

動吸振器による電動機固定子の制振

2020年7月

長崎大学大学院 工学研究科

片原田 浩之

目次

第1章	序論	1
第2章	電動機固定子の制振の基礎理論	6
2.1	電動機の振動モード	6
2.2	解析モデル	7
2.3	制振理論	7
2.3.1	運動方程式の導出	7
2.3.2	2次モードの制振	12
第3章	電動機固定子の制振の詳細解析	22
3.1	理論解析	22
3.1.1	運動方程式	22
3.1.2	共振点付近の制振	24
3.1.3	共振点の制振における開き角の影響	26
3.1.4	共振点以外の制振	28
3.1.5	複数の固定子の固有モードを考慮した場合	29
3.2	有限要素解析	36
3.2.1	解析モデル	36
3.2.2	固定子に作用する電磁力	37
3.2.3	レイリー減衰の導入	38
3.2.4	モード解析	39
3.2.5	過渡応答解析	40
第4章	動吸振器の最適設計	63
4.1	一对の動吸振器による制振	63
4.1.1	運動方程式	63
4.1.2	理論解析結果	63
4.2	多重動吸振器による制振	65
4.2.1	運動方程式	66
4.2.2	理論解析結果	68
4.3	一对の動吸振器のパラメータが異なる場合	70
4.3.1	動吸振器の質量比の和が一定の場合	71
4.3.2	減衰比に制約がある場合	74
4.3.3	有限要素解析	75
第5章	不均一性を考慮した電動機の制振	99
5.1	理論解析	99
5.1.1	運動方程式	99
5.1.2	1点の不均一性を考慮した場合	101

5.1.3	2点の不均一性を考慮した場合	105
5.2	有限要素解析	108
5.2.1	解析モデル	108
5.2.2	モード解析	109
5.2.3	過渡応答解析	109
5.2.4	円環理論と有限要素法による固有振動数解析の比較	111
第6章	結論	133
—	付録—	135
—	参考文献—	140
—	謝辞—	145

第 1 章 序論

近年、人口増加や経済成長にともない世界のエネルギー消費量は急増している。国際エネルギー機関 (IEA) によれば 2040 年の世界のエネルギー消費量は 2014 年と比べておよそ 1.3 倍に増加すると予測されており、石油や石炭、天然ガスといった化石燃料は限りある資源であり、化石燃料枯渇問題に直面している。この問題の懸念から、世界各国で持続可能な社会を構築するべく産業機器から家電製品に至るまで、クリーンエネルギー化、省エネルギー化が急ピッチで推進されている。2011 年の福島第一原子力発電所の事故もあり、我が国では水力発電、風力発電、地熱発電、太陽光発電など CO₂ 排出を伴わないクリーンかつ再生可能な電力発電が注目されており普及が進んでいる。電動化も進んでおり、全長数千 km の天然ガスのパイプラインでは従来ガスタービンが使用されてきたが、高速電動機を使用することでエネルギー変換率の向上、CO₂ 削減が可能となっている。また、内燃機関を動力源とする自動車においても、ハイブリッド自動車、電気自動車など動力源に電気エネルギーが用いられており、今後ますます電動機の需要が増加することは間違いない。

代表的な産業用電動機である誘導電動機は 1888 年に N.Tesla により発明され、国内では 1895 年に生産が開始され、電気エネルギーを運動エネルギーに効率よく変換するために 100 年以上も世界中で使用されている。電動機においては、省エネルギー化のため、高効率化や小型軽量化が求められるとともに、生活環境の向上や工場における労働者の労働条件向上の観点から低騒音化が重要となっている。電動機の騒音として、電動機の固定子や回転子を冷却するための電動機内部のファンによる風切音や通風音、運転時に発生する電磁騒音があるが、特に電磁騒音は騒音レベルが高いことから問題となることが多く、解決しなければならない重要な課題である。低騒音化のためには電動機の固定子を覆うフレームを厚肉化し、透過する音を低減する方法等も考えられるが、小型軽量化のためフレームの薄肉化が求められており、小型軽量化の観点からは相反する対策である。現場では一般的な方法として、低い周波数の騒音ではフレームの厚肉化、高い周波数の騒音では防音材や消音材等を用いることが効果的であり両方または片方を採用し対策している。

電動機では、前述の高い周波数の騒音の 1 つとして、エアギャップにおける固定子と回転子の高調波磁束の相互干渉によって生じる電磁力が固定子と回転子間に作用することにより固定子が振動するこ

とによる電磁騒音⁽¹⁾がある。対策として、加振周波数と固定子の固有振動数が十分離れるように設計することが最も望ましい方法である。しかし、固定子は薄肉の電磁鋼板が積層した特殊な構造⁽²⁾をしていることや、固定子に挿入されている複合材である巻線や巻線端⁽³⁾⁻⁽⁶⁾、その巻線を仕切る役割をもつティース⁽⁷⁾⁽⁸⁾があるため固定子の固有振動数の予測が難しい。また、電動機の大型化による固有振動数の低下、動作速度による加振周波数の増加、さらに、インバータ制御された電動機では駆動回転数が広範囲で変化することなどから防振が難しい状況である。

電動機の制振のために、一般的に用いられている動吸振器⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾などの制振装置を使うことも考えられ、動吸振器は質量、ばね要素、減衰要素からなる制振装置であり、機械、建築、土木などあらゆる構造物の制振に用いられている。1928年に動吸振器の理論が Den Hartog⁽¹¹⁾によって提出されたことに始まる。

制振装置は、大きくは制振のために外部エネルギーを必要としないものとするものとして分類される。前者には動吸振器やフードダンパがあり、後者にはセミアクティブダンパ、アクティブダンパ、ハイブリッドダンパがある。

以下、各制振装置の特徴と長短を述べる。

動吸振器の制振設計は2つに大別される。1つは機械の運転中の回転数、すなわち、強制力の振動数が一定の場合の制振設計である。これは動吸振器の質量とばね要素を調整し、動吸振器の固有振動数を強制振動の振動数に一致させる設計である。このとき、動吸振器の減衰を無視すれば、主系の振幅は理論的には零になる。この方法による制振は共振点以外でも可能である。もう1つの方法は主系の共振点付近のある程度広い振動数の範囲で機械が運転される場合の設計である。この場合は、減衰要素も用い、主系の固有振動数に対する動吸振器の固有振動数の比、および動吸振器の減衰比を最適な値に設計する。また、複数の動吸振器を用いることで制振効果を向上させることもできる⁽¹⁰⁾。しかしながら、動吸振器はいずれにせよ限られた振動数の範囲での制振を行うものであり、幅広い振動数範囲での制振ができないことが短所である。製作コストについては、一般的には制振装置の中では安価な部類に入る。

動吸振器が適用された機械や構造物は非常に多岐にわたるが、例えば、以下のようなものがある。橋梁に設置された照明柱の制振では動吸振器の一種であるインパクトダンパが用いられている⁽¹²⁾⁽¹³⁾。吊橋主塔の渦励振の制振には吊橋主塔と繋がれたロープの先に水を入れた巨大な鋼製の箱が接続されたスライディングブロックが使用された⁽¹⁴⁾。スキー場のゴンドラの強風による振動も動吸振器により制振されている⁽¹⁵⁾。インテリジェントビルなどのOAフロアに採用されている二重床の防振にも動吸振器が用

いられている⁽¹⁶⁾。自動車の駆動系のねじり振動の制振には遠心振子式の動吸振器が用いられている⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾。

現在でも国内外で以下のような新しい様々なタイプの動吸振器の研究が行われている。例えば、制振と発電を行う動吸振器^{(19)~(21)}、エンドミル加工時の強制びびりおよび再生びびり振動の抑制対策⁽²²⁾、ヘリコプターのブレードや高速列車の制振⁽²³⁾⁽²⁴⁾、複数の動吸振器による⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾、回転と並進運動をする 2 自由度動吸振器⁽²⁷⁾、ランダム加重を受ける系の制振⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾などがある。さらに、理論的にも様々な角度から検討されている^{(30)~(32)}。

フードダンパ⁽³³⁾⁽³⁴⁾は質量と減衰のみからなり、ばね要素を使用しないため、固有振動数をもたない。設計方法は 1 つであり、フードダンパの質量に応じて最適な減衰を選択し、主系の共振点付近のある程度広い振動数の範囲での制振を行う。前述の動吸振器の 2 つの設計法のうち、後者の設計法と同様の設計法である。制振効果が動吸振器よりも劣ることが欠点であるが、コスト的にはばね要素がないので、動吸振器よりも安価であり、減衰要素として摩擦を利用するタイプは構造がシンプルという利点がある。

セミアクティブダンパ⁽³⁵⁾⁽³⁶⁾は機械や構造物の剛性や減衰を振動状態に応じて変化させることで制振を行うものである。アクティブゆえにコストが高くなるが、次に述べるアクティブダンパと異なり、アクチュエータを使用しないため、一般にはアクティブダンパよりは安価である。構造物^{(37)~(39)}や鉄道車両⁽⁴⁰⁾の制振に用いられている。

アクティブダンパ⁽⁴¹⁾⁽⁴²⁾は主系と制振装置に設置したセンサーから得られた情報からコンピュータを用いて採用した制御則に基づいて制御量を計算し、アクチュエータを用いて主系に直接力を加えたり、付加質量をモータで動かしたりするものである。コンピュータやアクチュエータを用いることから一般的には最もコストがかかる制振装置である。自動車⁽⁴³⁾⁽⁴⁴⁾、高層建築物⁽⁴⁵⁾、エレベータ⁽⁴⁶⁾など多くの機械や構造物の制振で実用化されている。

ハイブリッドダンパ⁽⁴⁷⁾は、前述の動吸振器などのパッシブな制振装置をコンピュータ制御するものである。これにより完全にアクティブな制振装置よりは低コストの制振装置で高い制振効果を実現できるが、パッシブな制振装置よりはコストが高くなる。横浜ランドマークタワー⁽⁴⁸⁾に設置されている。

これら各種制振装置を比較すると、セミアクティブダンパやアクティブダンパ、ハイブリッドダンパはコストが高く、フードダンパは動吸振器と比較すると制振効果は低いため、結局、機械や構造物の制振にはコストも安く制振効果が高い動吸振器を適用することが望ましいと言える。

電動機固定子の制振に動吸振器を適用することを検討するに際し、これまで動吸振器が適用されてき

た振動系を考えると、そこでは一般的に外力が分布しておらず、従って外力がモードを持たず、構造物の基礎など一部分にのみに作用する場合であった。このような場合、制振対象の振動モードは空間に固定され、その腹の位置に動吸振器を設置すれば効果が最大であった。例えば、塔状構造物の場合、最上部に設置すればよかった。しかしながら、このような場合と異なり、電動機のように空間に分布した電磁力が回転する場合、電磁力により固定子の振動モードも回転するため、振動モードの腹や節が空間に固定されず制振が困難となる。

動吸振器を用いた電動機の制振に関する研究は、従来からわざわざ行われており、それらは次のようにまとめられる。一文字ら⁽⁴⁹⁾は1個の動吸振器を用いたタービン発電機の振動低減の研究を行っているが、1個の動吸振器では設置位置が節となるモードが定在波として現れるだけで、固定子鉄心の振動を十分に抑えることはできていない。さらに、一文字ら⁽⁵⁰⁾⁽⁵¹⁾は固定子鉄心の周方向に分布させた円筒型動吸振器を提案し、同様の結果を得るとともに、三次元解析モデルから固定子の軸方向全体にわたって有効であることを示している。また、江崎ら⁽⁵²⁾は片持ち梁型動吸振器を用いて電動機の制振の研究を行っており、軸方向長さが直径に対して約1/4である円環を制振対象とした基礎試験において、梁型動吸振器が有効であることを明らかにした。

このように従来の研究では、動吸振器による電動機の制振の有効性は示されているが、電動機の運転中に腹と節をもつ振動モードが回転することが考慮されていない。江崎らは2個の動吸振器を設置した試験も行っているが、制振理論の確立には至っておらず、動吸振器の設置間隔による影響は検討されていない。薄い電磁鋼板が積層された固定子は締付ボルトを介して押さえ板で固定されていることや、固定子とフレームの隙間にも限りがあるため、動吸振器設置位置に制限もあり、一对の動吸振器の設置間隔による制振効果の違いを詳細に調べるのが重要である。

そこで本研究では、電動機の制振のための装置として動吸振器を用いることとし、その制振理論を構築することを目的とする。まず、振動騒音の問題となっている振動数と同じ固有振動数をもつ一对の動吸振器を設置することで回転する振動モードに対しても有効な制振理論を確立するとともに、理論解析と有限要素解析でそれを確かめる。また、一对の動吸振器の設置間隔による影響を確認し、インバータモータのような駆動回転数が広範囲で変わる電動機の制振のために、減衰をもつ一对の動吸振器の最適な設計について調べるとともに、いわゆる多重動吸振器⁽⁵³⁾⁽⁵⁴⁾に相当する複数対の動吸振器による最適な設計についても検討する。さらに、電動機が不均一性をもつ場合、動吸振器を用いた制振への影響を調

