

## 共鳴・共振現象の多重波理論 IV

——一端を振動させた複合弦の強制振動——

福 山 豊

長崎大学教育学部物理学教室

(平成3年2月28日受理)

### Multiple Wave Theory of Resonance Phenomena IV

——Forced Vibration of Compound String Driven One End by a Speaker——

Yutaka FUKUYAMA

Department of Physics, Faculty of Education

Nagasaki University, Nagasaki, Japan

(Received Feb. 28, 1991)

#### Abstract

The resonance phenomena of a string with nonuniform mass density driven one end by a speaker are considered by applying the multiple wave theory. Analysis of modes of vibration and calculation of the frequencies are done. The results are the same as the case of a string with nonuniform mass density fixed at both ends.

#### §1. はじめに

著者は、すでに二つの線密度の異なった同じ長さの弦を結合させた複合弦の共振現象について考察を行った<sup>1)</sup>。このときは、両端を固定した複合弦の途中にU型磁石をまたがらせ、その両端に交流電流を流すときの共振定常波と共振振動数について議論し、実験との比較を行った<sup>2, 3)</sup>。今回は、一方の端を固定端とし、もう一方を振動源に結びつけ強制振動させた複合弦について同様の議論を行うことにした。この場合にも、多重波の手法は大変有効で、この複合弦の振動の様子を理論式で表示することにより、このときの振動の特徴を理解することができることを示した。

#### §2. 一端を振動させた複合弦の振動理論

複合弦のうち振動源に結びつけたほうの弦の長さ $l$ と線密度を $\rho$ とし、もう一方の固

定端に結びつけた側の弦の長さとし、線密度を  $\rho'$  とする。この複合弦の振動源側の端を座標の原点とし、弦の結合点を  $\ell$ ，反対の固定端を  $L(=\ell+\ell')$  とする。複合弦上の位置  $x$  は、(A)振動源と弦の結合点の間 ( $0 \leq x \leq \ell$ ) と、(B)この結合点と固定端の間 ( $\ell \leq x \leq L$ ) とに区別して振動の様子を別々に考察する (図 1)。この図の M, C, N と X は、それぞれ、振動源、複合弦の結合点、他方の弦の固定端、それに弦の上の着目点である。

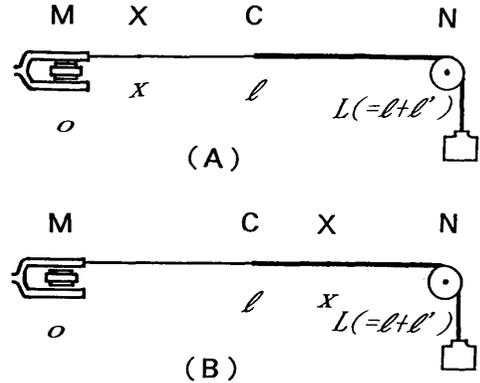


図 1  $x$  の範囲, (A)  $0 \leq x \leq \ell$ , (B)  $\ell \leq x \leq L$

振動源で発生する正弦波の振幅を  $A$  とし、振動数と角振動数を  $\nu$  と  $\omega$  とする。また、左と右の弦の伝播速度、波長と波数は、 $v, \lambda, k$  と  $v', \lambda', k'$  によって表すことにする。また、左端と右端での波の反射係数は、 $R_{10}(=-1)$  と  $R_{23}(=-1)$  で表し、左の弦の波が右の弦の左端で反射される反射係数と右の弦の波が左の弦の右端で反射される反射係数は、それぞれ、 $R_{12}$  と  $R_{21}(=-R_{12})$  と表す。さらに、左の弦の波が右の弦へ伝播するときの透過係数と右の弦の波が左の弦へ伝播するときの透過係数は、 $T_{12}(=1+R_{12})$  と  $T_{21}(=1+R_{21}=1-R_{12})$  とする。

振動源で発生した波は、距離とともに指数関数的に波の振幅が減衰するものと仮定した。左の弦を  $s$  だけ伝播すれば  $e^{-as}$  だけ減衰し、右の弦を  $s'$  だけ伝播すれば  $e^{-a's'}$  だけ減衰するものとした。 $a$  と  $a'$  は左の弦と右の弦の減衰係数を表すものとする。

### A. $0 \leq x \leq \ell$ の波の振動

時刻  $t$  における左側の弦上の位置  $x$  での振動変位  $y^A(x, t)$  は、振動源で発生し右へ伝播していく波が弦の両端と弦の結合点で反射してとじこめられた弦上のすべての波の重ね合わせによって表現できる。振動数の振動は  $A \sin \omega t$  と表されるとする。

