

共鳴・共振現象の多重波理論II

——両端を固定した弦の強制振動——

福 山 豊

長崎大学教育学部物理学教室

(昭和63年10月31日受理)

Multiple Wave Theory of Resonance Phenomena II

Yutaka FUKUYAMA

Department of Physics, Faculty of Education

Nagasaki University, Nagasaki, Japan

(Received Oct. 31, 1988)

Abstract

The resonance Phenomena of a stretched string are considered. The stretched string are fixed at both ends. Some frequencies of an a-c voltage are applied to both ends of the string. In this case the string are vibrated by a magnet. Expressions of the vibration in the stretched string are obtained from the fact that the wave motion in the string is represented to be a superposition of all waves reflected at both ends.

§1. は じ め に

著者らは、すでに、初等物理学の学習課程でよくとりあつかわれる共鳴・共振現象の問題点を指摘し、それらを解決するために共鳴・共振現象の理論式を発展させ、実験との比較をおこなってきた^{1)~9)}。特に弦の振動については、弦の一端に滑車をかいしておもりをさげ、他端を電磁音叉に固定し振動させたときの強制振動について、理論の検討ならびに実験結果との比較をおこなった³⁾。その結果、多重波による理論は、この共振現象を大変よく記述していることがわかった。

そこで、本報では、弦の共振としてよくとりあつかわれるもう一つの実験、すなわち、弦の両端を固定し、その両端に交流電流を流し、弦の途中に弦をまたがるように磁石を置き、それによって弦の振動を励起させる共振の実験をとりあげ、多重波による理論を展開

した。この理論による弦の振動を表す式は、波の減衰の効果を示す係数を零とすると、レイリーが求めた式となることが導ける。このことから、多重波による弦の振動の式は、レイリーの式を拡張したより一般的な式を表現していることがわかった。

§2では、ここでの理論でとりあつかう実験の概要を、§3では、この実験による弦の振動を、多重波によって表現する。§4と§5は、§3での多重波の具体的な計算をおこない、弦のこのときの振動の式を導きだす。§6は、これらの式でもちいた減衰係数を零としたときにレイリーの式が導かれることを示す。

§2. 実 験 装 置

右の図に示すように、弦としたエナメル線の一方をスタンドで固定し、他方は滑車にかけて、その先端におもりをつるす。スタンドと滑車の途中に、エナメル線をまたいでU型磁石を置く。エナメル線の両端には、オシレーターで発生させ、パワーアンプで増幅させた交流電流を流すと、電流の向きと磁界の向きとに直角方向にエナメル線に力を受け振動を生じる^{10)~12)}。

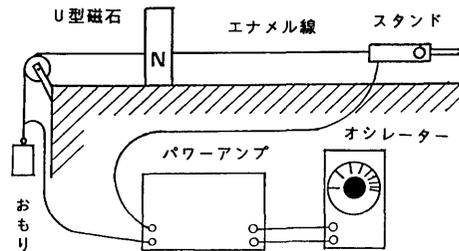


図1. 実験装置図

オシレーターを低い周波数から高い周波数へと少しずつ変化させると、ある周波数 f_0 で大きい振動を生じる。このときの波の形は、両端が節で中央が腹となった定常波である。さらに周波数を大きくすると、ほぼ f_0 の2倍の周波数でも大きな振動が生じる。このときは両端と中央が節である定常波となっている。一般に f_0 の n (n は自然数) 倍の周波数でも大きな振動が励起され、両端が節で、 n 個の腹をもつ定常波となる。このとき弦は共振しているという。

§3. 弦の変位の多重波表示

両端を固定した長さ l の弦の左の端を座標の原点としてとり、それより d だけ離れた点に磁石を固定しているものとする。このとき弦の両端に交流電流を流し、励起された弦の振動のようすを調べよう。弦上の位置 x が磁石の位置 d より左にあるか右にあるかにより振動の表現がことなるので以後はこれらを別々に考察する。

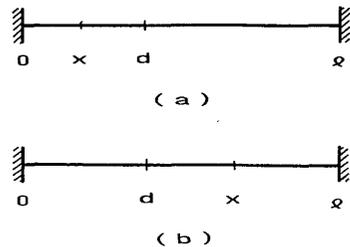


図2. 弦の座標表示

磁石のところで発生した弦上の波の振幅を A 、角振動数を ω 、弦を伝わる波の速さを v で表す。また両端（固定端）で反射された波は、一度反射されるごとに π だけ位相が変化する。また、波は伝播する距離を s とすると、振幅は e^{-as} 倍小さくなるものとした。ここで a は減衰係数である。