べるとともに、不均一性を電動機の制振問題に活用することも検討する。

第 2 章 電動機固定子の制振の基礎理論

2.1 電動機の振動モード

本研究で対象とする電動機の一例を図 2.1 に示している。全高 1m 程度の 450~710kW の電動機でコンプレッサやファン、ポンプを駆動する用途として使用されるものである。動吸振器は図 2.2 で示すような電動機の外側の部品である固定子に設置することを想定した。電磁騒音は電動機固定子と、固定子と回転子の相互作用によって生じる電磁力が共振した場合に発生し、電磁力のモード形状は電動機固定子の円周方向に節はあるが、軸方向に節はなく大きさはほぼ一様である。電動機固定子の固有モード形状を確認するため、図 2.2 で示した電動機固定子を対象とするハンマリング試験⁽⁵⁵⁾を行った。計測点は、軸方向に 14 点、円周方向はティースごとに 42 点の計 588 点とした。なお、固定子は厚さ 0.5mm の電機子用電磁鋼板が軸方向に数 1000 枚積層され、固定子のコイルは電磁鋼板のティースの間に挿入されており、端部の押え板を介してボルトによって加圧し締め付ける構造となっている。

ハンマリング試験によって得られた結果の一例を次に示す。各図の(a)は 588 点の測定結果を示し、半径を 3 とした円筒にハンマリング試験で得られた振幅の最大値を 1 として縦軸と横軸に表しており、奥行き方向は軸方向の測定点 14 点を示す。各図の(b)は図(a)を縦軸と横軸から見た図である。各図の(c)は 588 点の測定結果を縦軸に最大値 1 とした振幅、横軸に円周方向 42 点、奥行き方向を軸方向 14 点の測定点を示す。各図の(d)は図(c)を縦軸と横軸から見た図、各図の(e)は図(c)を縦軸と奥行き方向から見た図である。図 2.3 に巻線が挿入されていない固定子の円周方向波数 $i=2$ 、軸方向半波数 $i_m=0$ のモード図 (667.5Hz) を示し、図 2.4 に巻線が挿入されていない固定子の円周方向波数 $i=2$ 、軸方向半波数 $i_m=1$ のモード図 (715Hz)、図 2.5 に巻線が挿入されていない固定子の円周方向波数 $i=3$ 、軸方向半波数 $i_m=0$ のモード図 (1662.5Hz) を示している。次に、図 2.6 に巻線が挿入された固定子の円周方向波数 $i=2$ 、軸方向半波数 $i_m=0$ のモード図 (628.1Hz) を示し、図 2.7 に巻線が挿入された固定子の円周方向波数 $i=3$ 、軸方向半波数 $i_m=0$ のモード図 (1742.2Hz) を示している。図 2.3~図 2.5 から、軸方向に節があるモードも巻線が挿入されていない固定子では見られていたが、図 2.6~図 2.7 から、軸方向に節があるモードは巻線が挿入された固定子では見られなくなった。これは、スロット内に巻線が充填されたことで軸方向の剛性が上がったことによるものと考えられる。これより、固定子の固有モード形状も電磁力のモード

形状と同様，軸方向半波数 $i_m=0$ の場合のみ考えることとする。

図 2.8 に固定子の振動モードの例を示している。図 2.8 において，実線は固定子静止時の形状であり，点線が固定子の振動モードを表している。電磁力のモードが回転しているため，固定子に発生するこれらの振動モードも円周方向に回転をしている。次に図 2.8 で示したそれぞれの振動モードについて説明する。モード 0 の場合，円周方向波数 $i=0$ であり，このモードは半径方向に一様に拡大，縮小して振動する。モード 1 の場合，円周方向波数 $i=1$ であり，節が 2 つある振動モードで，腹と節の間隔は 90° となる。モード 2 の場合，円周方向波数 $i=2$ であり，節が 4 つある振動モードで，腹と節の間隔は 45° となる。楕円に似た変形をする。モード 3 の場合は，円周方向波数 $i=3$ であり，節が 6 つある振動モードで，腹と節の間隔は 30° となる。三角形に似た変形をする。モード 4 の場合は，円周方向波数 $i=4$ であり，節が 8 つあり，腹と節の間隔は 22.5° となる。四角形に似た変形をする。

2.2 解析モデル

前節で得られたハンマリング試験結果より，電動機固定子は電磁鋼板を軸方向に積層した構造のため，半径方向や円周方向に比較して軸方向の剛性が低いが，それでも巻き線が挿入されているため，電磁振動が問題となる数千 Hz 以下の振動数範囲には軸方向に節があるモードは得られなかった。よって，軸方向半波数 0 の場合のみ考えることとし，理論解析では簡単のために電動機固定子を図 2.9 に示すような円環で近似する。動吸振器はマスとバネ，ダンパーの簡単な一自由度系とする。また，動吸振器を円環の外側に設置することとし，マスは半径方向に変位するものとする。

2.3 制振理論

2.3.1 運動方程式の導出

図 2.9 に示す解析モデルにおいて，これに発生する電磁振動を N 個の動吸振器により制振する問題を考える。

円環の任意断面における曲げモーメント M_r は次式となる⁽⁵⁶⁾。

$$M_r = -EI \left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) \quad (2.1)$$

ここに

r : 固定子を厚さが薄い円環と考えたときの半径

θ : 固定子の円周方向の座標 (反時計回りが正)

Δr : 固定子の半径方向の微小変位

u : 半径方向変位 (外向きが正)

E : 固定子の縦弾性係数

I : 環の面に垂直な主軸に関する断面二次モーメント

これより円環のポテンシャルエネルギー U_r , 運動エネルギー T_r を求めると, それぞれ次式となる.

$$U_r = \frac{1}{2EI} \int_0^{2\pi} M_r^2 r d\theta = \frac{EI}{2} \frac{1}{r^4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right)^2 r d\theta \quad (2.2)$$

$$T_r = \frac{\rho A}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) r d\theta \quad (2.3)$$

ここに

v : 円周方向変位 (反時計回りが正)

ρ : 固定子の密度

A : 固定子の断面積

一方, 動吸振器のポテンシャルエネルギー U_d , 運動エネルギー T_d は次式で表される.

$$U_d = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j (x_j - u_j)^2 \quad (2.4)$$

$$T_d = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \quad (2.5)$$

ここに

θ_j : 動吸振器の円周方向の設置位置, 反時計回りを正とする ($j=1, \dots, N$)

u_j : 動吸振器設置位置 ($\theta = \theta_j$) における固定子の半径方向変位

x_j : $\theta = \theta_j$ に設置した動吸振器の変位

m_j : $\theta = \theta_j$ に設置した動吸振器の質量

k_j : $\theta = \theta_j$ に設置した動吸振器のばね定数

固定子の半径方向の変位 u , 円周方向の変位 v は, M 個の振動モードを考慮し, 円環の中立軸の長さが

変形の前後で変わらない条件より，次式で表される．

$$u = \sum_{i=1}^M (a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta) \quad (2.6)$$

$$v = -\sum_{i=1}^M \left(\frac{a_i}{i} \sin i\theta - \frac{b_i}{i} \cos i\theta \right) \quad (2.7)$$

ここに

i : 固定子の円周方向の振動モードを表す整数 ($i=1, \dots, M$)

a_i : $\theta=0^\circ$ に腹をもつモード i の変位

b_i : $\theta=180/(2i)^\circ$ に腹をもつモード i の変位

式(2.6)を式(2.2)に代入すると次式となる．

$$U_r = \frac{EI}{2} \frac{1}{r^3} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^M (1-i^2)(a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta) \right\}^2 d\theta = \frac{EI}{2} \frac{\pi}{r^3} \sum_{i=1}^M (1-i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2) \quad (2.8)$$

式(2.6), (2.7)を式(2.3)に代入すると次式となる．

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{\pi r \rho A}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left\{ \sum_{i=1}^M (\dot{a}_i \cos i\theta + \dot{b}_i \sin i\theta) \right\}^2 + \left\{ -\sum_{i=1}^M \left(-\frac{\dot{a}_i}{i} \sin i\theta + \frac{\dot{b}_i}{i} \cos i\theta \right) \right\}^2 \right] d\theta \\ &= \frac{\pi r \rho A}{2} \sum_{i=1}^M \left\{ \pi(\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2) + \pi \left(\frac{\dot{a}_i^2}{i^2} + \frac{\dot{b}_i^2}{i^2} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi r \rho A}{2} \sum_{i=1}^M \left(1 + \frac{1}{i^2} \right) (\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

系の全ポテンシャルエネルギー U ，系の全運動エネルギー T はそれぞれ次式で表される．

$$U = U_r + U_d = \frac{EI}{2} \frac{\pi}{r^3} \sum_{i=1}^M (1-i^2)^2 (a_i^2 + b_i^2) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i\theta_j + b_i \sin i\theta_j) \right\}^2 \quad (2.10)$$

$$T = T_r + T_d = \frac{\pi r \rho A}{2} \sum_{i=1}^M \left(1 + \frac{1}{i^2} \right) (\dot{a}_i^2 + \dot{b}_i^2) + \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \quad (2.11)$$

式(2.10), (2.11)からラグランジュの方程式に代入するための式は次式となる．

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{a}_i} &= \pi r \rho A \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \dot{a}_i \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{b}_i} &= \pi r \rho A \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \dot{b}_i \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} &= m_j \dot{x}_j \\
\frac{\partial U}{\partial a_i} &= EI \frac{\pi}{r^3} (1+i^2)^2 a_i + \sum_{j=1}^N k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) \right\} (-\cos i \theta_j) \\
\frac{\partial U}{\partial b_i} &= EI \frac{\pi}{r^3} (1+i^2)^2 b_i + \sum_{j=1}^N k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) \right\} (-\sin i \theta_j) \\
\frac{\partial U}{\partial x_i} &= k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

一般力を Q_{ai} , Q_{bi} , Q_j と仮定するとラグランジュの方程式から強制振動の運動方程式は次式となる.

$$\left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{a}_i + (1-i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} a_i + \sum_{j=1}^N k_j \cos i \theta_j \left\{ \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j \right\} = Q_{ai} \quad (2.13)$$

$$\left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{b}_i + (1-i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} b_i + \sum_{j=1}^N k_j \sin i \theta_j \left\{ \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j \right\} = Q_{bi} \quad (2.14)$$

$$m_j \ddot{x}_j + k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) \right\} = Q_j \quad (2.15)$$

次にモード座標における外力の導出を行う. 一般力の定義は次式となる.

$$Q_k = \sum_{i=1}^M \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (2.16)$$

ここに

k : 一般座標に対する添え字

q_k : 一般座標

また, 電動機に作用する外力として一般的なものは円周方向に分布して半径方向に作用する力であるので, それを次式で表す.

$$F(\theta, t) = F_s \cos(\Omega_s t + s \theta) \quad (2.17)$$

ここに

s : 固定子および回転子のスロット数により決まる電磁力のモードを表す整数

Ω_s : モード s をもつ電磁力の角振動数で, 電源周波数 $\Omega/2\pi$ (50Hz, あるいは 60Hz), すべり率, 固定子のスロット数により決まる

F_s : モード s の電磁力の振幅

このとき, 式(2.16)は次式となる.

$$Q_k = \sum_{i=1}^M F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \frac{\partial u_i}{\partial q_k} \quad (2.18)$$

円環では質点と力が円周方向に分布しているので上式は次式のように積分で置き換えられる。

$$Q_k = \int_0^{2\pi} F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \frac{\partial u_i}{\partial q_k} d\theta \quad (2.19)$$

従って、一般外力は以下のようなになる。

$q_k = a_i$ のとき

$$Q_a = \int_0^{2\pi} F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \cos i\theta d\theta \quad (2.20)$$

$q_k = b_i$ のとき

$$Q_b = \int_0^{2\pi} F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \sin i\theta d\theta \quad (2.21)$$

$q_k = x_j$ のとき

$$Q_j = 0 \quad (2.22)$$

これらを前提として、固定子の運動方程式を導出する。

電磁力は多くの成分を含むが、 $F_s \cos(\Omega_s t + s\theta)$ の成分のみ作用する場合を考えると、固定子の式(2.6)

の $\cos i\theta$ のモードの変位 a_i の運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{a}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} a_i + \sum_{j=1}^N k_j \cos i\theta_j \left\{ \sum_{i=1}^M (a_i \cos i\theta_j + b_i \sin i\theta_j) - x_j \right\} \\ & = \int_0^{2\pi} F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \cos i\theta d\theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

同様に、固定子の式(2.6)の $\sin i\theta$ のモードの変位 b_i の運動方程式は、次式となる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{b}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} b_i + \sum_{j=1}^N k_j \sin i\theta_j \left\{ \sum_{i=1}^M (a_i \cos i\theta_j + b_i \sin i\theta_j) - x_j \right\} \\ & = \int_0^{2\pi} F_s \cos(\Omega_s t + s\theta) \sin i\theta d\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

一方、動吸振器の運動方程式 ($j = 1, \dots, N$) は次式となる。

$$m_j \ddot{x}_j + k_j \left\{ x_j - \sum_{i=1}^M (a_i \cos i\theta_j + b_i \sin i\theta_j) \right\} = 0 \quad (2.25)$$