まず、振動源で発生した正弦波が、時刻  $t$  にはじめて X に到着している波  $y_1^A(x, t)$  は

$$y_1^A(x, t) = A e^{-ax} \sin(\omega t - kx) \quad (1)$$

と表される。

以後の計算を簡単にするため正弦関数を複素数の虚数部で表示することにし、

$$y_1^A(x, t) = \text{Im}[Y_1^A(x, t)] \quad (2)$$

で定義する複素関数  $Y_1^A(x, t)$  を導入する。これからすべて複素数表示を用いて計算する。(1)式は、複素数表示では

$$Y_1^A(x, t) = A e^{-ax + i(\omega t - kx)} \quad (3)$$

と表される。

さらに右へ伝播し、弦の結合点 C や弦の右端 N で反射され、時刻  $t$  に 2 度目に X に到着している波  $Y_2^A(x, t)$  は

$$\begin{aligned} Y_2^A(x, t) = & R_{12} e^{-2a(\ell-x) - 2k(\ell-x)} Y_1^A(x, t) \\ & + T_{12} R_{23} T_{21} e^{-2a(\ell-x) - 2a'\ell - i2k(\ell-x) - i2k'\ell} Y_1^A(x, t) \\ & + T_{12} R_{23} R_{21} R_{23} T_{21} e^{-2a(\ell-x) - 4a'\ell - i2k(\ell-x) - i4k'\ell} Y_1^A(x, t) \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ T_{12}(R_{23}R_{21})^2 R_{23} T_{21} e^{-2a(\ell-x)-6a'\ell-i2k(\ell-x)-i6k'\ell} Y_1^A(x, t) \\ + \dots$$

と表される。

この式の右辺第1項は、Mで発生した波が右へ伝播し、結合点Cで1度反射されてXに到着した波を表し、第2項は、Mで発生した波が右へ伝播し結合点Cを通過し弦の右端Nで反射して、またCを通過してXに到着した波を表している。第3項は、Mからの波がCを通過し、Nで反射し、またCで反射され、さらにNで反射されCを通過してXに到着した波である。以下同様にして、Mで発生した波がCを通過しNで反射され、それがCで2度、3度、4度と反射されて時刻  $t$  にXに2度目に到着した波を表している。

(4)式は、等比級数の和の公式を用いて計算でき

$$Y_2^A(x, t) = [R_{12} + T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2a'\ell-i2k'\ell} \{1 + R_{21}R_{23}e^{-2a'\ell-i2k'\ell} + (R_{21}R_{23})^2 e^{-4a'\ell-i4k'\ell} \\ + \dots\}] \times e^{-2a(\ell-x)-2k(\ell-x)} Y_1^A(x, t) \\ = \left[ R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2a'\ell-i2k'\ell}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2a'\ell-i2k'\ell}} \right] e^{-2a(\ell-x)-i2k(\ell-x)} Y_1^A(x, t) \quad (5) \\ = R e^{-2a(\ell-x)-i2k(\ell-x)} Y_1^A(x, t)$$

と表される。

ここで  $R$  は

$$R = R_{12} + \frac{T_{12}R_{23}T_{21}e^{-2a'\ell-i2k'\ell}}{1 - R_{21}R_{23}e^{-2a'\ell-i2k'\ell}} \quad (6)$$

と定義した。

左端Mでさらに反射して、時刻  $t$  に3度目にXに到着している波  $Y_3^A(x, t)$  は

$$Y_3^A(x, t) = R_{10} e^{-2ax-i2kx} Y_2^A(x, t) \quad (7) \\ = R_{10} R e^{-2a\ell-i2k\ell} Y_1^A(x, t)$$

と表される。

ここで(7)式の  $Y_2^A(x, t)$  には(5)式を用いて変形を行った。

同様にして、M、C、Nで反射して、時刻  $t$  に4度目、5度目、6度目、……、にXに到着している波は、それぞれ、

$$Y_4^A(x, t) = R e^{-2a(\ell-x)-i2k(\ell-x)} Y_3^A(x, t) \\ = R_{10} R^2 e^{-2a(2\ell-x)-i2k(2\ell-x)} Y_1^A(x, t), \quad (8)$$

$$Y_5^A(x, t) = R_{10} e^{-2ax-i2kx} Y_4^A(x, t) \\ = R_{10}^2 R^2 e^{-4a\ell-i4k\ell} Y_1^A(x, t), \quad (9)$$

$$Y_6^A(x, t) = R e^{-2a(\ell-x)-i2k(\ell-x)} Y_5^A(x, t) \\ = R_{10}^3 R^3 e^{-2a(3\ell-x)-i2k(3\ell-x)} Y_1^A(x, t), \quad (10)$$

$$Y_7^A(x, t) = R_{10} e^{-2ax-i2kx} Y_6^A(x, t) \\ = R_{10}^3 R^3 e^{-6a\ell-i6k\ell} Y_1^A(x, t), \quad (11)$$

.....