A. $0 \leq x \leq d$ の弦の変位

時刻 t のとき弦上 x の位置での変位 $y^A(x, t)$ は、磁石の位置で発生して右へ伝播する波 $y_R^A(x, t)$ と左へ伝播する波 $y_L^A(x, t)$ との合成で表示できる。これらの波を求めてみよう。

まず右へ伝播していく波は

$$\begin{aligned}
 y_R^A(x, t) = & A e^{-a(2\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\
 & + A e^{-a(2\ell+x-d)} \sin [\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\
 & + A e^{-a(4\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\
 & + A e^{-a(4\ell+x-d)} \sin [\omega\{t-(4\ell+x-d)/v\} + 4\pi] \\
 & + A e^{-a(6\ell-x-d)} \sin [\omega\{t-(6\ell-x-d)/v\} + 5\pi] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{1}$$

と表すことができる。

この式の右辺第1項は、 d のところで発生した波が右へ進行し、右の端で1度反射され x に到着した波、第2項は、さらに左の端でもう1度反射されてまた x に到着した波である。以下同様にして、弦の両端でつぎつぎと、さらに1度ずつ反射されて x に到着した波を表している。

つぎに、左へ伝播していく波は

$$\begin{aligned}
 y_L^A(x, t) = & A e^{-a(d-x)} \sin [\omega\{t-(d-x)/v\}] \\
 & + A e^{-a(d+x)} \sin [\omega\{t-(d+x)/v\} + \pi] \\
 & + A e^{-a(2\ell+d-x)} \sin [\omega\{t-(2\ell+d-x)/v\} + 2\pi] \\
 & + A e^{-a(2\ell+d+x)} \sin [\omega\{t-(2\ell+d+x)/v\} + 3\pi] \\
 & + A e^{-a(4\ell+d-x)} \sin [\omega\{t-(4\ell+d-x)/v\} + 4\pi] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{2}$$

と表すことができる。

この式の右辺第1項は、 d のところで発生し左へ伝播して x に到着した波、第2項は、弦の左端で1回反射されて x のところに到着した波である。以下の項も同様にして弦の両端でつぎつぎと反射されて x に到着した波である。

この場合の弦の振動による変位は、(1)式と(2)式の合成

$$y^A(x, t) = y_R^A(x, t) + y_L^A(x, t) \tag{3}$$

で記述できる。

B. $d \leq x \leq \ell$ の弦の変位

x の位置が磁石の位置よりも右にある場合も同様に考察することができる。時刻 t のとき x の位置での弦の変位 $y^B(x, t)$ は磁石のところで発生し右へ伝播する波 $y_R^B(x, t)$ と左へ伝播する波 $y_L^B(x, t)$ の合成

$$y^B(x, t) = y_R^B(x, t) + y_L^B(x, t) \tag{4}$$

で記述できる。

右へ伝播する波は

$$\begin{aligned}
 y_R^B(x, t) = & Ae^{-a(x-d)} \sin[\omega\{t-(x-d)/v\}] \\
 & + Ae^{-a(2\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\
 & + Ae^{-a(2\ell+x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\
 & + Ae^{-a(4\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\
 & + Ae^{-a(4\ell+x-d)} \sin[\omega\{t-(4\ell+x-d)/v\} + 4\pi] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{5}$$

と表される。

また、左へ伝播する波は

$$\begin{aligned}
 y_L^B(x, t) = & Ae^{-a(x+d)} \sin[\omega\{t-(x+d)/v\} + \pi] \\
 & + Ae^{-a(2\ell-x+d)} \sin[\omega\{t-(2\ell-x+d)/v\} + 2\pi] \\
 & + Ae^{-a(2\ell+x+d)} \sin[\omega\{t-(2\ell+x+d)/v\} + 3\pi] \\
 & + Ae^{-a(4\ell-x+d)} \sin[\omega\{t-(4\ell-x+d)/v\} + 4\pi] \\
 & + Ae^{-a(4\ell+x+d)} \sin[\omega\{t-(4\ell+x+d)/v\} + 5\pi] \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

と表される。

各項の物理的意味は **A** の場合と同じように解釈できる。

つぎに、これら(1), (2), (5)と(6)式を具体的に計算する。

§ 4. 多重波の計算 (A の場合)