2.3.2 2次モードの制振

電動機の固定子の固有モードの変形量はモード次数のほぼ4乗に逆比例し、モード次数が大きくなるほど変形量は非常に小さくなり、電動機は2極、4極と2の倍数で極対（N極とS極）が回転する磁界が生じるので回転主磁束による電磁加振力のモードは、2極は2次モード、4極は4次モードとなる。このように固定子の振動モードと回転する電磁力のモードの両面から、電動機固定子の振動としては2次の振動モードを制振することが重要であるため、以下では、図2.10に示すような電磁力、及びそれに基づく固定子の振動モードの円周方向の波の数を2波（ $i=s=2$ ）とし、これを2つの動吸振器1、2を用いて制振する場合を考える。

このとき、固定子の半径方向の変位および固定子の半径方向の運動方程式は式(2.6)、(2.23)、(2.24)から次式で与えられる。

$$u = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta \quad (2.26)$$

$$\frac{5}{4} \pi r \rho A \ddot{a}_2 + 9EI \frac{\pi}{r^3} a_2 + k_1(a_2 - x_1) = \pi F_2 \cos \Omega_2 t \quad (2.27)$$

$$\frac{5}{4} \pi r \rho A \ddot{b}_2 + 9EI \frac{\pi}{r^3} b_2 + k_2(b_2 - x_2) = -\pi F_2 \sin \Omega_2 t \quad (2.28)$$

動吸振器1、2の設置位置を2次モード($i=2$)の腹と節の間隔だけ離し、例えば $\theta_1 = 0^\circ$ 、 $\theta_2 = 180/(2i) = 45^\circ$ とすると、動吸振器1、動吸振器2の運動方程式は、それぞれ次式となる。

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - a_2) = 0 \quad (2.29)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - b_2) = 0 \quad (2.30)$$

式(2.27)～(2.30)から、式(2.27)と式(2.29)が連立し、式(2.28)と式(2.30)が連立し、それぞれが独立していることがわかる。

すなわち、式(2.27)で記述される $\cos 2\theta$ モード成分は動吸振器1で制振され、式(2.28)で記述される $\sin 2\theta$ モード成分は動吸振器2で制振されるメカニズムになっていることがわかる。各連立微分方程式を解くと次式となる。

$$a_2 = \frac{\pi F_2 (k_1 - m_1 \Omega_2^2)}{D_1(\Omega_2)} \cos \Omega_2 t \quad (2.31)$$

$$b_2 = \frac{-\pi F_2 (k_2 - m_2 \Omega_2^2)}{D_2(\Omega_2)} \sin \Omega_2 t \quad (2.32)$$

ここに

$$D_1(\Omega_2) = \left(9EI \frac{\pi}{r^3} + k_1 - \frac{5}{4} \pi r \rho A \Omega_2^2 \right) (k_1 - m_1 \Omega_2^2) - k_1^2 \quad (2.33)$$

$$D_2(\Omega_2) = \left(9EI \frac{\pi}{r^3} + k_2 - \frac{5}{4} \pi r \rho A \Omega_2^2 \right) (k_2 - m_2 \Omega_2^2) - k_2^2 \quad (2.34)$$

上式から

$$\sqrt{k_1/m_1} = \sqrt{k_2/m_2} = \Omega_2 \quad (2.35)$$

のとき、 $a_2 = b_2 = 0$ となり、結局、式(2.26)から $u = 0$ となることがわかる。すなわち、一対の動吸振器 1, 2 を式(2.35)の条件を満たすように設計し、各々 $\theta_1 = 0^\circ$ と $\theta_2 = 45^\circ$ に設置すれば、モード 2 の電磁振動を完全に制振できる。以上が動吸振器による電動機固定子の電磁振動の制振理論であり、完全に制振できることが数学的に証明された。

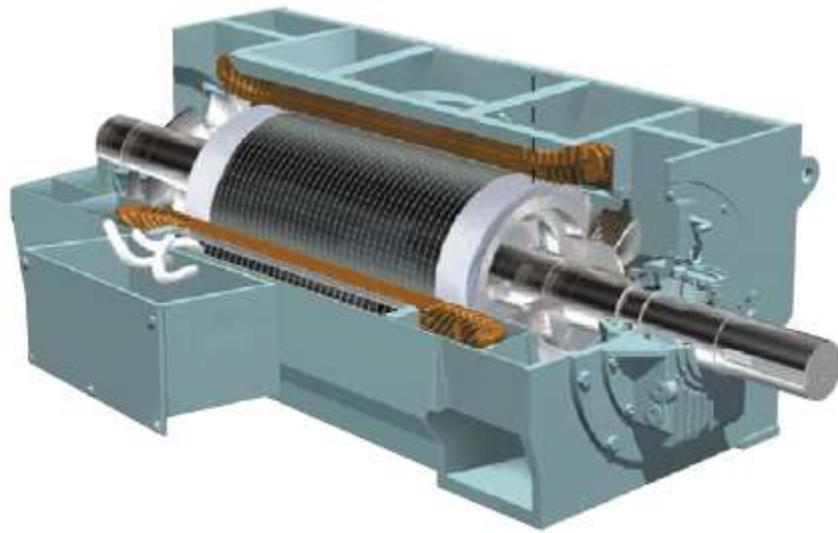
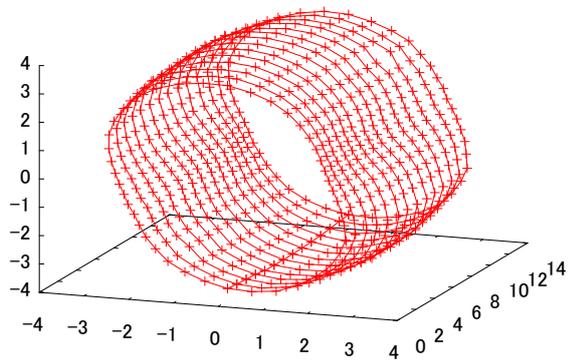


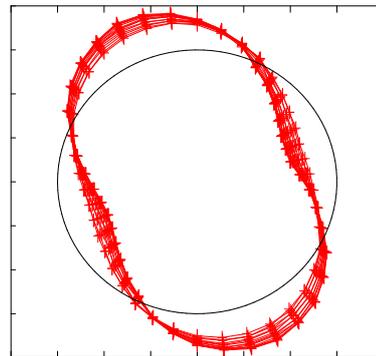
図 2.1 電動機の例⁽⁵⁷⁾



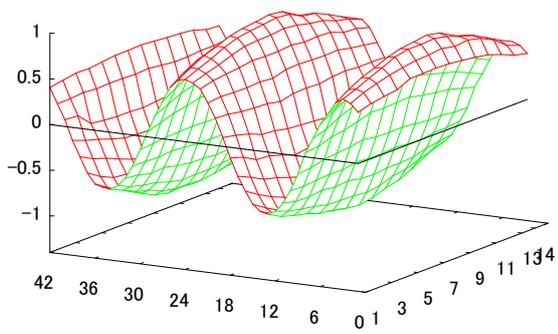
図 2.2 解析対象の電動機固定子



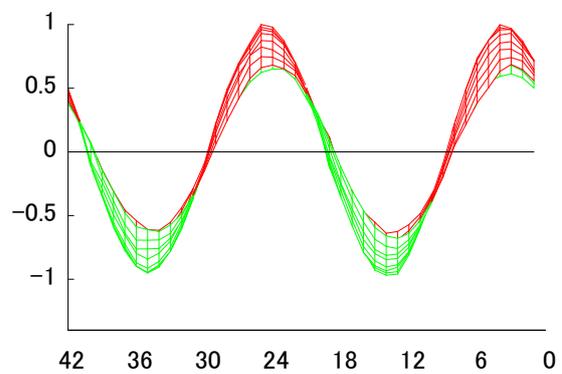
(a) 立体図



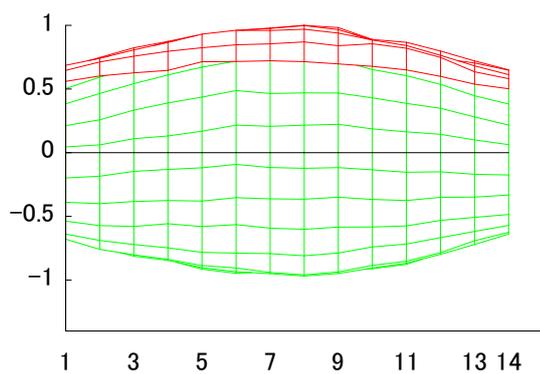
(b) 正面図



(c) 展開図

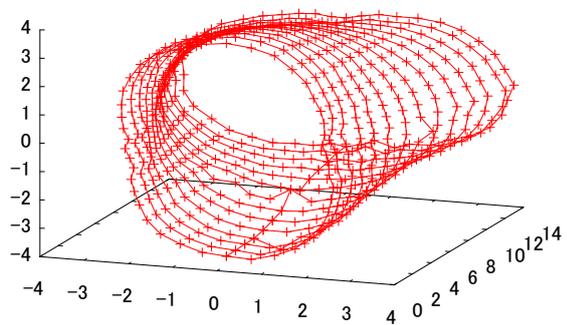


(d) 展開図(正面)

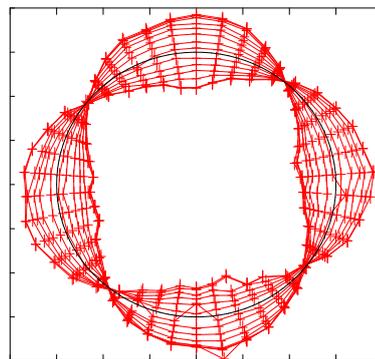


(e) 展開図(側面)

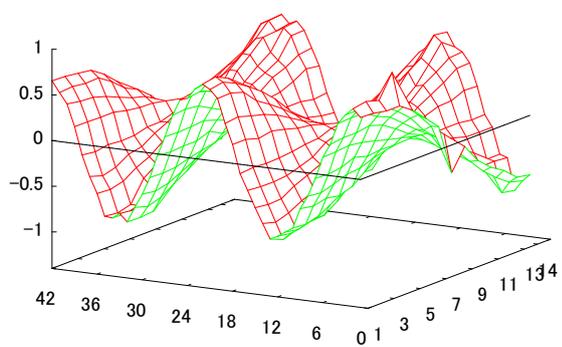
図 2.3 固定子(巻線なし), $i=2$, $i_m=0$ のモード



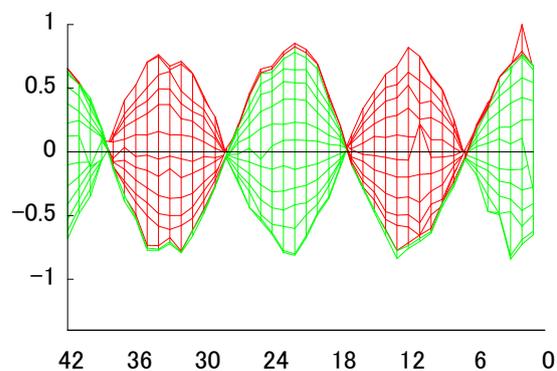
(a) 立体図



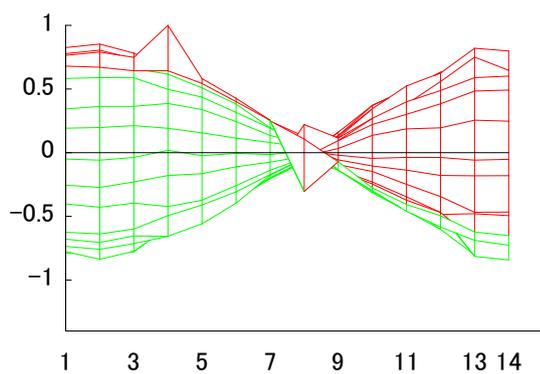
(b) 正面図



(c) 展開図

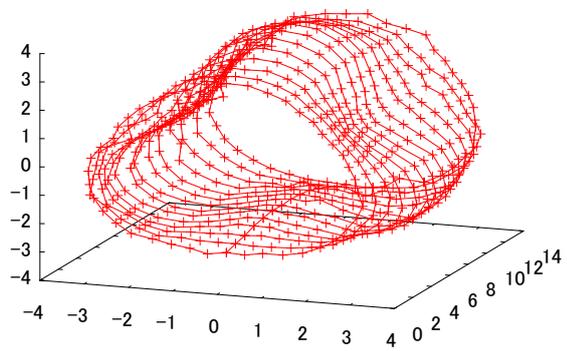


(d) 展開図(正面)

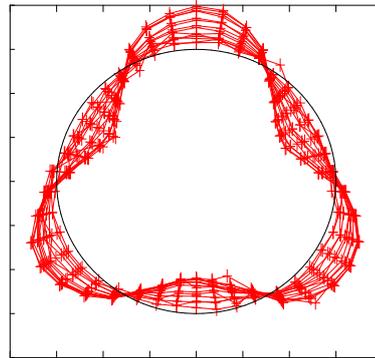


(e) 展開図(側面)