と表すことができる。

これらの式から、時刻  $t$  にXに到着している奇数回目の波と偶数回目の波は、それぞれ、等比級数の和の公式を用いて加え合わせることができる。(3)、(7)、(9)と(11)の各式を用いて時刻  $t$  に奇数回目にXに到着した波の重ね合わせは、

$$\begin{aligned}
Y_{odd}^A(x, t) &= \{1 + R_{10}R e^{-2a\ell - i2k\ell} + (R_{10}R)^2 e^{-4a\ell - i4k\ell} \\
&\quad + (R_{10}R)^3 e^{-6a\ell - i6k\ell} + \dots\} Y_1^A(x, t) \\
&= \frac{1}{1 - R_{10}R e^{-2a\ell - i2k\ell}} Y_1^A(x, t)
\end{aligned} \tag{12}$$

となり, (5), (8)と(10)の各式から時刻  $t$  に偶数回目に  $X$  に到着した波の重ね合わせは

$$\begin{aligned}
Y_{even}^A(x, t) &= \{1 + R_{10}R e^{-2a\ell - i2k\ell} + (R_{10}R) e^{-4a\ell - i4k\ell} + \dots\} \\
&\quad \times R e^{-2a(\ell-x) - i2k(\ell-x)} Y_1^A(x, t) \\
&= \frac{R e^{-2a(\ell-x) - i2k(\ell-x)}}{1 - R_{10}R e^{-2a\ell - i2k\ell}} Y_1^A(x, t)
\end{aligned} \tag{13}$$

と表される。

(12)式と(13)式を加え合わせると, 時刻  $t$  に  $X$  に到着しているすべての波の重ね合わせによる振動変位の式  $Y^A(x, t)$  を得ることができる。その結果は

$$\begin{aligned}
Y^A(x, t) &= Y_{even}^A(x, t) + Y_{odd}^A(x, t) \\
&= \frac{1 + R e^{-2a(\ell-x) - i2k(\ell-x)}}{1 - R_{10}R e^{-2a\ell - i2k\ell}} Y_1^A(x, t)
\end{aligned} \tag{14}$$

となる。

ところで

$$T_{12} = 1 + R_{12}, \quad T_{21} = 1 + R_{21}, \quad R_{12} = -R_{21}, \quad R_{23} = R_{10} = -1 \tag{15}$$

であることを考慮すると(6)式は

$$R = \frac{R_{12} - e^{-2a'\ell - i2k'\ell}}{1 - R_{12}e^{-2a'\ell - i2k'\ell}} \tag{16}$$

となる。

(3)式と(16)式を用いると, 時刻  $t$  での  $X$  の場所での振動変位は

$$\begin{aligned}
Y^A(x, t) &= A e^{-ax + i(\omega t - kx)} \{ (1 - R_{12} e^{-2a'\ell - i2k'\ell}) + (R_{12} - e^{-2a'\ell - i2k'\ell}) \\
&\quad \times e^{-2a(\ell-x) - i2k(\ell-x)} \} / \{ 1 + R_{12} e^{-2a\ell - i2k\ell} - R_{12} e^{-2a'\ell - i2k'\ell} - e^{-2a\ell - i2k\ell - 2a'\ell - i2k'\ell} \} \\
&= A e^{i\omega t} \{ \sinh\{a(\ell-x) + a'\ell + ik(\ell-x) + ik'\ell\} \\
&\quad + R_{12} \sinh\{-a(\ell-x) + a'\ell + ik(\ell-x) + ik'\ell\} \\
&\quad \times 1 / \{ \sinh\{a\ell + a'\ell + i(k\ell + k'\ell)\} - R_{12} \sinh\{a\ell - a'\ell + i(k\ell - k'\ell)\} \} \}
\end{aligned} \tag{17}$$