まず(1)式で表される $y_R^A(x, t)$ を考察する。この式を複素数で表示し、これを $Y_R^A(x, t)$ とすると、 $y_R^A(x, t)$ は

$$y_R^A(x, t) = \text{Im}[Y_R^A(x, t)] \tag{7}$$

で表される。

ここで波数 $k = \omega/v$ を用いると、 $Y_R^A(x, t)$ は

$$\begin{aligned}
 Y_R^A(x, t) = & -Ae^{-a(2\ell-x-d)+i(\omega t-k(2\ell-x-d))} + Ae^{-a(2\ell+x-d)+i(\omega t-k(2\ell+x-d))} \\
 & -Ae^{-a(4\ell-x-d)+i(\omega t-k(4\ell-x-d))} + Ae^{-a(4\ell+x-d)+i(\omega t-k(4\ell+x-d))} \\
 & -Ae^{-a(6\ell-x-d)+i(\omega t-k(6\ell-x-d))} + \dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

これらは、左へ進行する波を表す奇数項と右へ進行する波を表す偶数項とに別けることができる。奇数項の和を $Y_R^A, \text{odd}(x, t)$ 、偶数項の和を $Y_R^A, \text{even}(x, t)$ とすると、これらは等比級数の形にかき表すことができる。 $Y_R^A, \text{odd}(x, t)$ と $Y_R^A, \text{even}(x, t)$ は、おのおの

$$Y_R^A, \text{odd}(x, t) = -Ae^{-a(2\ell-x-d)+i(\omega t-k(2\ell-x-d))} \{1 + e^{-2a\ell - i2k\ell} + e^{-4a\ell - i4k\ell} + \dots\}$$

$$= \frac{-Ae^{-a(2\ell-x-d)+i(\omega t-k(2\ell-x-d))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Y_{R, even}^A(x, t) &= Ae^{-a(2\ell+x-d)+i(\omega t-k(2\ell+x-d))} \{1 + e^{-2a\ell-i2k\ell} + e^{-4a\ell-i4k\ell} + \dots\} \\ &= \frac{Ae^{-a(2\ell+x-d)+i(\omega t-k(2\ell+x-d))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}} \end{aligned} \quad (10)$$

と表される。

つぎに、(2)式の複素数表示を $Y_L^A(x, t)$ とすると

$$y_L^A(x, t) = \text{Im}[Y_L^A(x, t)] \quad (11)$$

の関係となり

$$\begin{aligned} Y_L^A(x, t) &= Ae^{-a(d-x)+i(\omega t-k(d-x))} - Ae^{-a(d+x)+i(\omega t-k(d+x))} \\ &\quad + Ae^{-a(2\ell+d-x)+i(\omega t-k(2\ell+d-x))} - Ae^{-a(2\ell+d+x)+i(\omega t-k(2\ell+d+x))} \\ &\quad + Ae^{-a(4\ell+d-x)+i(\omega t-k(4\ell+d-x))} - \dots \end{aligned} \quad (12)$$

で表される。奇数項の和と偶数項の和を、おのおの、 $Y_{L, odd}^A(x, t)$ と $Y_{L, even}^A(x, t)$ とする

$$\begin{aligned} Y_{L, odd}^A(x, t) &= Ae^{-a(d-x)+i(\omega t-k(d-x))} \{1 + e^{-2a\ell-i2k\ell} + e^{-4a\ell-i4k\ell} + \dots\} \\ &= \frac{Ae^{-a(d-x)+i(\omega t-k(d-x))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Y_{L, even}^A(x, t) &= -Ae^{-a(d+x)+i(\omega t-k(d+x))} \{1 + e^{-2a\ell-i2k\ell} + e^{-4a\ell-i4k\ell} + \dots\} \\ &= \frac{-Ae^{-a(d+x)+i(\omega t-k(d+x))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}}, \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

付録で求めた公式 (A. 5) を用いると (9), (10), (13) と (14) の各式は容易に計算でき、その結果 $y^A(x, t)$ は

$$y^A(x, t) = \frac{e^{a\ell} A}{\sqrt{2}(\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell)} \cdot G, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} G &= -e^{-a(2\ell-x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell-x-d) - \varphi\} \\ &\quad + e^{-a(2\ell+x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell+x-d) - \varphi\} \\ &\quad + e^{-a(d-x)} \sin \{\omega t - k(d-x) - \varphi\} \\ &\quad - e^{-a(d+x)} \sin \{\omega t - k(d+x) - \varphi\} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。