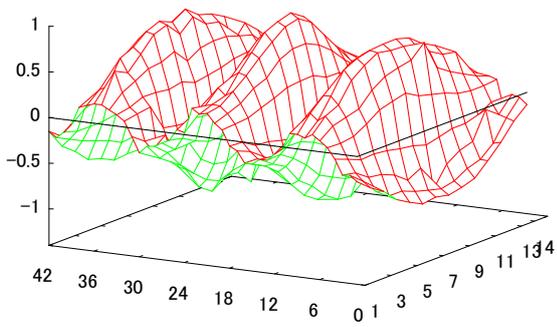
図 2.4 固定子(巻線なし), $i=2$, $i_m=1$ のモード



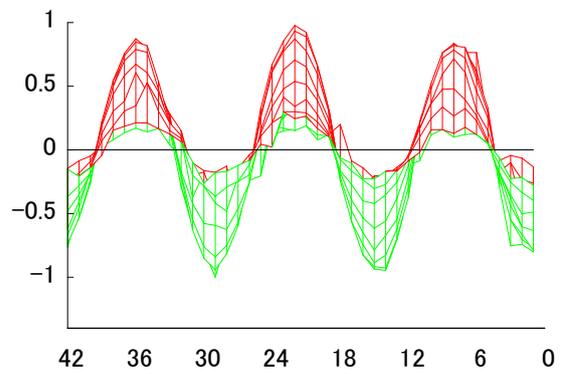
(a) 立体図



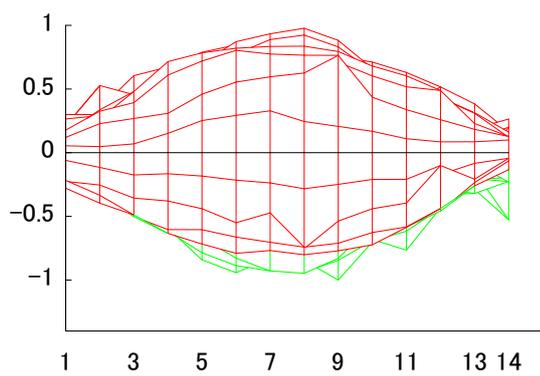
(b) 正面図



(c) 展開図

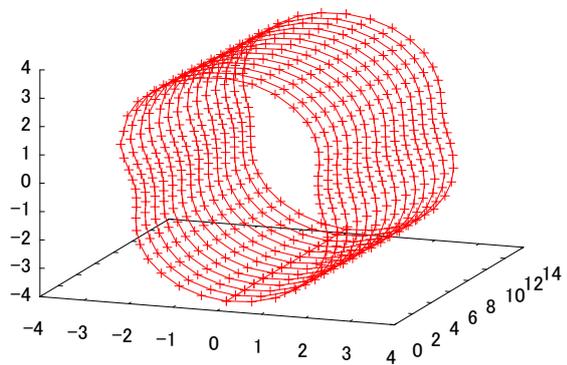


(d) 展開図(正面)

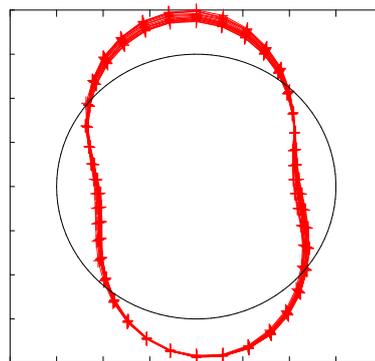


(e) 展開図(側面)

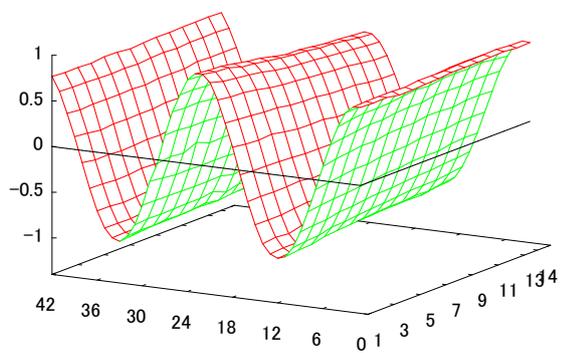
図 2.5 固定子(巻線なし), $i=3$, $i_m=0$ のモード



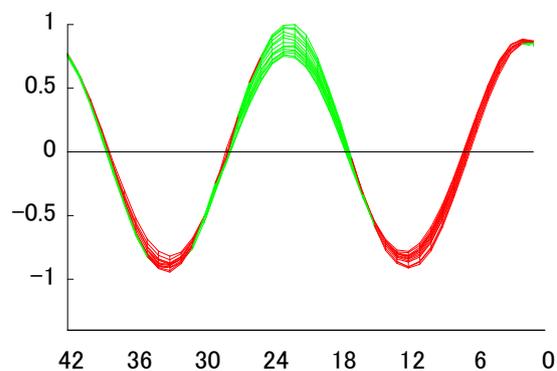
(a) 立体図



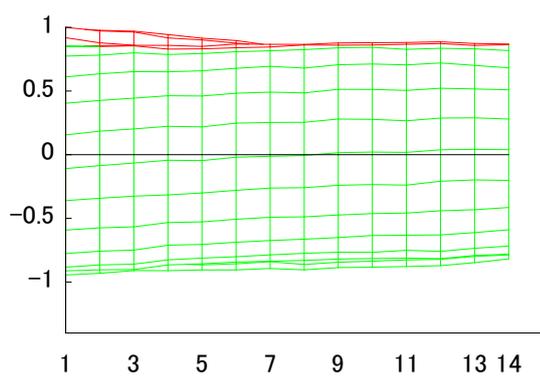
(b) 正面図



(c) 展開図

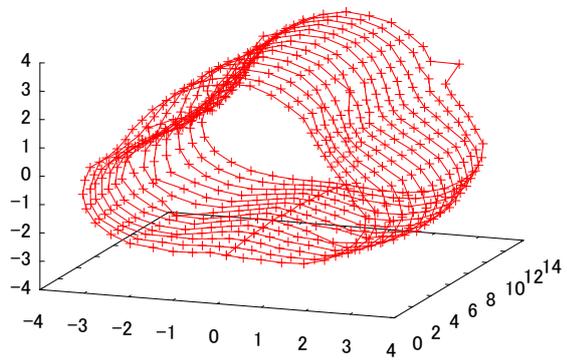


(d) 展開図(正面)

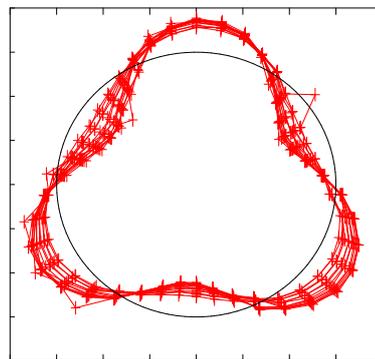


(e) 展開図(側面)

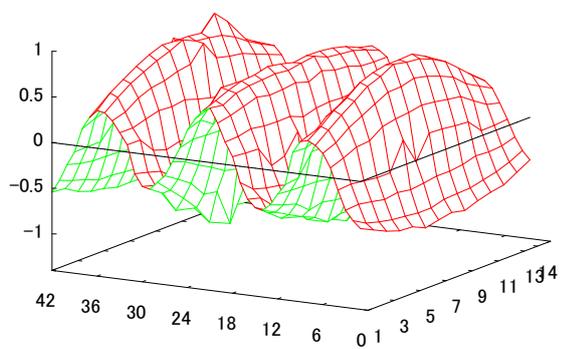
図 2.6 固定子(巻線あり), $i=2$, $i_m=0$ のモード



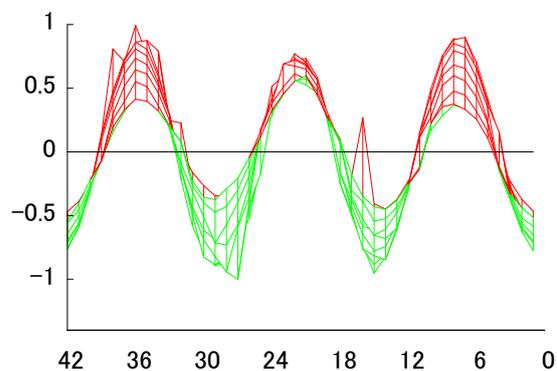
(a) 立体図



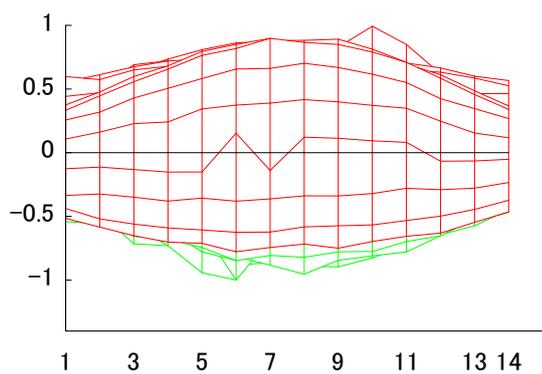
(b) 正面図



(c) 展開図



(d) 展開図(正面)



(e) 展開図(側面)

図 2.7 固定子(巻線あり), $i=3$, $i_m=0$ のモード

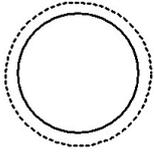
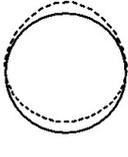
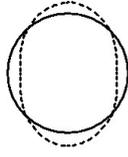
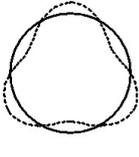
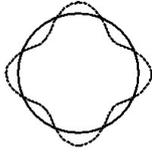
Mode	0	1	2	3	4
形状					