と表すことができる。

## B. $\ell \leq x \leq L$ の波の振動

次に, 複合弦の右側の弦 (長さ  $\ell'$ ) の位置  $X$  ( $\ell \leq x \leq L$ ) の振動について考察を行う。

まず, 振動源  $M$  で発生した波が右へ伝播して右側の弦上の位置  $X$  に, 時刻  $t$  にはじめて到着している波  $Y_1^B(x, t)$  は, 次のような定義式

$$Y_0^B(x, t) = A T_{12} e^{-a\ell - a'(x-\ell) + i(\omega t - k\ell - k'(x-\ell))} \tag{18}$$

を用いて

$$\begin{aligned}
Y_1^B(x, t) &= Y_0^B(x, t) \\
&\quad + R_{12} R_{10} e^{-2a\ell - i2k\ell} Y_0^B(x, t) \\
&\quad + (R_{12} R_{10})^2 e^{-4a\ell - i4k\ell} Y_0^B(x, t) \\
&\quad + (R_{12} R_{10})^3 e^{-6a\ell - i6k\ell} Y_0^B(x, t) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{1 + R_{12}R_{10}e^{-2a\ell - i2k\ell} + (R_{12}R_{10})^2e^{-4a\ell - i4k\ell} + \dots\} Y_0^B(x, t) \\
&= \frac{1}{1 - R_{12}R_{10}e^{-2a\ell - i2k\ell}} Y_0^B(x, t)
\end{aligned} \tag{19}$$

と表すことができる。

時刻  $t$  に X に 2 度目に到着している波  $Y_2^B(x, t)$  は

$$Y_2^B(x, t) = R_{23}e^{-2a'(\ell + \ell' - x) - i2k'(\ell + \ell' - x)} Y_1^B(x, t) \tag{20}$$

となる。

時刻  $t$  に X に 3 度目に到着している波  $Y_3^B(x, t)$  は

$$\begin{aligned}
Y_3^B(x, t) &= R_{21}e^{-2a'(x - \ell) - i2k'(x - \ell)} Y_2^B(x, t) \\
&\quad + T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a'(x - \ell) - i2k'(x - \ell) - 2a\ell - i2k\ell} \{1 + R_{10}R_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell} \\
&\quad + (R_{10}R_{12})^2e^{-4a\ell - i4k\ell} + \dots\} Y_2^B(x, t) \\
&= \left\{ R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}}{1 - R_{10}R_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}} \right\} e^{-2a'(x - \ell) - i2k'(x - \ell)} Y_2^B(x, t) \\
&= R_{23}S e^{-2a'\ell - i2k'\ell} Y_1^B(x, t)
\end{aligned} \tag{21}$$

と表すことができる。

ただし、 $S$  は

$$S = R_{21} + \frac{T_{21}R_{10}T_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}}{1 - R_{10}R_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}} \tag{22}$$

と定義した。

同様にして、時刻  $t$  に X に 4 度目、5 度目、6 度目、……に到着している波は、それぞれ

$$\begin{aligned}
Y_4^B(x, t) &= R_{23}e^{-2a'(\ell + \ell' - x) - i2k'(\ell + \ell' - x)} Y_3^B(x, t) \\
&= R_{23}^2 S e^{-2a'(\ell + 2\ell' - x) - i2k'(\ell + 2\ell' - x)} Y_1^B(x, t),
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
Y_5^B(x, t) &= S e^{-2a'(x - \ell) - i2k'(x - \ell)} Y_4^B(x, t) \\
&= R_{23}^2 S^2 e^{-4a'\ell - i4k'\ell} Y_1^B(x, t),
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
Y_6^B(x, t) &= R_{23}e^{-2a'(\ell + \ell' - x) - i2k'(\ell + \ell' - x)} Y_5^B(x, t) \\
&= R_{23}^3 S^2 e^{-2a'(\ell + 3\ell' - x) - i2k'(\ell + 3\ell' - x)} Y_1^B(x, t),
\end{aligned} \tag{25}$$

.....