ただし、ここで位相 φ は、(A. 4) 式から

$$\tan \varphi = \frac{e^{-2a\ell} \sin 2k\ell}{1 - e^{-2a\ell} \cos 2k\ell} \quad (17)$$

で定義される。

ここで(16)式の右辺の第1項 G_1 と第3項 G_3 は左へ進行する波を表しており

$$\begin{aligned}
 G_1 + G_3 &= -e^{-a(2\ell-x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell-x-d) - \varphi\} \\
 &\quad + e^{-a(d-x)} \sin \{\omega t - k(d-x) - \varphi\} \\
 &= e^{-a(\ell-x)} \{-e^{-a(\ell-d)} \sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi - k(\ell-d)\} \\
 &\quad + e^{a(\ell-d)} \sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi + k(\ell-d)\}\} \\
 &= e^{-a(\ell-x)} \{-e^{-a(\ell-d)} \{\sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\} \cdot \cos k(\ell-d) \\
 &\quad - \cos \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\} \cdot \sin k(\ell-d)\} \\
 &\quad + e^{a(\ell-d)} \{\sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\} \cdot \cos k(\ell-d) \\
 &\quad + \cos \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\} \cdot \sin k(\ell-d)\}\} \\
 &= e^{-a(\ell-x)} \{\cos k(\ell-d) \{e^{a(\ell-d)} - e^{-a(\ell-d)}\} \sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\} \\
 &\quad + \sin k(\ell-d) \{e^{a(\ell-d)} + e^{-a(\ell-d)}\} \cos \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi\}\} \\
 &= e^{-a(\ell-x)} \sqrt{2 \{ \cosh 2a(\ell-d) - \cos 2k(\ell-d) \}} \cdot \sin \{\omega t - k(\ell-x) - \varphi + \varphi(\ell-d)\}
 \end{aligned} \tag{18}$$

となる。

ただし、 X を定数または変数式として $\varphi(X)$ は

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi(X) &= \frac{2 \cos kX \cdot \sinh aX}{\sqrt{2 \{ \cosh 2aX - \cos 2kX \}}}, \\
 \sin \varphi(X) &= \frac{2 \sin kX \cdot \cosh aX}{\sqrt{2 \{ \cosh 2aX - \cos 2kX \}}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

で定義される位相定数または関数である。

つぎに、(16)式の右辺の第2項 G_2 と第4項 G_4 は右へ進行する波を表しており、(18)式と同様にして合成することができ

$$\begin{aligned}
 G_2 + G_4 &= e^{-a(2\ell+x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell+x-d) - \varphi\} \\
 &\quad - e^{-a(d+x)} \sin \{\omega t - k(d+x) - \varphi\} \\
 &= -e^{-a(\ell+x)} \{-e^{-a(\ell-d)} \sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi - k(\ell-d)\} \\
 &\quad + e^{a(\ell-d)} \sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi + k(\ell-d)\}\} \\
 &= -e^{-a(\ell+x)} \{-e^{-a(\ell-d)} \{\sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\} \cos k(\ell-d) \\
 &\quad - \cos \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\} \sin k(\ell-d)\} \\
 &\quad + e^{a(\ell-d)} \{\sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\} \cos k(\ell-d) \\
 &\quad + \cos \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\} \sin k(\ell-d)\}\} \\
 &= -e^{-a(\ell+x)} \{\cos k(\ell-d) (e^{a(\ell-d)} - e^{-a(\ell-d)}) \sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\} \\
 &\quad + \sin k(\ell-d) (e^{a(\ell-d)} + e^{-a(\ell-d)}) \cos \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi\}\} \\
 &= -e^{-a(\ell+x)} \sqrt{2 \{ \cosh 2a(\ell-d) - \cos 2k(\ell-d) \}} \\
 &\quad \cdot \sin \{\omega t - k(\ell+x) - \varphi + \varphi(\ell-d)\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

(16)式 G は、(18)式と(20)式を加え合わせて求められ

$$G = e^{-a\ell} \sqrt{2 \{ \cosh 2a(\ell-d) - \cos 2k(\ell-d) \}} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & \times \{e^{ax} \sin \{\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d) + kx\} \\ & - e^{-ax} \sin \{\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d) - kx\}\} \end{aligned}$$