図 2.8 電動機固定子の振動モード

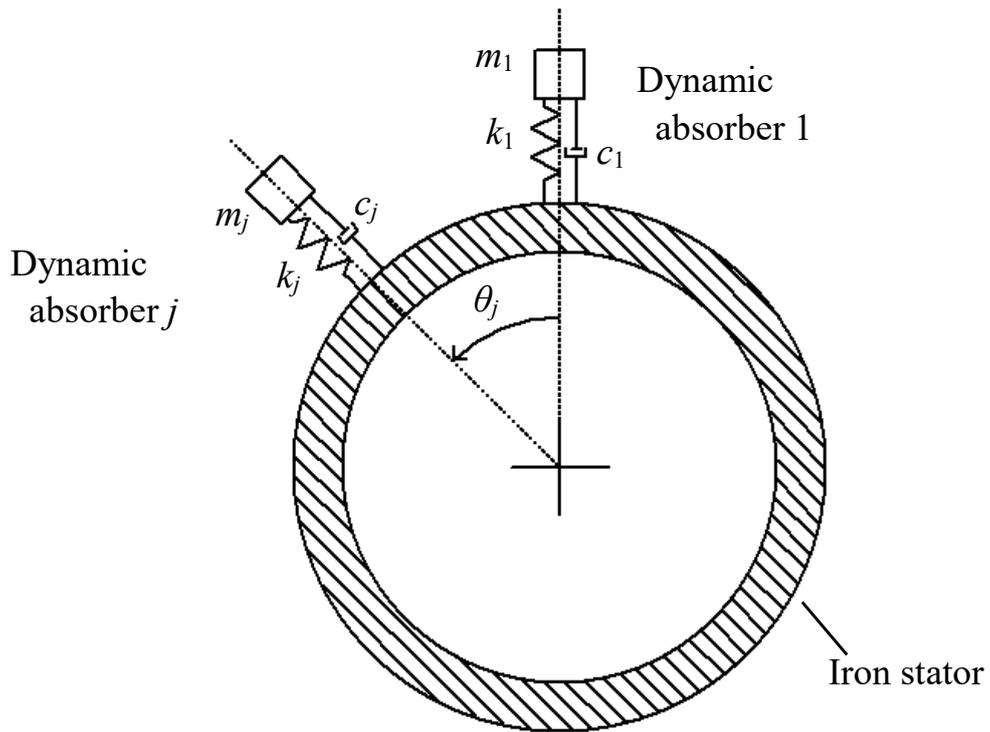


図 2.9 電動機固定子モデル図

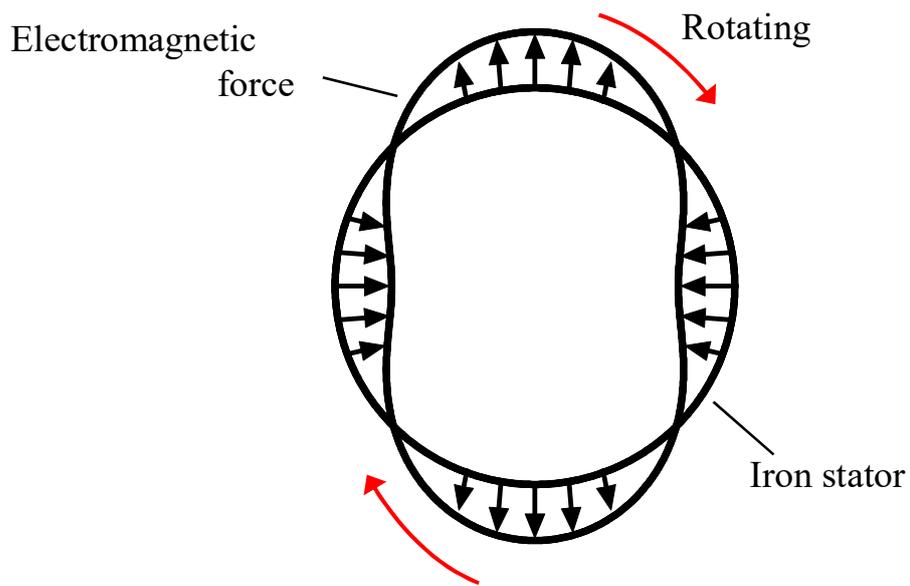


図 2.10 モード 2($s=2$)の電磁力モデル

第 3 章 電動機固定子の制振の詳細解析

3.1 理論解析

前章では、電動機固定子と動吸振器に減衰が無い場合、動吸振器を制振したいモードの腹と節の間隔にそれぞれ設置すると主系の共振点の振幅は完全に制振することができることを理論的に証明した。本章では、電動機固定子と動吸振器の両方に減衰を考慮し、外力となる電磁力として単一の周波数とモードをもつものが作用しているとし、固定子の固有モードも 1 つのみ考慮する場合について、動吸振器を設置しない場合、1 個、2 個と設置した場合を計算し、動吸振器の個数が制振効果に対してどのように影響するか調べる。また、動吸振器を 2 個設置した場合における動吸振器の設置間隔の影響を調べる。さらに、固定子の固有モードが複数個存在する場合についても調べ、主系として、固定子の i 次モードのみ採用し、同じモード形状の電磁力が作用する場合、すなわち $i=s$ の場合を扱う。ここで、第 2 章と同様に i は固定子の振動モードの円周方向の波の数、 s は固定子および回転子のスロット数により決まる電磁力のモードを表す整数である。

3.1.1 運動方程式

主系と動吸振器それぞれに粘性減衰力を考慮したときの主系と動吸振器の運動方程式はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi \rho A \ddot{a}_i + c_{0i} \dot{a}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} a_i \\ & + \sum_{j=1}^2 c_j \cos i \theta_j \left\{ \dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j \right\} - \dot{x}_j + \sum_{j=1}^2 k_j \cos i \theta_j \left\{ a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j \right\} - x_j \} \\ & = \pi F_s \cos \Omega_s t \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi \rho A \ddot{b}_i + c_{0i} \dot{b}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} b_i \\ & + \sum_{j=1}^2 c_j \sin i \theta_j \left\{ \dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j \right\} - \dot{x}_j + \sum_{j=1}^2 k_j \sin i \theta_j \left\{ a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j \right\} - x_j \} \\ & = -\pi F_s \sin \Omega_s t \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \left\{ \dot{x}_1 - \left(\dot{a}_i \cos i \theta_1 + \dot{b}_i \sin i \theta_1 \right) \right\} + k_1 \left\{ x_1 - \left(a_i \cos i \theta_1 + b_i \sin i \theta_1 \right) \right\} = 0 \quad (3.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \left\{ \dot{x}_1 - \left(\dot{a}_i \cos i \theta_2 + \dot{b}_i \sin i \theta_2 \right) \right\} + k_2 \left\{ x_2 - \left(a_i \cos i \theta_2 + b_i \sin i \theta_2 \right) \right\} = 0 \quad (3.4)$$

ここに、 $c_{0i}(i=1,\dots,M)$ は主系の粘性減衰係数であり、 $c_j(j=1,2)$ は動吸振器の粘性減衰係数である。また、理論解析においては主系の減衰比を0.02とする。

以下、 $i=2$ のモードの制振を考える。

式(3.1)から式(3.4)の定常解を次式のようにおく。

$$a_2 = A_1 \cos \Omega_2 t + B_1 \sin \Omega_2 t \quad (3.5)$$

$$b_2 = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \quad (3.6)$$

$$x_1 = A_3 \cos \Omega_2 t + B_3 \sin \Omega_2 t \quad (3.7)$$

$$x_2 = A_4 \cos \Omega_2 t + B_4 \sin \Omega_2 t \quad (3.8)$$

式(3.1)から式(3.4)に式(3.5)から式(3.8)を代入し $\cos \Omega_2 t$ 、 $\sin \Omega_2 t$ の係数を比較すると、 $A_1 \sim A_4$ 、 $B_1 \sim B_4$ に関する以下の連立方程式が得られる。

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j & c_{02}\Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ -c_{02}\Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & k_{01} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j & c_{01}\Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & -c_{02}\Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 \\ -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 \\ -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \Omega_2^2 & c_1 \Omega_2 & 0 & 0 \\ -c_1 \Omega_2 & k_1 - m_1 \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 & c_2 \Omega_2 \\ 0 & 0 & -c_2 \Omega_2 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{02} = \frac{5}{4} \pi r \rho A, \quad k_{02} = 9EI \frac{\pi}{r^3}$$

式(3.9)を解いて $A_1 \sim A_4$, $B_1 \sim B_4$ を求めることにより定常解を得る. 動吸振器と主系の質量比 μ は大幅な重量の増加を避けるために数%に留めることが望ましく, また, 実用化⁽⁵⁸⁾の観点からも次式で定義した.

$$\mu = \frac{m_1}{m_{02}} = \frac{m_2}{m_{02}} = 0.02 \quad (3.10)$$

また, 表 3.1 に主系のパラメータを示している. 動吸振器に減衰が無い場合については, 2 つの動吸振器の固有角振動数を $i=2$ のモードの固有角振動数 ω_{02} に一致させる.

3.1.2 共振点付近の制振

まず, 動吸振器を設置する場合との比較のため, 動吸振器を設置しないときの共振曲線を図 3.1 に示す. ここに, 以下の共振曲線の縦軸は次式で示すように, 式(2.26)で表される半径方向の変位 u の 2 乗を空間と時間で平均したものを $(F_2 \pi / k_{02})^2$ で除して無次元化したもので定義している ($k_{02} = 9EI\pi / r^3, T = 2\pi / \Omega_2$).

$$A^2 = \frac{1}{T \cdot 2\pi} \int_0^T \int_0^{2\pi} u^2 d\theta dt \Big/ (F_2 \pi / k_{02})^2 \quad (3.11)$$

表 3.1 主系のパラメータ

E (N/m ²)	2.06×10^{11}
I (m ⁴)	1.095×10^{-6}
r (m)	2.541×10^{-1}
A (m ²)	3.24×10^{-3}
ρ (kg/m ³)	7.8×10^3

横軸も次式で示すように電磁力の角振動数を無次元化している ($\omega_0^2 = 36EI/5\rho Ar^4$).

$$\nu = \frac{\Omega_2}{\omega_0} \quad (3.12)$$

また、得られた解から半径方向の変位 u として $\cos 2\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を青色の破線で、 $\sin 2\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を緑色の点線で表し、 $\cos 2\theta$ モードと $\sin 2\theta$ モードの和として式(3.11)で計算したものを赤色の実線で表している。このように縦軸を定義することにより、図 3.1 の動吸振器を設置しない場合の共振曲線から $\cos 2\theta$ モードと $\sin 2\theta$ モードの重ね合わせとして振動していることが理解できる。動吸振器を設置しないとき、振動変位 u は次式で表され、振動モードが電磁力とともに空間を回転していることがわかる。均一な円環の固有振動数は同一の振動数で振動の腹と節の数が同じ形状の 2 個の固有モードを持つため、その重ね合わせにより進行波となっている。

$$u = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \{ \cos(\Omega_2 t + \alpha) \cos 2\theta - \sin(\Omega_2 t + \alpha) \sin 2\theta \} = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cos(\Omega_2 t + \alpha + 2\theta) \quad (3.13)$$

減衰のない動吸振器を 1 個設置したときの共振曲線を図 3.2 に示す。動吸振器を設置したときについても線種の定義は設置しないときの図 3.1 と同様であるが、図 3.1 の動吸振器を設置していない場合の解である赤色の実線を比較のため黒色の実線 (Without D.A.) で示している。動吸振器を 1 個設置した場合は一文字ら⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾が研究しており、本研究でも同様の結果が得られた。すなわち、 $\cos 2\theta$ モードと $\sin 2\theta$ モードに分解して考えると、 $\cos 2\theta$ モードの振動は動吸振器 1 個を $\theta_1 = 0^\circ$ の位置に設置しているために共振点で制振できているが、 $\sin 2\theta$ モードの振動の共振曲線は図 3.1 の動吸振器がないときと全く変わっておらず、 $\sin 2\theta$ の振動モードを全く制振できていない。その結果として、電磁力により励振された振動モードは空間に固定されるようになるものの、式(3.11)で定義された A^2 の値は $\Omega_2 = \omega_0$ の共振点で 1/2 に制振されている。なお、共振点の両側に存在する共振ピークは動吸振器と連成した $\cos 2\theta$ モードの共振である。

図 3.3 から図 3.5 に 2 つの減衰のない動吸振器を設置した場合の共振曲線を示している。図(a)に主系の共振曲線、図(b)に動吸振器の共振曲線を示し、 θ_1 の角度に設置された動吸振器の A^2 の値を橙色の実線、 θ_2 の角度に設置された動吸振器の A^2 の値を水色の破線で示している。一对の動吸振器を制振したいモードの腹と節の間隔で設置しなくても、いずれの主系の共振曲線においても $\Omega_2 = \omega_0$ の共振点では振幅が零となって制振できていることがわかる (このことについては次節で考察する)。これは動吸振器を 2

個設置することで共振点では $\cos 2\theta$ モードと $\sin 2\theta$ モードの両方を制振できるためである。共振点付近の制振領域の広さは、一对の動吸振器の設置間隔が $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 22.5^\circ)$ 、 $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 30^\circ)$ 、 $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ)$ と振動モードの腹と節の間隔に近づくときと広がってきており、図 3.5 の $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ)$ の腹と節の間隔に一致する場合が最も広がっている。よって、動吸振器の設置誤差も考えられるが、できるだけ図 3.5 のように一对の動吸振器を制振したいモードの腹と節の間隔で設置することが望ましい。また、2 個の動吸振器の振幅は共振点において等しくなっており、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節に近づくとき小さくなっている。これは、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節であれば、主系の \sin 型モード成分と \cos 型モード成分に対して、動吸振器がそれぞれ 1 個作用するが、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節以外の場合、2 個の動吸振器が主系の \sin 型モード成分と \cos 型モード成分のどちらにも作用し、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と腹の間隔に近づくとき片方のモード成分では効果が薄れるためである。

図 3.6 に動吸振器の減衰比 γ が 0, 0.01, 0.05, 0.1 の場合の共振曲線を示している。図(a)に主系の共振曲線、図(b)に動吸振器の共振曲線を示し、それぞれ前述の減衰比に対応して赤色、青色、緑色、橙色の実線で示している。ここでは、2 個の動吸振器の共振曲線は、動吸振器の設置間隔が腹と節の間隔であり等しくなるため、 $\theta_1 = 0^\circ$ の角度に設置した動吸振器の共振曲線のみ示している。ただし、主系に対する動吸振器の固有振動数比は $1/(1+\mu)$ とした。この例では、動吸振器に $\gamma = 0.1$ 程度の適切な減衰を与えることで制振領域が広がることとわかる。また、動吸振器の振幅も全体的に小さくなる。駆動回転数が広範囲で変わるインバータ制御されたモータでは、このような設計の動吸振器が有効である。

3.1.3 共振点の制振における開き角の影響

ここでは、前節図 3.3 から図 3.5 の共振曲線において、 $\Omega_2 = \omega_{02}$ の共振点ではいずれも振幅が零であったことに関連して、共振点の制振における動吸振器の開き角の影響について考える。すなわち、円周方向波数が i のモードを対象に、動吸振器の開き角が $l\pi/i$ でなければ、共振点において振幅が零となり、完全に制振できることを証明する。ここに、 i は制振対象モードの円周方向波数、 l は零、あるいは正の整数である。

ここで、円周方向波数が i のモードの解のみ考え、

$$u = a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta, \quad a_i = A_1 \cos \Omega_s t + B_1 \sin \Omega_s t, \quad b_i = A_2 \cos \Omega_s t + B_2 \sin \Omega_s t \quad (3.14)$$

$$x_1 = A_3 \cos \Omega_s t + B_3 \sin \Omega_s t, \quad x_2 = A_4 \cos \Omega_s t + B_4 \sin \Omega_s t \quad (3.15)$$

とおく.

動吸振器の開き角が $l\pi/i$ でない場合

2つの動吸振器の開き角を Δ とし, $\theta_1 = 0, \theta_2 = \Delta$ とおくと, $\Omega_s = \omega_{0i} (s=i)$ の共振点における $\cos i\theta, \sin i\theta$

モードの振幅, および動吸振器の振幅に関する連立方程式は次式となる.