と表すことができる。

(19)~(21)式と(23)~(25)式を用いて、時刻  $t$  に X に到着した奇数回目と偶数回目の重ね合わせの波は、それぞれ、

$$\begin{aligned}
Y_{odd}^B(x, t) &= \{1 + R_{23}S e^{-2a'\ell - i2k'\ell} + (R_{23}S)^2 e^{-4a'\ell - i4k'\ell} + \dots\} Y_1^B(x, t) \\
&= \frac{1}{1 - R_{23}S e^{-2a'\ell - i2k'\ell}} Y_1^B(x, t),
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
Y_{even}^B(x, t) &= \{1 + R_{23}S e^{-2a'\ell - i2k'\ell} + (R_{23}S)^2 e^{-4a'\ell - i4k'\ell}\} \\
&\quad \times R_{23}e^{-2a'(\ell + \ell' - x) - i2k'(\ell + \ell' - x)} Y_1^B(x, t) \\
&= \frac{R_{23}e^{-2a'(\ell + \ell' - x) - i2k'(\ell + \ell' - x)}}{1 - R_{23}S e^{-2a'\ell - i2k'\ell}} Y_1^B(x, t)
\end{aligned} \tag{27}$$

と表される。

(26)式と(27)式を加え合わせると、時刻  $t$  に X に到着しているすべての波の重ね合わせによる振動変位の式  $Y^B(x, t)$  を得ることができ、その結果は

$$\begin{aligned}
Y^B(x, t) &= Y_{\text{odd}}^B(x, t) + Y_{\text{even}}^B(x, t) \\
&= \frac{1 + R_{23}e^{-2a'(\ell+\ell'-x) - i2k'(\ell+\ell'-x)}}{1 - R_{23}Se^{-2a'\ell - i2k'\ell}} Y_1^B(x, t)
\end{aligned} \tag{28}$$

となる。

$S$  の定義の式(22)は, (15)式を考慮して

$$S = \frac{-R_{12} - e^{-2a\ell - i2k\ell}}{1 + R_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell}} \tag{29}$$

と変形できる。

そこで (29)式の  $S$  と  $Y_1^B(x, t)$  に, それぞれ, (29)式と(18), (19)式を代入すると

$$\begin{aligned}
Y^B(x, t) &= Ae^{i\omega t} e^{-a\ell - a'(x-\ell) - i(k\ell + k'(x-\ell))} \\
&\quad \times (1 + R_{12}) \{1 - e^{-2a'(\ell+\ell'-x) - i2k'(\ell+\ell'-x)}\} \\
&\quad \times 1 / \{1 + R_{12}e^{-2a\ell - i2k\ell} - R_{12}e^{-2a'\ell - i2k'\ell} - e^{-2a\ell - i2k\ell - 2a'\ell - i2k'\ell}\}
\end{aligned} \tag{30}$$

と表され, さらに 2, 3 の計算を行うと

$$Y^B(x, t) = \frac{Ae^{i\omega t} (1 + R_{12}) \sinh\{a'(\ell + \ell' - x) + ik'(\ell + \ell' - x)\}}{\sinh\{(a\ell + a'\ell') + i(k\ell + k'\ell')\} - R_{12} \sinh\{(a\ell - a'\ell') + i(k\ell - k'\ell')\}} \tag{31}$$

と表すことができる。

上で求めた  $A$  と  $B$  の場合の振動の変位(17)式と(31)式は, それぞれ, 次式の  $L$  を  $A$  と  $B$  とすれば

$$\begin{aligned}
Y^L(x, t) &= Ae^{i\omega t} [\sinh\{a(\ell - v) + a'(\ell + \ell' - w) + ik(\ell - v) + ik'(\ell + \ell' - w)\} \\
&\quad + R_{12} \sinh\{-a(\ell - v) + a'(\ell + \ell' - w) - ik(\ell - v) + ik'(\ell + \ell' - w)\}] \\
&\quad \times 1 / [\sinh\{(a\ell + a'\ell') + i(k\ell + k'\ell')\} - R_{12} \sinh\{(a\ell - a'\ell') + i(k\ell - k'\ell')\}]
\end{aligned} \tag{32}$$

と表される。ただし

$$\begin{aligned}
A \text{ の場合: } & v = x, w = \ell, \\
B \text{ の場合: } & v = \ell, w = x
\end{aligned} \tag{33}$$

を代入するものとする。

(17)式と(31)式, あるいは(32)式と(33)式から, 2つの弦の結合点である境界  $x = \ell$  で両方の振動変位が連続であることが保障されなければならないが, これらに  $x = \ell$  を代入すると

$$Y^A(\ell, t) = Y^B(\ell, t) \tag{34}$$

となることが容易に導ける。

(32)式は, 双曲線正弦関数に関する

$$\sinh(A + iB) = \sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B} e^{i\varphi}, \tag{35}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sinh A \cos B}{\sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B}}, \quad \sin \varphi = \frac{\cosh A \sin B}{\sqrt{\cosh^2 A - \cos^2 B}} \tag{36}$$