となる。

この式の〔 〕の中を G_T として計算をおこなうと

$$\begin{aligned} G_T &= e^{ax} \{ \sin(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d)) \cdot \cos kx \\ & \quad + \cos(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d)) \cdot \sin kx \} \\ & - e^{-ax} \{ \sin(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d)) \cdot \cos kx \\ & \quad - \cos(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d)) \cdot \sin kx \} \\ & = \{(e^{ax} - e^{-ax}) \cos kx \cdot \sin(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d))\} \\ & \quad + \{(e^{ax} + e^{-ax}) \sin kx \cdot \cos(\omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d))\} \\ & = \sqrt{2} \{ \cosh 2ax - \cos 2kx \} \cdot \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d) + \varphi(x) \} \end{aligned} \quad (22)$$

となる。

以上の計算の結果、 $y^A(x, t)$ は、(15)、(21)、(22)の各式を用いて

$$\begin{aligned} y^A(x, t) &= \sqrt{2} A \sqrt{\frac{\{ \cosh 2a(\ell - d) - \cos 2k(\ell - d) \} \{ \cosh 2ax - \cos 2kx \}}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \\ & \quad \times \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(\ell - d) + \varphi(x) \} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

$\varphi(\ell - d)$ と $\varphi(x)$ は(19)の式の X に $\ell - d$ と x を代入した式で決まる定数と関数である。

§5. 多重波の計算 (Bの場合)

つぎに、 $y_R^B(x, t)$ と $y_L^B(x, t)$ を計算するために、これらの式の複素数表示を、それぞれ、 $Y_R^B(x, t)$ と $Y_L^B(x, t)$ とすると

$$y_R^B(x, t) = \text{Im}[Y_R^B(x, t)], \quad y_L^B(x, t) = \text{Im}[Y_L^B(x, t)] \quad (24)$$

が成立する。

(5)式から $Y_R^B(x, t)$ は

$$\begin{aligned} Y_R^B(x, t) &= A e^{-a(x-d) + i(\omega t - k(x-d))} - A e^{-a(2\ell - x - d) + i(\omega t - k(2\ell - x - d))} \\ & \quad + A e^{-a(2\ell + x - d) + i(\omega t - k(2\ell + x - d))} - A e^{-a(4\ell - x - d) + i(\omega t - k(4\ell - x - d))} \\ & \quad + A e^{-a(4\ell + x - d) + i(\omega t - k(4\ell + x - d))} - \dots \end{aligned} \quad (25)$$

と表される。

この式の奇数項の和と偶数項の和を、それぞれ $Y_{R, odd}^B(x, t)$ と $Y_{R, even}^B(x, t)$ とすると

$$\begin{aligned} Y_{R, odd}^B(x, t) &= A e^{-a(x-d) + i(\omega t - k(x-d))} \{ 1 + e^{-2a\ell - i2k\ell} + e^{-4a\ell - i4k\ell} + \dots \} \\ &= \frac{A e^{-a(x-d) + i(\omega t - k(x-d))}}{1 - e^{-2a\ell - i2k\ell}}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
Y_{R, even}^B(x, t) &= -Ae^{-a(2\ell-x-d)+i(\omega t-k(2\ell-x-d))}\{1+e^{-2a\ell-i2k\ell}+e^{-4a\ell-i4k\ell}+\dots\} \\
&= \frac{-Ae^{-a(2\ell-x-d)+i(\omega t-k(2\ell-x-d))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}} \quad (27)
\end{aligned}$$

となる。

他方, $Y_L^B(x, t)$ は(6)式から

$$\begin{aligned}
Y_L^B(x, t) &= -Ae^{-a(x+d)+i(\omega t-k(x+d))} + Ae^{-a(2\ell-x+d)+i(\omega t-k(2\ell-x+d))} \\
&\quad -Ae^{-a(2\ell+x+d)+i(\omega t-k(2\ell+x+d))} + Ae^{-a(4\ell-x+d)+i(\omega t-k(4\ell-x+d))} \\
&\quad -Ae^{-a(4\ell+x+d)+i(\omega t-k(4\ell+x+d))} + \dots \quad (28)
\end{aligned}$$