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 \cos^2 i\Delta & c_{0i}\Omega_s & k_2 \cos i\Delta \sin i\Delta & 0 & -k_1 & 0 & -k_2 \cos i\Delta & 0 \\ -c_{0i}\Omega_s & k_1 + k_2 \cos^2 i\Delta & 0 & k_2 \cos i\Delta \sin i\Delta & 0 & -k_1 & 0 & -k_2 \cos i\Delta \\ k_2 \sin i\Delta \cos i\Delta & 0 & k_2 \sin^2 i\Delta & c_{0i}\Omega_s & 0 & 0 & -k_2 \sin i\Delta & 0 \\ 0 & k_2 \sin i\Delta \cos i\Delta & -c_{0i}\Omega_s & k_2 \sin^2 i\Delta & 0 & 0 & 0 & -k_2 \sin i\Delta \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 \cos i\Delta & 0 & -k_2 \sin i\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 \cos i\Delta & 0 & -k_2 \sin i\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_s \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

この式は, 例えば, クラームルの公式を用いて容易に解くことができ, 結果は以下ようになる.

$$A_1 = \frac{0}{(k_1 k_2 \sin i\Delta)^4} = 0, \quad B_1 = \frac{0}{(k_1 k_2 \sin i\Delta)^4} = 0, \quad A_2 = \frac{0}{(k_1 k_2 \sin i\Delta)^4} = 0, \quad B_2 = \frac{0}{(k_1 k_2 \sin i\Delta)^4} = 0 \quad (3.17)$$

上式から $\Omega_s = \omega_{0i} (s=i)$ の共振点では, 動吸振器の開き角が零 (あるいは振動モードの腹と腹の間隔)

でなければ, 必ず固定子の振幅は零となり, 完全に制振できることが証明された.

また, 式(3.17)から動吸振器の開き角が零 (あるいは振動モードの腹と腹の間隔) の場合, 振幅の分母, 分子がともに零である特異型となっていることがわかる. このときの解は次のように求まる.

動吸振器の開き角が $l\pi/i$ の場合

$\theta_1 = 0, \theta_2 = l\pi/i$ とおくと, $\Omega_s = \omega_{0i} (s=i)$ の共振点における各モードの振幅に関する連立方程式は次式

となる. ここで, 複号 \pm の $+$ と $-$ はそれぞれ l の奇数と偶数に対応する.

$$\begin{bmatrix}
k_1 \mp k_2 & c_{0i}\Omega_s & 0 & 0 & -k_1 & 0 & \pm k_2 & 0 \\
-c_{0i}\Omega_s & k_1 \mp k_2 & 0 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & \pm k_2 \\
0 & 0 & 0 & c_{0i}\Omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -c_{0i}\Omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\pm k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \pm k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1 \\
B_1 \\
A_2 \\
B_2 \\
A_3 \\
B_3 \\
A_4 \\
B_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
F_s\pi \\
0 \\
0 \\
-F_s\pi \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (3.18)$$

上式を解くと次式となる.

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = \frac{F_0\pi}{c_{0i}\Omega_s}, \quad B_2 = 0 \quad (3.19)$$

例えば, 開き角 $l\pi/i$ の場合は 2 倍の質量をもつ動吸振器を 1 個設置する場合に相当するので, 上式の結果は, 図 3.2 のように $\Omega_s = \omega_{0i}$ ($s=i$) の共振点において sin 型のモードの制振ができていないことを数学的に証明している.

3.1.4 共振点以外の制振

図 3.7 は円周方向波数 $i=2$ の場合を対象に, 電磁力の振動数が主系の固有振動数よりも 50%高い場合を想定した主系の共振曲線である. 図(a)が全体図で, 図(b)が電磁力の無次元角振動数 ν が 1.5 付近の拡大図である. このとき, 動吸振器の固有振動数 ω_d を固定子の制振対象とする $i=2$ のモードの固有振動数 ω_{02} の 1.5 倍の値に一致させ, 減衰比 γ は零としている. また, 2 個の動吸振器を腹と節の間隔で設置している. 電磁力の無次元角振動数 ν が 1.5 のとき, 共振点での制振と同様に固定子の振幅が零になっていることがわかる. このことから, 電磁力の振動数と同じ固有振動数をもつ動吸振器を設置することにより, 共振点でなくとも固定子の振幅を小さくでき, 制振できることがわかる. 既存の製品においては, 既に共振しないように設計してあるため, このような設計の動吸振器を既に製品となっている電動機に適用することにより騒音をさらに低減できると考えられる. なお, $\nu=1.5$ の無次元角振動数においても腹と腹の間隔以外で一对の動吸振器を設置すれば 3.1.3 項で証明した $\nu=1$ の共振点における制振と同様に振幅が零になることを確認している.

次に, 電磁力の振動数と動吸振器の固有振動数が一致していない場合の制振を考える. 図 3.8 は図 3.7 と同様に電磁力の無次元角振動数 ν が 1.5 の場合の制振問題であるが, 動吸振器の固有角振動数 ω_d が 2% 低い $\omega_d = 0.98 \times 1.5\omega_{02} = 1.47\omega_{02}$ の場合の主系の共振曲線である. 一方, 図 3.9 は動吸振器の固有角振動数 ω_d

が 2%高い $\omega_d = 1.02 \times 1.5\omega_{02} = 1.53\omega_{02}$ の場合の主系の共振曲線である。図 3.9 の 2%高い場合では、図 3.7 の動吸振器の固有角振動数 ω_d が $1.5\omega_{02}$ の最も効果的な場合と比べると制振効果は少し低下しているが制振効果がみられる。一方、2%低い場合では動吸振器を設置する前よりはるかに振幅が増大し、逆効果となっている。これより、動吸振器の製作には正確な振動数の調節が必要と言える。

3.1.5 複数の固定子の固有モードを考慮した場合

3.1.4 節までは、簡単のため固定子の固有モードと電磁力のモードをそれぞれ 1 つ考慮して解析を行ったが、実際の固定子は複数のモードを含み、電磁力も多くのモードと周波数成分を含んでいる。基本的に固定子の振動モードと電磁力の振動モードと振動数の両方が一致したとき共振し、電磁振動を引き起こすが、設置した動吸振器によってその他の固定子のモードが励振されることも考えられる。ここでは、電磁力のモードは 1 つのままとし、固定子の固有モードが複数ある場合を考え、その影響を調べる。

固定子のモードとして $i=2,3$ のモードを考慮し、電磁力のモード $s=2$ が作用する場合を考え、共振して問題となっている固定子の振動モード $i=2$ を一対の動吸振器を用いて制振する。そのとき主系と動吸振器の運動方程式は式(3.1)から式(3.4)よりそれぞれ以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
 & m_{02}\ddot{a}_2 + c_{02}\dot{a}_2 + k_{02}a_2 \\
 & + \sum_{j=1}^2 c_j \cos 2\theta_j \left\{ (\dot{a}_2 \cos 2\theta_j + \dot{b}_2 \sin 2\theta_j + \dot{a}_3 \cos 3\theta_j + \dot{b}_3 \sin 3\theta_j) - \dot{x}_j \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \left\{ (a_2 \cos 2\theta_j + b_2 \sin 2\theta_j + a_3 \cos 3\theta_j + b_3 \sin 3\theta_j) - x_j \right\} \\
 & = \pi F_2 \cos \Omega_2 t
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 & m_{02}\ddot{b}_2 + c_{02}\dot{b}_2 + k_{02}b_2 \\
 & + \sum_{j=1}^2 c_j \sin 2\theta_j \left\{ (\dot{a}_2 \cos 2\theta_j + \dot{b}_2 \sin 2\theta_j + \dot{a}_3 \cos 3\theta_j + \dot{b}_3 \sin 3\theta_j) - \dot{x}_j \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \left\{ (a_2 \cos 2\theta_j + b_2 \sin 2\theta_j + a_3 \cos 3\theta_j + b_3 \sin 3\theta_j) - x_j \right\} \\
 & = -\pi F_2 \sin \Omega_2 t
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 & m_{03}\ddot{a}_3 + c_{03}\dot{a}_3 + k_{03}a_3 \\
 & + \sum_{j=1}^2 c_j \cos 3\theta_j \left\{ (\dot{a}_2 \cos 2\theta_j + \dot{b}_2 \sin 2\theta_j + \dot{a}_3 \cos 3\theta_j + \dot{b}_3 \sin 3\theta_j) - \dot{x}_j \right\} \\
 & + \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \left\{ (a_2 \cos 2\theta_j + b_2 \sin 2\theta_j + a_3 \cos 3\theta_j + b_3 \sin 3\theta_j) - x_j \right\} \\
 & = 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& m_{03}\ddot{b}_3 + c_{03}\dot{b}_3 + k_{03}b_3 \\
& + \sum_{j=1}^2 c_j \sin 3\theta_j \left\{ (\dot{a}_2 \cos 2\theta_j + \dot{b}_2 \sin 2\theta_j + \dot{a}_3 \cos 3\theta_j + \dot{b}_3 \sin 3\theta_j) - \dot{x}_j \right\} \\
& + \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \left\{ (a_2 \cos 2\theta_j + b_2 \sin 2\theta_j + a_3 \cos 3\theta_j + b_3 \sin 3\theta_j) - x_j \right\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& m_1\ddot{x}_1 + c_1 \left\{ \dot{x}_1 - (\dot{a}_2 \cos 2\theta_1 + \dot{b}_2 \sin 2\theta_1 + \dot{a}_3 \cos 3\theta_1 + \dot{b}_3 \sin 3\theta_1) \right\} \\
& + k_1 \left\{ x_1 - (a_2 \cos 2\theta_1 + b_2 \sin 2\theta_1 + a_3 \cos 3\theta_1 + b_3 \sin 3\theta_1) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& m_2\ddot{x}_2 + c_2 \left\{ \dot{x}_2 - (\dot{a}_2 \cos 2\theta_2 + \dot{b}_2 \sin 2\theta_2 + \dot{a}_3 \cos 3\theta_2 + \dot{b}_3 \sin 3\theta_2) \right\} \\
& + k_2 \left\{ x_2 - (a_2 \cos 2\theta_2 + b_2 \sin 2\theta_2 + a_3 \cos 3\theta_2 + b_3 \sin 3\theta_2) \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ここに

$$m_{02} = \frac{5}{4} \pi r \rho A, \quad k_{02} = 9EI \frac{\pi}{r^3}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_{02}}{m_{02}}}, \quad m_{03} = \frac{10}{9} \pi r \rho A, \quad k_{03} = 64EI \frac{\pi}{r^3}, \quad \omega_{03} = \sqrt{\frac{k_{03}}{m_{03}}}$$

式(3.20)から式(3.25)の定常解を次式のようにおく。

$$u = a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + a_3 \cos 3\theta + b_3 \sin 3\theta \tag{3.26}$$

$$a_2 = A_1 \cos \Omega_2 t + B_1 \sin \Omega_2 t \tag{3.27}$$

$$b_2 = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \tag{3.28}$$

$$a_3 = A_3 \cos \Omega_2 t + B_4 \sin \Omega_2 t \tag{3.29}$$

$$b_4 = A_4 \cos \Omega_2 t + B_4 \sin \Omega_2 t \tag{3.30}$$

$$x_1 = A_5 \cos \Omega_2 t + B_5 \sin \Omega_2 t \tag{3.31}$$

$$x_2 = A_6 \cos \Omega_2 t + B_6 \sin \Omega_2 t \tag{3.32}$$

式(3.20)から式(3.25)に式(3.27)から式(3.32)を代入し $\cos \Omega_2 t$, $\sin \Omega_2 t$ の係数を比較すると, $A_1 \sim A_6$, $B_1 \sim B_6$ に関する以下の連立方程式が得られる。

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \\ A_5 \\ B_5 \\ A_6 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2\pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_2\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j & c_{03}\Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ -c_{03}\Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j & c_{02}\Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & -c_{02}\Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02}\Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 3\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \cos 3\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 3\theta_j \\ \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \sin 3\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 3\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \sin 3\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{13} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 \\ -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \sin 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \cos 2\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \sin 2\theta_j \\ \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \sin 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \cos 2\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \sin 2\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} k_{03} - m_{03} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 3\theta_j & c_{03} \Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \sin 3\theta_j \\ -c_{03} \Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 3\theta_j & k_{03} - m_{03} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 3\theta_j & -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 3\theta_j \sin 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 3\theta_j \sin 3\theta_j \\ \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \cos 3\theta_j & k_{03} - m_{03} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 3\theta_j & c_{03} \Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 3\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 3\theta_j \cos 3\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 3\theta_j \cos 3\theta_j & -c_{03} \Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 3\theta_j & k_{03} - m_{03} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 3\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{23} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 3\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 3\theta_1 & -k_2 \cos 3\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 3\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \cos 3\theta_1 & -k_1 \cos 3\theta_1 & c_2 \Omega_2 \cos 3\theta_2 & -k_2 \cos 3\theta_2 \\ -k_1 \sin 3\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 3\theta_1 & -k_2 \sin 3\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 3\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \sin 3\theta_1 & -k_1 \sin 3\theta_1 & c_2 \Omega_2 \sin 3\theta_2 & c_3 \Omega_2 \sin 3\theta_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{31} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 \\ -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{32} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 3\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 3\theta_1 & -k_1 \sin 3\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 3\theta_1 \\ c_1 \Omega_2 \cos 3\theta_1 & -k_1 \cos 3\theta_1 & c_1 \Omega_2 \sin 3\theta_1 & -k_1 \sin 3\theta_1 \\ -k_2 \cos 3\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 3\theta_2 & -k_2 \sin 3\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 3\theta_2 \\ c_2 \Omega_2 \cos 3\theta_2 & -k_2 \cos 3\theta_2 & c_2 \Omega_2 \sin 3\theta_2 & -k_2 \sin 3\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{33} = \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \Omega_2^2 & c_1 \Omega_2 & 0 & 0 \\ -c_1 \Omega_2 & k_1 - m_1 \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 & c_2 \Omega_2 \\ 0 & 0 & -c_2 \Omega_2 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 \end{bmatrix}$$

