t) &= ae^{i\omega t} T_{12} T_{23} e^{-a_1 - a_2 - a_3(x)} \\ &\quad \times \left[1 + R_{23} e^{-2a_2} \left\{ R_{21} + \frac{T_{21} R_{10} T_{12} e^{-2a_1}}{1 - R_{12} R_{10} e^{-2a_1}} \right\} \right] \end{aligned}$$

と表される。ただし a_1 と a_2 は(6)式を用い、 $a_3^0(x, t)$ は

$$a_3^0(x) = a_3(x - \ell_1 - \ell_2) + ik_3(x - \ell_1 - \ell_2) \quad (42)$$

と定義した。

(42)式の〔 〕の中の2項目をPで表すと

$$P = R_{23} e^{-2a_2} \left\{ R_{21} + \frac{T_{21} R_{10} T_{12} e^{-2a_1}}{1 - R_{12} R_{10} e^{-2a_1}} \right\} \quad (43)$$

となるが、この式は結合点C₂で弦Bからきた波を反射させC₁を通過した後、C₁とMでなん度も反射してC₁を通過してC₂にたどりついたすべての波を表している。このPを用いると時刻tにXにはじめて到着した波のすべてを表す $Y_1^C(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_1^C(x, t) &= ae^{i\omega t} T_{12} T_{23} e^{-a_1 - a_2 - a_3^0(x)} (1 + P + P^2 + P^3 + \dots) \\ &= ae^{i\omega t} \frac{T_{12} T_{23} e^{-a_1 - a_2 - a_3^0(x)}}{1 - P} \end{aligned} \quad (44)$$

と表されることがわかる。

さらに右へ伝播し、右端Nで反射され、時刻tに2度目にXに到着している波 $Y_2^C(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_2^C(x, t) &= R_{34} e^{-2a_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x) - i2k_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x)} Y_1^C(x, t) \\ &= G Y_1^C(x, t) \end{aligned} \quad (45)$$

と表される。ただし、Gは

$$G = R_{34} e^{-2a_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x) - i2k_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x)} = R_{34} e^{-2a_3(x)}, \quad (46)$$

$$a_3(x) = a_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x) + k_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x) \quad (47)$$

と定義した。

次に時刻tにXに3度目に到着する波 $Y_3^C(x, t)$ のうちC₂を弦B側から弦Cへ通過する波だけをとりだして $\tilde{Y}_3^C(x, t)$ とすると

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_3^C(x, t) &= [R_{32} e^{-2a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - i2k_3(x - \ell_1 - \ell_2)} \\ &\quad + T_{32} R_{21} T_{23} e^{-2a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - i2k_3(x - \ell_1 - \ell_2) - 2a_2 \ell_2 - i2k_2 \ell_2} \\ &\quad + T_{32} T_{21} R_{10} T_{12} T_{23} e^{-2a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - i2k_3(x - \ell_1 - \ell_2) - 2a_2 \ell_2 - i2k_2 \ell_2 - 2a_1 \ell_1 - i2k_1 \ell_1} \\ &\quad + T_{32} T_{21} R_{10} R_{12} R_{10} T_{12} T_{23} e^{-2a_3(x - \ell_1 - \ell_2) - i2k_3(x - \ell_1 - \ell_2) - 2a_2 \ell_2 - i2k_2 \ell_2 - 4a_1 \ell_1 - i4k_1 \ell_1} \\ &\quad + \dots] Y_2^C(x, t) \\ &= [e^{-2a_3(x)} \left\{ R_{32} + T_{32} T_{23} e^{-2a_2} \left(R_{21} + \frac{T_{21} R_{10} T_{21} e^{-2a_1}}{1 - R_{12} R_{10} e^{-2a_1}} \right) \right\}] Y_2^C(x, t) \end{aligned} \quad (48)$$

と表される。

時刻tにXに3度目に到着するすべての波 $Y_3^C(x, t)$ は、(48)式にC₂で弦B側へ何度も反射するすべての波を加えて表すことができ、(43)式のPを用いると

$$Y_3^C(x, t) = \left[e^{-2a_3(x)} \left\{ R_{32} + T_{32} T_{23} e^{-2a_2} \left(R_{21} + \frac{T_{21} R_{10} T_{21} e^{-2a_1}}{1 - R_{12} R_{10} e^{-2a_1}} \right) \right\} \right]$$

$$\times (1 + P + P^2 + \dots) \Big] \Big] Y_2^c(x, t) \quad (49)$$

と表される。

(49)式で $R_{10} = -1$ であることと(43)式を用いて計算を行うと

$$Y_3^c(x, t) = \left[e^{-2a_3(x)} \left\{ R_{32} + \frac{T_{32} T_{23} e^{-2a_2} \left(R_{21} - \frac{T_{21} T_{12} e^{-2a_1}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \right)}{1 - R_{23} e^{-a_2} \left(R_{21} - \frac{T_{21} T_{12} e^{-2a_1}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \right)} \right\} \right] Y_2^c(x, t) \quad (50)$$

$$= H Y_2^c(x, t) = H G Y_1^c(x, t)$$

と表される。ただし、 H は

$$H = e^{-2a_3(x)} \left\{ R_{32} + \frac{T_{32} T_{23} e^{-2a_2} \left(R_{21} - \frac{T_{21} T_{12} e^{-2a_1}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \right)}{1 - R_{23} e^{-a_2} \left(R_{21} - \frac{T_{21} T_{12} e^{-2a_1}}{1 + R_{12} e^{-2a_1}} \right)} \right\} \quad (51)$$