と表現できる。

この式の奇数項の和 $Y_{L, odd}^B(x, t)$ と偶数項の和 $Y_{L, even}^B(x, t)$ は, それぞれ

$$\begin{aligned}
Y_{L, odd}^B(x, t) &= -Ae^{-a(x+d)+i(\omega t-k(x+d))}\{1+e^{-2a\ell-i2k\ell}+e^{-4a\ell-i4k\ell}+\dots\} \\
&= \frac{-Ae^{-a(x+d)+i(\omega t-k(x+d))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}}, \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{L, even}^B(x, t) &= Ae^{-a(2\ell-x+d)+i(\omega t-k(2\ell-x+d))}\{1+e^{-2a\ell-i2k\ell}+e^{-4a\ell-i4k\ell}+\dots\} \\
&= \frac{Ae^{-a(2\ell-x+d)+i(\omega t-k(2\ell-x+d))}}{1-e^{-2a\ell-i2k\ell}} \quad (30)
\end{aligned}$$

となる。

$y^B(x, t)$ は(26), (27), (29)と(30)の各式から(A.4)式と(A.5)式を用いて計算でき

$$y^B(x, t) = \frac{e^{at}}{\sqrt{2(\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell)}} \cdot H, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
H &= e^{-a(x-d)} \sin \{\omega t - k(x-d) - \varphi\} \\
&\quad - e^{-a(2\ell-x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell-x-d) - \varphi\} \\
&\quad - e^{-a(x+d)} \sin \{\omega t - k(x+d) - \varphi\} \\
&\quad + e^{-a(2\ell+x+d)} \sin \{\omega t - k(2\ell+x+d) - \varphi\} \quad (32)
\end{aligned}$$

となる。

(32)式の第1項 H_1 と第3項 H_3 の和と, 第2項 H_2 と第4項 H_4 の和は, それぞれ,

$$\begin{aligned}
H_1 + H_3 &= e^{-a(x-d)} \sin \{\omega t - k(x-d) - \varphi\} \\
&\quad - e^{-a(x+d)} \sin \{\omega t - k(x+d) - \varphi\} \\
&= e^{-ax} [e^{ad} \sin \{\omega t - kx - \varphi + kd\} - e^{-ad} \sin \{\omega t - kx - \varphi - kd\}] \\
&= e^{-ax} [e^{ad} \{\sin(\omega t - kx - \varphi) \cdot \cos kd + \cos(\omega t - kx - \varphi) \cdot \sin kd\} \\
&\quad - e^{-ad} \{\sin(\omega t - kx - \varphi) \cdot \cos kd - \cos(\omega t - kx - \varphi) \cdot \sin kd\}] \quad (33) \\
&= e^{-ax} [\cos kd (e^{ad} - e^{-ad}) \sin(\omega t - kx - \varphi) \\
&\quad + \sin kd (e^{ad} + e^{-ad}) \cos(\omega t - kx - \varphi)] \\
&= e^{-ax} \sqrt{2(\cosh 2ad - \cos 2kd)} \cdot \sin \{\omega t - kx - \varphi + \varphi(d)\},
\end{aligned}$$

$$H_2 + H_4 = -e^{-a(2\ell-x-d)} \sin \{\omega t - k(2\ell-x-d) - \varphi\}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-a(2\ell-x+d)} \sin \{ \omega t - k(2\ell-x+d) - \varphi \} \\
= & - e^{-a(2\ell-x)} \{ e^{ad} \sin \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi + kd \} \\
& - e^{-ad} \sin \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi - kd \} \} \\
= & - e^{-a(2\ell-x)} \{ e^{ad} \{ \sin \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi \} \cdot \cos kd \\
& + \cos \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi \} \cdot \sin kd \} \\
& - e^{-ad} \{ \sin \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi \} \cdot \cos kd \\
& - \cos \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi \} \cdot \sin kd \} \} \\
= & - e^{-a(2\ell-x)} \sqrt{2(\cosh 2ad - \cos 2kd)} \cdot \sin \{ \omega t - k(2\ell-x) - \varphi + \varphi(d) \}
\end{aligned} \tag{34}$$

と表される。

(33)式と(34)式を加え合わせると(32)式は

$$\begin{aligned}
H = & e^{-ax} \sqrt{2(\cosh 2ad - \cos 2kd)} \\
& \times \{ e^{a(\ell-x)} \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) + k(\ell-x) \} \\
& - e^{-a(\ell-x)} \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) - k(\ell-x) \} \}
\end{aligned} \tag{35}$$