の関係をを用いてさらに変形することができる

$$\begin{aligned}
Y^L(x, t) &= Ae^{i\omega t} \\
&\quad \times [\sqrt{\cosh^2\{a(\ell - v) + a'(\ell + \ell' - w)\} - \cos^2\{k(\ell - v) + k'(\ell + \ell' - w)\}} e^{i\varphi_1} \\
&\quad + R_{12} \sqrt{\cosh^2\{-a(\ell - v) + a'(\ell + \ell' - w)\} - \cos^2\{-k(\ell - v) + k'(\ell + \ell' - w)\}} e^{i\varphi_2}] \\
&\quad \times 1 / [\sqrt{\cosh^2(a\ell + a'\ell') - \cos^2(k\ell + k'\ell')} e^{i\varphi_3} \\
&\quad - R_{12} \sqrt{\cosh^2(a\ell - a'\ell') - \cos^2(k\ell - k'\ell')} e^{i\varphi_4}]
\end{aligned} \tag{37}$$

と表される。ただし,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  と  $\varphi_4$  は, おのおの,

$$\begin{aligned}\cos \varphi_1 &= \frac{\sinh\{a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\} \cos\{k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\}-\cos\{k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}}, \\ \sin \varphi_1 &= \frac{\cosh\{a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\} \sin\{k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\}-\cos\{k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}},\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi_2 &= \frac{\sinh\{-a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\} \cos\{-k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{-a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\}-\cos\{-k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}}, \\ \sin \varphi_2 &= \frac{\cosh\{-a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\} \sin\{k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}{\sqrt{\cosh^2\{-a(\ell-v)+a'(\ell+\ell'-w)\}-\cos\{-k(\ell-v)+k'(\ell+\ell'-w)\}}},\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi_3 &= \frac{\sinh(al+a'l') \cos(kl+k'l')}{\sqrt{\cosh^2(al+a'l')-\cos^2(kl+k'l')}}, \\ \sin \varphi_3 &= \frac{\cosh(al+a'l') \sin(kl+k'l')}{\sqrt{\cosh^2(al+a'l')-\cos^2(kl+k'l')}},\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi_4 &= \frac{\sinh(al-a'l') \cos(kl-k'l')}{\sqrt{\cosh^2(al-a'l')-\cos^2(kl-k'l')}}, \\ \sin \varphi_4 &= \frac{\cosh(al-a'l') \sin(kl-k'l')}{\sqrt{\cosh^2(al-a'l')-\cos^2(kl-k'l')}},\end{aligned}\quad (41)$$

と表される。

### § 3. 振幅の減衰が無視できる極限の場合の振動変位

前節で求めた振動変位の式を、実際の振動と比較するために実数表示による振動変位式を導かなければならないが、かなり複雑な式であるため、ここでは、減衰係数が小さい極限の場合を考察し、これらの振動の特徴を見出したい。

(35)式と(36)式から

$$\sinh(iB) = \sin B \cdot e^{i\pi/2} \quad (42)$$

となるので、振動変位(17)式と(31)式は、それぞれ、 $y_0^A(x, t)$  と  $y_0^B(x, t)$  で表記すると

$$y_0^A(x, t) = \frac{A[\sin\{k(\ell-x)+k'\ell'\} + R_{12}\sin\{-k(\ell-x)+k'\ell'\}]}{\sin(kl+k'\ell') - R_{12}\sin(kl-k'\ell')} \sin \omega t, \quad (43)$$

$$y_0^B(x, t) = \frac{A(1+R_{12}) \sin\{k'(\ell+\ell'-x)\}}{\sin(kl+k'\ell') - R_{12}\sin(kl-k'\ell')} \sin \omega t, \quad (44)$$

と表される。

(43)式の分子は、一つの正弦関数に合成でき

$$y_0^A(x, t) = \frac{A\sqrt{1+R_{12}^2-2R_{12}\cos 2k'\ell'} \cdot \sin\{k(\ell-x)+\varphi_0\}}{\sin(kl+k'\ell') - R_{12}\sin(kl-k'\ell')} \sin \omega t, \quad (45)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{(1-R_{12}) \cos k'\ell'}{\sqrt{1+R_{12}^2-2R_{12}\cos 2k'\ell'}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{(1+R_{12}) \sin k'\ell'}{\sqrt{1+R_{12}^2-2R_{12}\cos 2k'\ell'}} \quad (46)$$