と定義した。

同様にして、 M , C_1 , C_2 , N で反射通過して時刻 t に X に 4 度目、5 度目、6 度目、……、に到着する波は、それぞれ、

$$Y_4^c(x, t) = G Y_3^c(x, t) = G^2 H Y_1^c(x, t), \quad (52)$$

$$Y_5^c(x, t) = H Y_4^c(x, t) = G^2 H^2 Y_1^c(x, t), \quad (53)$$

$$Y_6^c(x, t) = G Y_5^c(x, t) = G^3 H^2 Y_1^c(x, t), \quad (54)$$

⋮

と表すことができる。

これらの式から、時刻 t に X に到着している奇数番目の波と偶数番目の波は、それぞれ、等比級数の和の公式を用いて加え合わせることができる。(50)と(53)式より、時刻 t に奇数回目に X に到着した波の重ね合わせによる合成波は

$$Y_{\text{odd}}^c(x, t) = \{1 + GH + (GH)^2 + \dots\} Y_1^c(x, t)$$

$$= \frac{1}{1 - GH} Y_1^c(x, t) \quad (55)$$

となり、(45)、(52)と(54)式により、時刻 t に偶数回目に X に到着した波の重ね合わせによる合成波は

$$Y_{\text{even}}^c(x, t) = G \{1 + GH + (GH)^2 + \dots\} Y_1^c(x, t)$$

$$= \frac{G}{1 - GH} Y_1^c(x, t) \quad (56)$$

と表される。

(55)式と(56)式を加え合わせると、時刻 t に X に到着しているすべての波の重ね合わせによる振動変位 $Y^c(x, t)$ を得ることができる。その結果は

$$Y^c(x, t) = Y_{\text{odd}}^c(x, t) + Y_{\text{even}}^c(x, t) = \frac{1 + G}{1 - GH} Y_1^c(x, t) \quad (57)$$

となる。

この式の G , H と $Y_1^c(x, t)$ に、(46)、(51)と(44)式を代入し、簡単な計算を行うと、このときの位置 x の振動変位は、結局

$$Y^c(x, t) = a e^{i\omega t} \sinh a_3(x) / Z \quad (58)$$

と表すことができる。ここで分母 Z は前と同様(23)式で表される。

3. 減衰を無視した近似式と通常理論

3本の異なる密度よりなる複合弦の振動変位は、(22)、(40)と(50)式によって表されることがわかった。しかし、これらは複素数表示となっており、振動の様子を知るには複雑すぎる。振動の様子は、これらの式の虚数部分を取り出しコンピューターによってグラフ表示する必要がある。これらは次の機会に報告する。

ところで、これらの振動の様子を認べるため、(22)、(40)と(50)式そのものでなく、減衰係数をすべて0とした場合を考察する。

振動変位を表す(22)、(40)、(50)式とその分母 Z の式(28)の中の減衰係数 a_1 、 a_2 、 a_3 のすべて0として、その結果の式の虚数部分(これが実際の振動変位を表す)を取り出すことにする。このとき、双曲線関数の引数は純虚数となり

$$\sinh(i\beta) = i \sin \beta, \quad \cosh(i\beta) = \cos \beta \quad (59)$$

の関係が成立し、三角関数で表すことができる。

まず、すべての式に共通な分母 Z は、この近似で $Z = iZ_0$ とすると

$$\begin{aligned} Z_0 = & \sin a_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cos a_2 \cos a_3 - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sin a_2 \sin a_3 \right) \\ & + \cos a_2 \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2 \sin a_3 \right) \end{aligned} \quad (60)$$

と表すことができる。

弦A、弦Bと弦Cの振動変位 $y^A(x, t)$ 、 $y^B(x, t)$ 、 $y^C(x, t)$ は、同様の近似で、それぞれ

$$\begin{aligned} y^A(x, t) = & a \left[\sin a_1(x) \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cos a_2 \cos a_3 - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sin a_2 \sin a_3 \right\} \right. \\ & \left. + \cos a_1(x) \left\{ \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2 \sin a_3 \right\} \right] \sin \omega t / Z_0 \\ = & a \left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cos a_2 \cos a_3 - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sin a_2 \sin a_3 \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2 \sin a_3 \right)^2 \right\}^{1/2} \\ & \times \sin \{ a_1(x) + \varphi_1 \} \sin \omega t / Z_0, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} y^B(x, t) = & a \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2(x) \sin a_3 \right) \sin \omega t / Z_0 \\ = & a \left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \cos a_3 \right)^2 + \left(\sin a_3 \right)^2 \right\}^{1/2} \sin \{ a_2(x) + \varphi_2 \} \sin \omega t / Z_0, \end{aligned} \quad (62)$$

$$y^C(x, t) = a \sin \{ a_3(x) \} \sin \omega t / Z_0 \quad (63)$$

と表される。ただし、ここで φ_1 と φ_2 は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 = & \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cos a_2 \cos a_3 - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sin a_2 \sin a_3 \right) / K, \\ \sin \varphi_1 = & \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2 \sin a_3 \right) / K, \end{aligned} \quad (64)$$

$$K = \left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \cos a_2 \cos a_3 - \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sin a_2 \sin a_3 \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \sin a_2 \cos a_3 + \cos a_2 \sin a_3 \right)^2 \right\}^{1/2}$$