と表される。

(35)式の〔 〕の中を H_T として計算すると

$$\begin{aligned}
H_T = & e^{a(\ell-x)} \{ \cos k(\ell-x) \cdot \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} + \sin k(\ell-x) \cdot \cos \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} \} \\
& - e^{-a(\ell-x)} \{ \cos k(\ell-x) \cdot \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} \\
& - \sin k(\ell-x) \cdot \cos \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} \} \\
= & \{ (e^{a(\ell-x)} - e^{-a(\ell-x)}) \cos k(\ell-x) \cdot \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} \} \\
& + \{ (e^{a(\ell-x)} + e^{-a(\ell-x)}) \sin k(\ell-x) \cdot \cos \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) \} \} \\
= & \sqrt{2(\cosh 2a(\ell-x) - \cos 2k(\ell-x))} \cdot \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) + \varphi(\ell-x) \}
\end{aligned} \tag{36}$$

となる。

したがって、 $y^B(x, t)$ は(31)式、(35)式と(36)式から

$$\begin{aligned}
y^B(x, t) = & \sqrt{2}A \sqrt{\frac{(\cosh 2ad - \cos 2kd) \{ \cosh 2a(\ell-x) - \cos 2k(\ell-x) \}}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \\
& \times \sin \{ \omega t - k\ell - \varphi + \varphi(d) + \varphi(\ell-x) \}
\end{aligned} \tag{37}$$

となることが導かれる。

位相 $\varphi(d)$ と $\varphi(\ell-x)$ は(19)式の X に d と $\ell-x$ をそれぞれ代入して決まる定数と関数で表される。

§6. 結果と考察

ここでは両端を固定した弦(エナメル線)に交流電流を流し、弦のある位置に弦をまたいで磁石を置くことによって弦に強制振動をおこなわせたとき、弦にどのような振動が生じるかを示す理論式を導きだした。その結果、弦の変位を表す理論式は、磁石を置いた位置の左と右ではことなり、おのおの(23)式と(37)式によって表される。この理論式を

導くにあたっては、磁石の位置で発生した弦上の波が両端でいくども反射され、それらをすべて重ね合わせて弦の変位を求めたこと、また、波が伝播するとき、その波の振幅は、伝播距離とともに指数関数的に減少することを考慮した。このことによって、実際の弦の振動のようすを定量的に記述できる理論式が導出できた。この振動の実験は、久保田により柱型レンズを用いて振幅を拡大して撮影された写真として報告されている¹³⁾。

ところで、弦の振動を表す(23)式と(37)式、振動の位相の変化を表す(17)式と(19)式において、減衰係数 a を零とおいた場合を考察する。まず、位相定数 φ は(17)式に $a=0$ として計算すると

$$\tan \varphi_0 = \cot k\ell \quad (38)$$

となり、結局、

$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} - k\ell, \quad (\sin k\ell \geq 0) \quad (39)$$

が導ける。

また $\varphi(X)$ については(19)式から、同様の計算により

$$\cos \varphi_0(X) = 0, \quad \sin \varphi_0(X) = \pm 1, \quad (\sin k\ell \geq 0) \quad (40)$$

と表され、結局、

$$\varphi_0(X) = \pm \pi/2, \quad (\sin k\ell \geq 0) \quad (41)$$

となる。

したがって、(23)式と(37)式は、それぞれ、減衰係数 a を零とおいた極限で

$$y_0^A(x, t) = 2A \frac{\sin k(\ell-d) \cdot \sin kx}{\sin k\ell} \cdot \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq d), \quad (42)$$

$$y_0^B(x, t) = 2A \frac{\sin kd \cdot \sin k(\ell-x)}{\sin k\ell} \cdot \cos \omega t, \quad (d \leq x \leq \ell), \quad (43)$$

で表される。

これらは、波の減衰を考慮しないで導かれたレイリーの教科書の式と同じ式となっている¹⁴⁾。ところが、これらの式は、共振を生じる条件、すなわち、分母の極小の値をとるときは、振幅は無限大となり、実際の実験結果と定量的な比較をおこなうことができない。

他方、減衰係数を考慮した振動を表す理論式(23)と(37)式は、位相を表す(17)式と(19)式とともに、有限な変位の振幅を表すことができ、実際にコンピューターを用いて振動のようすを調べたり描かせたりできる点で、レイリーの式をより一般化したものと結論できる。

付 録

ここでは、

$$\operatorname{Im} \left[\frac{e^{iD}(1-e^{-A+iB})}{(1-e^{-A+iB})(1-e^{-A-iB})} \right] = \frac{e^{A/2} \sin(D-\varphi)}{\sqrt{2}(\cosh A - \cos B)}$$
 の証明をおこなう。