と表され、振動の形は複合弦のどちらの弦も単一正弦関数で表されることが導かれる。

次に複合弦のどちらの弦も同じ長さ  $\ell = \ell' = \ell_0$  の場合を考えると、(43)と(44)式は

$$y_0^A(x, t) = \frac{A[\sin\{k(\ell_0-x)+k'\ell_0\} + R_{12}\sin\{-k(\ell_0-x)+k'\ell_0\}]}{\sin((k+k')\ell_0) - R_{12}\sin((k-k')\ell_0)} \sin \omega t \quad (47)$$

$$y_0^B(x, t) = \frac{A(1+R_{12})\sin\{k'(2\ell_0-x)\}}{\sin\{(k+k')\ell_0\}-R_{12}\sin\{(k-k')\ell_0\}} \sin \omega t \quad (48)$$

と表される。

#### § 4. 共振の条件と共振振動数のずれ

複合弦を構成する密度の異なる 2 本の弦の長さが等しく、かつ、それらの減衰係数がほとんど無視できる場合の振動の変位式(47)と(48)が共振するための条件を考察しよう。(47)式と(48)式の振幅の大きさが極大になるとき共振が生じると考えられるので、これらの式の分母の 2 乗が振動数の変化で極小値をとるという条件を検討すればよいことがわかる。これらの分母の 2 乗は同じ形をしており、振動数  $\nu$  の関数  $W(\nu)$  で表すと

$$W(\nu) = \left[ \sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} - R_{12}\sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} \right]^2 \quad (49)$$

となる。

この関数の  $\nu$  での微分は

$$\begin{aligned} \frac{dW(\nu)}{d\nu} = & 2 \left[ \sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} - R_{12}\sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} \right] \\ & \times \left[ \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0 \cdot \cos\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} - R_{12}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0 \cdot \cos\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)2\pi\ell_0\nu\right\} \right] \quad (50) \end{aligned}$$

となる。

これから  $\nu$  の変化による  $W(\nu)$  の極値をとる条件式は(50)式の右辺が 0、すなわち、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)\sin\left\{\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\right)4\pi\ell_0\nu\right\} - 2R_{12}\left\{\frac{1}{v}\sin\left(\frac{4\pi\ell_0}{v}\nu\right) - \frac{1}{v'}\sin\left(\frac{4\pi\ell_0}{v'}\nu\right)\right\} \\ & + R_{12}^2\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)\sin\left\{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right)4\pi\ell_0\nu\right\} = 0 \quad (51) \end{aligned}$$

と表される。

報告 1 では、これを用いて共振振動数の近似式を導いたが<sup>1)</sup>、今回は線密度が 1 対 4 の場合の厳密な解の導出を試みる。複合弦の 2 つの弦の密度比が

$$\rho : \rho' = 1 : 4 \quad (52)$$

の場合は、弦の振幅の伝播速度は線密度と弦の張力  $T$  とで

$$v = \nu\lambda = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad v' = \nu'\lambda' = \sqrt{\frac{T}{\rho'}} \quad (53)$$

と表されるので、波長と伝播速度は

$$\lambda' = \lambda/2, \quad v' = v/2 \quad (54)$$

となることがわかる。

(54)式の  $v'$  を(51)式に代入して  $v'$  を  $v$  で表すと

$$\begin{aligned} & \frac{3}{v}\sin\left\{\frac{3}{v} \cdot 4\pi\ell_0\nu\right\} - 2R_{12}\left\{\frac{1}{v}\sin\left(\frac{4\pi\ell_0}{v}\nu\right) - \frac{2}{v}\sin\left(\frac{2}{v} \cdot 4\pi\ell_0\nu\right)\right\} \\ & + R_{12}^2\left(-\frac{1}{v}\right)\sin\left\{\left(-\frac{1}{v}\right)4\pi\ell_0\nu\right\} = 0 \quad (55) \end{aligned}$$

となる。

(55)式の中で振動数  $\nu$  を次の  $X$  で

$$X \equiv 4\pi\ell_0\nu/\nu \quad (56)$$

と置きかえると、この式は、

$$3 \sin(3X) + R_{12}\{4 \sin(2X) - 2 \sin X\} + R_{12}^2 \sin X = 0 \quad (57)$$

となる。

3倍角と2倍角の公式

$$\sin 3X = -4 \sin^3 X + 3 \sin X, \quad \sin 2X = 2 \sin X \cdot \cos X \quad (58)$$