と

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \cos a_3 / \left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \cos a_3 \right)^2 + \left(\sin a_3 \right)^2 \right\}^{1/2},$$

$$\sin \varphi_2 = \sin \alpha_3 / \left\{ \left(\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}} \cos \alpha_3 \right)^2 + (\sin \alpha_3)^2 \right\}^{1/2} \quad (65)$$

と定義している。

これらは、通常の理論手法で、次のようにして導き出せる結果と一致する。

まず、弦A、弦B、弦Cの振動変位は、減衰がないと仮定すれば、つねに定常波となることに注意して、それぞれ $y_A(x, t)$ 、 $y_B(x, t)$ と $y_C(x, t)$ とすれば、

$$y_A(x, t) = A \sin\{k_1(\ell_1 - x) + \phi_1\} \sin \omega t, \quad (66)$$

$$y_B(x, t) = B \sin\{k_2(\ell_1 + \ell_2 - x) + \phi_2\} \sin \omega t, \quad (67)$$

$$y_C(x, t) = C \sin\{k_3(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 - x)\} \sin \omega t \quad (68)$$

と表される。ここで A 、 B と C はそれぞれの定常波の振幅を表す。また、 ϕ_1 と ϕ_2 は、接合点 C_1 と C_2 で節ではない振動も可能であると仮定した。 y_C の右端Mでは明かに節しかできないため位相定数は0とした。

これらの式(66)~(68)の未定の定数 A 、 B 、 C 、 ϕ_1 、 ϕ_2 は、次の5つの条件式

$$y_A(\ell_1, t) = y_B(\ell_1, t), \quad (69)$$

$$y_B(\ell_1 + \ell_2, t) = y_C(\ell_1 + \ell_2, t), \quad (70)$$

$$\frac{\partial y_A(\ell_1, t)}{\partial x} = \frac{\partial y_B(\ell_1, t)}{\partial x}, \quad (71)$$

$$\frac{\partial y_B(\ell_1 + \ell_2, t)}{\partial x} = \frac{\partial y_C(\ell_1 + \ell_2, t)}{\partial x}, \quad (72)$$

$$y_A(0, t) = a \sin \omega t \quad (73)$$

から求めることができる。(69)と(70)式は結合点 C_1 での両方の弦の変位の値とその接線勾配の値が等しいことを表し、(71)と(72)式は結合点 C_2 での両方の弦の変位の値とその接線勾配の値が等しいことを表している。また(73)式はM点で弦Aが振幅 a で $\sin \omega t$ で振動させられていることを示している。

この5つの条件式に(66)~(68)式を代入し、2・3の計算を行うと、結局、多重波の方法で求め、減衰係数を0と置いた(61)~(65)式とまったく同じ式となることが導ける。このことから、減衰係数を有限の値にたもった(22)、(40)と(58)式の虚数部分で表される弦の振動変位の式はより詳しい理論式を表現していると思なすことができる。

4. お わ り に

異なる線密度の3本の弦を結合した複合弦の共振現象を、弦上の波の伝播中の減衰効果を考慮して、弦の両端と結合点での反射と透過を考えに入れた多重波の手法で理論的な解析を行った。その結果、外から加えた振動(振動数 ν) に対する複合弦上の定常波の理論式を導くことができた。弦の結合点では、波の反射と透過が結合点の両側の線密度の値によって決まるため、単一弦の共振の様子とかなり異なった振動を行う。しかし、このときの共振定常波は、単一弦や2つの異なる線密度の弦と同様に第1の共振振動数から第 n の共振振動数へ共振振動数が大きくなる時順次1個ずつ腹の数が増加する有限な大きさをもつ振幅の定常波となる。また、波の減衰係数を0とすると通常の理論の無限大の値をもつ振幅の定常波に移行する。この複合弦の定常波のグラフ表示やその特徴についての議論は別の機会に報告したい。

参 考 文 献

- 1) 福山豊, 阿部由美子, 広瀬美恵子, 富山哲之: 物理教育, **34**-4 (1986) 237.
- 2) 福山豊: 長崎大学教育自然研報, 39 (1988) 21.
- 3) 福山豊: 長崎大学教育自然研報, 40 (1989) 13.
- 4) 福山豊, 森田まゆみ: 物理教育, **37**-3 (1989) 200.
- 5) 福山豊, 中島克彦: 物理教育, **38**-1 (1990) 17.
- 6) 福山豊: 長崎大学教育自然研報, 45 (1991) 7.
- 7) 福山豊: 長崎大学教育自然研報, 45 (1991) 5.