この式の左辺の分母は

$$\begin{aligned}
(1 - e^{-A+ib})(1 - e^{-A-ib}) &= (1 - e^{-A} \cos B - ie^{-A} \sin B)(1 - e^{-A} \cos B + ie^{-A} \sin B) \\
&= (1 - e^{-A} \cos B)^2 + (e^{-A} \sin B)^2 \\
&= 1 - 2e^{-A} \cos B + e^{-2A} = e^{-A}(e^A + e^{-A} - 2 \cos B) \\
&= 2e^{-A}(\cosh A - \cos B)
\end{aligned} \tag{A. 1}$$

となる。

同じく分子は

$$\begin{aligned}
e^{iD}(1 - e^{-A+ib}) &= (\cos D + i \sin D) \cdot (1 - e^{-A} \cos B - ie^{-A} \sin B) \\
&= \{\cos D \cdot (1 - e^{-A} \cos B) + \sin D \cdot e^{-A} \cdot \sin B\} \\
&\quad + i\{\sin D \cdot (1 - e^{-A} \cos B) - \cos D \cdot e^{-A} \sin B\}
\end{aligned} \tag{A. 2}$$

となる。

この虚数部分を、三角関数の合成の法則を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
&\sin D \cdot (1 - e^{-A} \cos B) - \cos D \cdot e^{-A} \sin B \\
&= \sqrt{(1 - e^{-A} \cos B)^2 + (e^{-A} \sin B)^2} \cdot \left\{ \sin D \cdot \frac{1 - e^{-A} \cos B}{\sqrt{(1 - e^{-A} \cos B)^2 + (e^{-A} \sin B)^2}} \right. \\
&\quad \left. - \cos D \cdot \frac{e^{-A} \sin B}{\sqrt{(1 - e^{-A} \cos B)^2 + (e^{-A} \sin B)^2}} \right\} \\
&= e^{-A/2} \sqrt{2(\cosh A - \cos B)} \times \sin(D - \varphi)
\end{aligned} \tag{A. 3}$$

となる。ただし φ は

$$\tan \varphi = \frac{e^{-A} \sin B}{1 - e^{-A} \cos B} \tag{A. 4}$$

で決定される。

(A. 1) 式と (A. 3) 式から

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left[\frac{e^{iD}(1 - e^{-A+ib})}{(1 - e^{-A+ib})(1 - e^{-A-ib})} \right] &= \frac{\sqrt{2e^{-A}(\cosh A - \cos B)}}{2e^{-A}(\cosh A - \cos B)} \times \sin(D - \varphi) \\
&= \frac{e^{A/2} \sin(D - \varphi)}{\sqrt{2(\cosh A - \cos B)}}
\end{aligned} \tag{A. 5}$$

となる。

参 考 文 献

- 1) 福山豊：物理教育，**33**，1 (1985) 19.
- 2) 福山豊，広瀬美恵子，阿部由美子，富山哲之：物理教育，**33**，3 (1985) 220.
- 3) 福山豊，阿部由美子，広瀬美恵子，富山哲之：物理教育，**34**，4 (1986) 237.
- 4) 富山哲之，福山豊：長崎大教育教科教育研報，10 (1986) 25.
- 5) Y. FUKUYAMA: Int. Conf. TRENDS IN PHYSICS EDUCATION Proceedings Part II (1986) 121.
- 6) 福山豊，富山哲之，川里祥之：物理教育，**35**，4 (1987) 248.
- 7) 福山豊：長崎大教育自然研報 39 (1988) 21.

- 8) 富山哲之, 福山豊: 物理教育, **36**, 2 (1988) 95.
- 9) 福山豊, 富山哲之, 森山一夫: 物理教育, **36**, 4 (1988).
- 10) 霜田光一他: 高等学校物理 (学校図書株式会社, 昭和63年1月) 102.
- 11) 中村誠太郎監修: 物理学実験 (テーマ編) (東海大学出版会, 1982) 21.
- 12) 中込八郎編: 最新教育物理実験 (聖文社, 1967) 185.
- 13) K. プルチブラム (江沢洋訳): 波動力学形成史 (みすず書房, 1982) 136.
- 14) J. W. S. RAYLEIGH (J. W. Strutt): *The Theory of Sound* Vol. 1 (Dover, New York, 1945) 195