を用いると(57)式は

$$\sin X \{12 \cos^2 X + 8R_{12} \cos X - 3 - 2R_{12} + R_{12}^2\} = 0 \quad (59)$$

となり、さらにこれから

$$\sin X = 0 \quad (60)$$

と

$$12 \cos^2 X + 8R_{12} \cos X - 3 - 2R_{12} + R_{12}^2 = 0 \quad (61)$$

が解となる可能性があることがわかる。

$R_{12}$  を計算するため、インピーダンス  $Z$  と  $Z'$

$$Z = \sqrt{\rho T}, \quad Z' = \sqrt{\rho' T} \quad (62)$$

を用いると

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = -R_{21} \quad (63)$$

と表され、 $\rho$  と  $\rho'$  の比が1対4であることから

$$R_{12} = -1/3 \quad (64)$$

と表されることがわかる。

この結果、(61)式は

$$12 \cos^2 X - (8/3) \cos X - (20/9) = 0 \quad (65)$$

となり、 $\cos X$  について2次方程式の解を求めると

$$\cos X = -\frac{1}{3}, \quad \cos X = \frac{5}{9} \quad (66)$$

となる。

(60)式と(66)式が極小値であるか否かを調べるために  $W(\nu)$  の  $\nu$  による2階微分の値が正であるか否かを計算してみる。これは  $\tilde{W}(X) = W(\nu)$  を  $X$  で微分することに対応し、

$$\frac{d\tilde{W}}{dX} = a \sin X \left\{ 12 \cos^2 X - \frac{8}{3} \cos X - \frac{20}{9} \right\} \quad (a: \text{正の比例定数}) \quad (67)$$

と書くことができるので

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{W}}{dX^2} &= a \cos X \left\{ 12 \cos^2 X - \frac{8}{3} \cos X - \frac{20}{9} \right\} \\ &\quad + a \sin X \left\{ -24 \cos X \sin X + \frac{8}{3} \sin X \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

となる。

(68)式から(59)式を満たし、 $\tilde{W}(X)$  (すなわち  $W(\nu)$ ) が極小になる解は

$$\sin X = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos X = -\frac{1}{3}, \quad (69)$$

$$\sin X = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos X = -\frac{1}{3}, \quad (70)$$

$$\sin X = 0, \quad \cos X = 1 \quad (71)$$

となることが導かれる。

反射係数  $R_{12}$  が 0 に対応する  $X$  を  $X_0$  (すなわち  $\nu_0$ ) とすると

$$\sin X_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos X_0 = -\frac{1}{2} \quad (72)$$

から

$$X_0 = 2\pi/3, \quad \nu_0 = v/(6\ell_0) \quad (73)$$

となる。

この  $\nu_0$  を用いると(69)~(71)式の解は,  $n$  を自然数として

$$\begin{aligned} \nu_{3n-2} &= \{(3n-2) - \alpha\} \nu_0, \\ \nu_{3n-1} &= \{(3n-1) + \alpha\} \nu_0, \\ \nu_{3n} &= 3n\nu_0 \end{aligned} \quad (74)$$

と表わすことができる。ただし  $\alpha = 0.09$  となる。

これは  $\nu_1$  が  $\nu_0$  の値から約 1 割小さい振動数で共振するということを表しており, 両端を固定端とした複合弦の議論の近似解とほぼ一致していることがわかる<sup>1)</sup>。これらの結果から複合弦の共振振動数は, 単に  $\nu_0$  の整数倍ではなくずれを生じることが定性的に理解できるようになった。また, この共振振動数での具体的な定常波の形は(47)と(48)式のコンピューターによるシミュレーションを行うことによって表現できる。

## § 5. お わ り に

一端を振動させた複合弦と両端を固定して磁石と交流によって振動させた複合弦は, 2つの弦の境界で波の反射が生じるため, 共振振動数にずれを生じることが理解できたが, まだ実験との定量的な比較を行うまでにはいたっていない。定量的比較を行うためには減衰係数  $\alpha$  と  $\alpha'$  の具体的な振動数依存性の形を知る必要があるが, どのようになっているのかわからない。また, 実験も理論との比較にたえるデータが必要となる。今後の検討課題である。

## 参 考 文 献

- 1) 福山豊: 長崎大教育自然研報, 44 (1990) 7.
- 2) D.E. Hall: Phys. Teach. 27 (1989) 673.
- 3) T.D. Rossing: Am. J. Phys. 43 (1975) 735.