式(3.33)を解いて $A_1 \sim A_6$, $B_1 \sim B_6$ を求めることにより定常解を得る。

図 3.10 に、一対の動吸振器 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$) を設置し、固定子のモードとして $i=2,3$ のモードを考慮した場合の共振曲線を示す。共振点の A^2 の値はほぼ零となっていることから固定子が複数のモードを持っていても一対の動吸振器を設置することで制振できることがわかった。しかし、一対の動吸振器を設置することにより新たにできた共振点付近では \cos モードと \sin モード成分の A^2 の値が異なっている。固定子のモード $i=2$ のみを考慮していた図 3.5 では見られなかった傾向である。ここで、 $i=3$ のモードの腹と節の間隔は 30° であり、 $i=3$ のモード成分に対しては動吸振器の設置位置 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)

は適切ではない。 $\theta = 0^\circ$ の位置を $i=3$ の \cos モード成分の振動の腹とすると、 $\theta = 30^\circ$ の位置は $i=3$ の \sin モード成分の振動の腹、 $\theta = 60^\circ$ の位置は $i=3$ の \cos モード成分の振動の腹となる。 $\theta_2 = 45^\circ$ に設置された動吸振器はそのちょうど間に位置するので \cos モード成分にも影響することになり、 \cos モード成分の方よりも制振されたと考えられる。 このことを明らかにするために、 図 3.11 に図 3.10 の結果を成分ごとに分解した共振曲線を示す。 図(a)に $i=2$ モード成分を抽出した共振曲線、 図(b)に $i=3$ モード成分を抽出した共振曲線を示す。 また、 図(a)に、 得られた解から半径方向の変位 u としてモード $i=2$ の $\cos 2\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を青色の実線で、 モード $i=2$ の $\sin 2\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を緑色の点線で表す。 図(b)に、 得られた解から半径方向の変位 u としてモード $i=3$ の $\cos 3\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を青色の実線で、 モード $i=3$ の $\sin 3\theta$ モードのみ抽出したときの A^2 の値を緑色の点線で表す。 これより、 動吸振器設置による新たな 2 つのピークの差については、 $i=3$ モード成分は非常に小さな値なので、 動吸振器によって励振された $i=3$ モード成分の $\cos 3\theta$ モードと $\sin 3\theta$ モードの A^2 の値の差による影響ではないと言える。

そこで、 主系や動吸振器の位相差によるものか検証した。 図 3.12 に、 一对の動吸振器 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$) を設置し、 固定子のモード $i=2$ のみを考慮した場合の時間軸波形を示す。 ここに、 縦軸は式 (3.26) で表される半径方向の変位 u を $(F_2\pi/k_{02})$ で除して無次元化したもので定義し、 横軸は時間を取っている。 図(a)に主系の時間軸波形、 図(b)に動吸振器の時間軸波形を示す。 黒色の実線は $\theta = 0^\circ$ での応答である \cos モードを示し、 赤色の実線は $\theta = 45^\circ$ での応答である \sin モードを示す。 \cos モードと \sin モードは 90° の位相差があり、 主系と動吸振器は逆位相となっている。 図 3.13 に、 一对の動吸振器 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$) を設置し、 固定子のモード $i=2,3$ を考慮した場合の時間軸波形を示す。 図(a)に $i=2$ モード成分のみを抽出した主系の時間軸波形、 図(b)に $i=3$ モード成分のみを抽出した主系の時間軸波形、 図(c)に動吸振器の時間軸波形を示す。 それぞれ、 $\theta = 0^\circ$ での応答である \cos モードを青色の実線で示し、 $\theta = 45^\circ$ での応答である \sin モードを緑色の実線で示す。 黒色の実線と赤色の実線は図 3.12 に示した波形である。 $i=2,3$ を考慮した場合の \cos モードと \sin モードの振幅は異なっており、 また、 $i=3$ のモードを考慮する場合としない場合では図(a)(c)から $2/100$ 周期ほど位相差があり、 図(b)の $i=3$ のモードについては明らかに 90° 以上の位相差がある。 このことが図 3.10 の \sin モードと \cos モードの応答振幅の差の原因である可能性がある。

ここでは、 数式処理ソフト Maxima を用いて式(3.33)を解き、 得られた解から主系の減衰と高次の 3 次

モードの影響を検証した。比較対象として以下の場合を考える。

Pattern 1-1：主系の減衰あり，固定子の振動モード $i=2$ のみを考慮した場合

Pattern 1-2：主系の減衰なし，固定子の振動モード $i=2$ のみを考慮した場合

Pattern 1-3：主系の減衰ありとなし，共振点 ($\nu=1$) での固定子の振動モード $i=2$ のみを考慮した場合

Pattern 2-1：主系に減衰なし，固定子の振動モード $i=2,3$ を考慮した場合

Pattern 2-2：主系に減衰なし，共振点 ($\nu=1$) での固定子の振動モード $i=2,3$ を考慮した場合

Pattern 2-3：主系に減衰あり，共振点 ($\nu=1$) での固定子の振動モード $i=2,3$ を考慮した場合

この 6 通りにおける解を以下に示す。

Pattern 1-1

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 = -B_2 &= \frac{(D_{02}D^2 + kD^2 - k^2D)F_0\pi}{X} & B_1 = A_2 &= \frac{c_{02}D^2\Omega F_0\pi}{X} \\
 A_5 = -B_6 &= \frac{(kD_{02}D + k^2D - k^3)F_0\pi}{X} & B_5 = A_6 &= \frac{c_{02}kD\Omega F_0\pi}{X} \\
 X &= (c_{02}D\Omega)^2 + 2kDD_{02}(D-k) + (DD_{02})^2 + (kD)^2 - 2k^3D + k^4
 \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Pattern 1-2

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 = -B_2 &= \frac{DF_0\pi}{DD_{02} + kD - k^2} & B_1 = A_2 &= 0 \\
 A_5 = -B_6 &= \frac{kF_0\pi}{DD_{02} + kD - k^2} & B_5 = A_6 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Pattern 1-3

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 = B_1 = A_2 = B_2 &= 0 \\
 A_5 = -B_6 &= -\frac{F_0\pi}{k^2} & B_5 = A_6 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Pattern 2-1

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -B_2 = [D_{02} \{Dk^2(D - 4D_{03} - 2k) + 2D_{03}D^2(D_{03} + 2k) + k^4\} \\
 &\quad + 2k^2D_{03}D(D - D_{03}) + 2D_{03}k\{D_{03}D^2 - 2k^2D + k^3\}]F_0\pi/X \\
 B_1 &= A_2 = -\sqrt{2}kD_{03}(kD^2 - 2k^2D + k^3)F_0\pi/X \\
 A_3 &= [D_{02} \{k^2(D^2 - 2DD_{03}) + 2kD_{03}D^2 - 2k^3D + k^4\} + 2k^2D_{03}D^2 - 4k^3D_{03}D + 2k^4D_{03}]F_0\pi/X \\
 B_3 &= \{D_{02}(\sqrt{2}k^2D_{03}D - \sqrt{2}kD_{03}D^2) - \sqrt{2}k^2D_{03}D^2 + 2\sqrt{2}k^3D_{03}D - \sqrt{2}k^4D_{03}\}F_0\pi/X \\
 A_4 &= -D_{02}(k^2D^2 - 2k^3D + k^4)F_0\pi/X \\
 B_4 &= [D_{02} \{\sqrt{2}k^2(D^2 - 2DD_{03}) + \sqrt{2}kD_{03}D^2 - 2\sqrt{2}k^3D + \sqrt{2}k^4\} \\
 &\quad + \sqrt{2}k^2D_{03}D^2 - 2\sqrt{2}k^3D_{03}D + \sqrt{2}k^4D_{03}]F_0\pi/X \\
 A_5 &= -B_6 = -\{D_{02}(-2kD_{03}^2D - 2k^2D_{03}D + 2k^3D_{03}) - 2k^2D_{03}^2D + 2k^3D_{03}^2\}F_0\pi/X \\
 B_5 &= D_{02}(\sqrt{2}k^3D_{03} - \sqrt{2}k^2D_{03}D)F_0\pi/X \\
 \\
 X &= 4D_{02}D_{03}k\{kD(D - D_{03} - 2k) + D_{03}D^2 + k\} \\
 &\quad + D_{02}^2k\{kD(D - 4D_{03} - 2k) + 2D_{03}D^2(D_{03} + 2) + k^3\} + 2D_{03}k^2\{D^2 - 2kD + k^2\}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Pattern 2-2

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -B_2 = \frac{F_0\pi}{D_{03}} & B_1 &= -A_2 = \frac{F_0\pi}{\sqrt{2}D_{03}} \\
 A_3 &= -\frac{F_0\pi}{D_{03}} & B_3 &= -\frac{F_0\pi}{\sqrt{2}D_{03}} & A_4 &= 0 & B_4 &= -\frac{F_0\pi}{\sqrt{2}D_{03}} \\
 A_5 &= -B_6 = -\frac{F_0\pi}{k} & B_5 &= A_6 = 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pattern 2-3

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 2D_{03}(c_{02}^2\Omega^2 - 2\sqrt{2}c_{02}D_{03}\Omega + 2D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 B_1 &= (c_{02}^3\Omega^3 - \sqrt{2}c_{02}^2D_{03}\Omega^2 + 6c_{02}D_{03}^2\Omega + 2\sqrt{2}D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 A_2 &= (c_{02}^3\Omega^3 + \sqrt{2}c_{02}^2D_{03}\Omega^2 + 6c_{02}D_{03}^2\Omega - 2\sqrt{2}D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 B_2 &= -2D_{03}(c_{02}^2\Omega^2 + 2\sqrt{2}c_{02}D_{03}\Omega + 2D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 A_3 &= -2D_{03}(c_{02}^2\Omega^2 - 2\sqrt{2}c_{02}D_{03}\Omega + 2D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 B_3 &= -(c_{02}^3\Omega^3 - \sqrt{2}c_{02}^2D_{03}\Omega^2 + 6c_{02}D_{03}^2\Omega + 2\sqrt{2}D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 A_4 &= -c_{02}\omega(\sqrt{2}c_{02}^2\Omega^2 + 4c_{02}D_{03}\Omega + 2\sqrt{2}D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 B_4 &= -(c_{02}^3\Omega^3 - 3\sqrt{2}c_{02}^2D_{03}\Omega^2 - 2c_{02}D_{03}^2\Omega - 2\sqrt{2}D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 A_5 &= -D_{03}(\sqrt{2}c_{02}^3\Omega^3 + 6c_{02}^2D_{03}\Omega^2 - 2\sqrt{2}c_{02}D_{03}^2\Omega + 4D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 B_5 &= -c_{02}D_{03}\omega(2c_{02}^2\Omega^2 - 4\sqrt{2}c_{02}D_{03}\Omega + 4D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 A_6 &= -c_{02}D_{03}\omega(2c_{02}^2\Omega^2 + 4\sqrt{2}c_{02}D_{03}\Omega + 4D_{03}^2)F_0\pi/X \\
 A_6 &= -D_{03}(\sqrt{2}c_{02}^3\Omega^3 - 6c_{02}^2D_{03}\Omega^2 - 2\sqrt{2}c_{02}D_{03}^2\Omega - 4D_{03}^3)F_0\pi/X \\
 \\
 X &= c_{02}^4\Omega^4 + 12(c_{02}D_{03})^2\Omega^2 + 4D_{03}^4
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

ここに

$$D_{02} = k_{02} - m_{02}\Omega^2, \quad D_{03} = k_{03} - m_{03}\Omega^2, \quad D = k_1 - m_1\Omega^2 = k_2 - m_2\Omega^2$$

$$k = k_1 = k_2, \quad c_1 = c_2 = 0, \quad \theta_1 = 0^\circ, \quad \theta_2 = 45^\circ$$

Pattern 1-1, Pattern 1-2, Pattern 1-3 から、固定子の振動モード $i=2$ のみを考慮した場合には共振点や主系の減衰の有無にかかわらず、 $A_1 = -B_2$ のような関係が成り立つことがわかった。これが cos モードと sin モードの振幅が一致する理由である。一方、 $i=3$ のモードを考慮した Pattern 2-1, Pattern 2-2, Pattern 3-3 では、 $i=2$ に関する解において主系の減衰が無い場合、その関係は成り立ったが、主系の減衰があると、符号が異なる項が出現した。これより、主系の減衰と $i=3$ のモードの両方の影響によって図 3.10 の sin モードと cos モードの応答に差が出たと思われる。

固定子に複数のモードがある場合、設置した動吸振器によって固定子のその他のモードがわずかに励振されることや、主系の減衰と相まって新たな共振点での cos モードと sin モードの振幅が異なったものと推察される。ただし、もとの共振点付近では動吸振器を一对設置することで制振できており、影響もほとんどないため、固定子の特定のモードの制振問題において固定子の他のモードを考慮しなくてもよいと言える。

3.2 有限要素解析

本節では、有限要素解析ソフト Marc を使用して電動機の動吸振器による制振効果を検証する。本解析では、固有モード解析と過渡応答解析の 2 つの解析方法でその応答を考察する。

3.2.1 解析モデル

三相誘導電動機を想定した仮想的な固定子鉄心を解析対象とする。有限要素モデルを図 3.14(a)に示す。パラメータは表 3.2 に示すとおりである。実際の鉄心は軸方向に何枚も積層されているが、ハンマリング試験では軸方向に節がないモードのみしか測定されなかったことを受け、理論解析と同様にここでは簡単のため円環とみなしてモデルの作製を行った。モデルの作製にあたって、軸方向の変形は均一と考

え，2次元要素でモデル化した．図 3.14(b)に動吸振器を $\theta_1 = 0^\circ$ の角度に動吸振器を設置した場合の有限要素モデルを示し，図 3.14(c)に動吸振器を $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$ の角度に動吸振器を2個設置した場合の有限要素モデルを示している．動吸振器と主系との質量比 μ は次式で定義した．また，式(3.41)に主系である円環の質量を定義している．

$$\mu = \frac{m_{D.A.}}{m_{M.S.}} = 0.02 \quad (3.40)$$

$$m_{M.S.} = \left\{ \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_i}{2} \right)^2 \right\} \pi \times b \times \rho \quad (3.41)$$

ここで，

$m_{D.A.}$: 動吸振器の質量	$m_{M.S.}$: 円環の質量
d_o : 円環の外径	d_i : 円環の内径
b : 円環の厚さ	ρ : 円環の密度

動吸振器の剛性はその固有振動数が主系のそれと同じになるように調節し，円環を構成する各要素は四角形8節点要素とし，図 3.14 のモデルでは要素数 216，節点数 792 である．境界条件はフリーとした．動吸振器は簡単のためマス，バネ型としてモデル化した．

表 3.2 円環モデルのパラメータ

Outer diameter(mm)	590.0
Inner diameter(mm)	428.4
Thickness(mm)	1.0
Poisson's Constant	0.3
Mass Density(kg/m ³)	7.8×10^3
Young's modulus(N/m ²)	2.06×10^{11}

3.2.2 固定子に作用する電磁力

過渡応答解析では，時刻 t によって変化する加振力を鉄心内径に作用させることで電磁力を表現する．

電磁力は円周方向に分布し、半径方向に作用するので、次式のように表される。

$$F(\theta, t) = F_0 \cos(\omega t + s\theta) \quad (3.42)$$

ここに

s : 電磁力のモードを表す整数

ω : モード s をもつ電磁力の角振動数 (rad/s)

F_0 : 電磁力の振幅 (N)

また、電磁力の振幅 F_0 は次式で与える。

$$F_0 = \frac{B_g^2}{2\mu_0} \times 1 \times 10^{-4} \quad (\text{N}) \quad (3.43)$$

ここに

B_g : 磁束密度 (T)

μ_0 : 透磁率 (H/m)

本解析では図 2.10 で示す 4 節の円環振動モードを考えるため、電磁力の振動モードを表す整数 s に 2 を代入すると加振力として次式が得られる。

$$F(\theta, t) = \frac{B_g^2}{2\mu_0} \cos(\omega t + 2\theta) \times 10^{-4} \quad (\text{N/m}^2) \quad (3.44)$$

この加振力を固定子モデル内径の各要素に作用させ解析を行う。以下では、この $s=2$ のモードの分布した電磁力が角速度 ω で回転するときの制振問題を取り扱う。

3.2.3 レイリー減衰の導入

過渡応答解析では、主系の各要素に減衰を与えるために次式の仮想的な減衰であるレイリー減衰を用いた。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3.45)$$

ここに

M : 主系の質量マトリクス

K : 主系の剛性マトリクス

C : 主系の減衰マトリクス

α : 質量減衰係数

β : 剛性減衰係数

そして、 $i=2$ のモードに関する減衰比 γ との関係は次式により得ることができる。

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\omega_{02}} + \frac{\beta\omega_{02}}{2} \quad (3.46)$$

簡単のため質量減衰係数のみが作用するものとし ($\beta=0$)，理論解析と同様に $i=2$ のモードの減衰比が 0.02 となるように質量減衰係数 α を $0.04\omega_{02}$ とした。また，動吸振器の減衰は零とした。

3.2.4 モード解析

図 3.15，図 3.16，図 3.17 に固有モード解析の結果を示す。それぞれのモード図は Marc の Auto Scale 機能を用いて，変形を目視で確認できる適度なスケールにした。また，各図の要素の色は青→赤→黄の順にその要素の変位の絶対値が大きくなり，黄色が最も変位が大きいことを示している。また，各図では元の固定子の形状をピンク色の実線で示している。

図 3.15 に動吸振器を設置していない場合の固有モード $i=2$ のモード形状と固有振動数を示している。図(a)，(b)に示すように，同じ振動数の $i=2$ の固有モードを 2 つ確認した。これら 2 つのモード形状は，特定の位置において一方のモードが腹にあたる時はもう片方のモードは節になり，互いに腹と節が入れ替わるようになっている。したがって，2 つのモードの腹と腹，節と節の間隔は 45° となっている。これらは，第 2 章で示した \cos モード， \sin モードに相当するものである。ただし，第 2 章では $\theta=0^\circ$ の角度に振動モードの腹があるものを \cos モード， $\theta=0^\circ$ の角度に振動モードの節があるものを \sin モードと定義していたが，境界条件が両端自由で不均一性のない円環であればモードは空間に固定されないため，ここでは図(a)を \cos モード，図(b)を \sin モードと仮定している。

図 3.16 に，動吸振器を 1 個設置した場合の固有モード $i=2$ のモード形状と固有振動数を示している。動吸振器を $\theta=0^\circ$ の角度に設置したことで，3 つの固有モードが得られた。動吸振器の設置位置が腹にあたる \cos モードが高次と低次の 2 つにわかれていることがわかる。一方，設置位置が節にあたる \sin

モード形状はほとんど変化せず，動吸振器のない場合と固有振動数も同じである．これは，動吸振器の設置位置が \sin モードの節の位置であるために動吸振器も \sin モードと連成しなかったためである．また，動吸振器が設置された $\theta = 0^\circ$ の角度において，図(a)では主系と動吸振器は共に外側に振動しており同位相であり，図(c)では主系は内側，動吸振器は外側に振動しており，主系と動吸振器は逆位相である．よって，この2つのモードの間の振動数，つまり動吸振器を設置していない場合の \cos モードの固有振動数において，振幅が小さくなることを意味する．一方，動吸振器の動きに着目すると， \sin モードでは動吸振器が青色で表示され全く振動していないことがわかるが，高次と低次に分かれた \cos モードでは，動吸振器が大きく振動していることがわかる．

図 3.17 は動吸振器を 2 個設置した場合の $i=2$ のモード形状と固有振動数を示している．図から動吸振器を $\theta_1 = 0^\circ$ と $\theta_2 = 45^\circ$ の位置に 2 個設置した場合，動吸振器を 1 個設置した場合とは異なり， \sin モードも高次と低次の 2 つのモードに分かれて，あわせて 4 つの固有モードが確認できる．主系が $i=2$ の 1 つのモードしかもたなければ図(a), (b)と図(c), (d)の振動数は等しくなる．しかし，有限要素解析では，主系に全てのモード成分が含まれるため， $i=2$ 以外のモードの影響を受けて異なる振動数になったものと考えられる．図(a)(b)は主系と動吸振器は同位相で振動しており，図(c)(d)は主系と動吸振器は逆位相で振動していることがわかる．また，図(a)と図(c)は固定子の円周方向の 2 つの動吸振器の設置位置の間に節があるモードで，図(b)と図(d)は 2 つの動吸振器の設置位置の間に腹があることがわかる．

3.2.5 過渡応答解析

本節では，応答シミュレーションを行い，固定子が複数の振動モードを含んでいることの影響を確認し，動吸振器の制振効果を検証する．

図 3.18, 図 3.19, 図 3.20, 図 3.21 に共振点における応答シミュレーションを示す．電磁力の振動数は $i=2$ の固有モードの振動数に一致させている．ここで，0~0.2 秒間の約 153 周期分の応答を見る．刻み幅は電磁力の一周期を約 256 等分した．各図の図(a)~(i)は任意の初期状態から十分時間が経過し定常状態となったときの一周期間の振動状態について，その 1/8 周期毎のモード形状や動吸振器の位置を示している．各図の要素の色は図(j)に示すように青→赤→黄の順にその要素の変位振幅の絶対値が大きくなり，黄色が最も変位振幅が大きいことを示している．なお，図(j)に各色が切り替わるときの変位振幅の値を示しているが，これらは FEM モデルの応答シミュレーションで得られた動的変位を静的荷重が与

えられたときの静的変位で除した無次元の値である。また、振動モード形状を目視で確認できる適度なスケールにし、図 3.18、図 3.19、図 3.20、図 3.21 のスケール倍率は統一している。各図では元の固定子の形状をピンク色の実線で示している。

図 3.18 に動吸振器を設置していない場合の応答シミュレーションを示す。4 節を有する振動モード $s=2$ の外力が時間の経過によって時計回りに回転しているために図 3.18 で示すように振動モードも回転する。振動モードが回転しているため固定子の円周方向全てが振動の腹や節となり 1 周期間で平均すると円周方向で振幅が一様となる。この図 3.18 の振動状態は通常の構造物の振動とは異なり特殊である。

図 3.19 に $\theta_1 = 0^\circ$ の位置に動吸振器を 1 個設置した場合の応答シミュレーションを示す。動吸振器を設置することで、時計回りに回転していたモードが動吸振器を設置している位置が節となるような空間に固定されたモードとなっている。3.1 節で示した \cos モードのみ制振されている状態であり、理論解析と同様の結果が得られた。この結果から、動吸振器を 1 個設置した場合、回転していた振動モードが空間に固定されただけで十分に制振されたとは言い難い。

図 3.20 に $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ の位置に動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーションを示す。動吸振器を 2 個設置することにより、ほぼ振動変位が零となり、完全に制振できていることがわかる。

$\theta = 0^\circ$ に設置された動吸振器が \cos モードを制振し、 $\theta = 45^\circ$ に追加して設置された動吸振器が \sin モードを制振し、完全な制振が行われている。図 3.21 に $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$ の角度に動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーションを示す。制振したい振動モードの腹と節の間隔以外でも、動吸振器を 2 個設置することにより、ほぼ振動変位が零となり、完全に制振できていることがわかる。図 3.20 と図 3.21 を比較すると、動吸振器の位相差が異なることがわかる。また、制振したい振動モードの腹と節の間隔に動吸振器を 2 個設置することで、動吸振器の変位が小さくなることがわかる。これより、電動機固定子のようなモードが回転する機械の制振においてはその振動モードの腹と腹の間隔以外に動吸振器を 2 か所設置する必要があると言える。1 個の動吸振器では片方のモードにしか機能せず、完全に制振することはできない。一方、適切な位置に 2 個設置して初めて両方のモードを抑えることができる。このことを数値シミュレーションにより証明することが出来た。

次に、応答シミュレーションにおいて、動吸振器を 2 個設置した場合制振できることがわかったが、ほんのわずかに振動していることを確認した。その振動を詳細に確認するために、図 3.22 から図 3.25 に主系の振動特性を示し、それらから考察する。図(a)に変位－角度(円周方向位置)－時間の関係を示し、

図(b)に図(a)の3次元プロットを変位-角度の2軸方向から見た図を示し、図(c)に図(a)の3次元プロットを変位-時間の2軸方向から見た図を示している。変位 (A) は半径方向変位を静的変位で除して無次元化したもの、角度 (θ) は主系の円周方向の座標、時間 (t) は任意の初期状態から十分時間が経過し定常状態となった時の一周期間で定義している。プロット点数は 0° から 360° まで 22.5° 間隔の 17 点 (角度)、1 周期を等間隔に 33 点 (時間) の計 561 点とした。

図 3.22 に動吸振器を設置していない場合の振動特性を示す。図(b)から空間に振動の節となる点が見られないので振動モードは回転している。ここで、図(b)、(c)の変位の最大値が異なるように見えるが、これは角度 (θ) のプロット点数が 17 点と少なかったため、このように見える。本来、最大値は等しい。

図 3.23 に動吸振器を 1 個設置した場合 ($\theta_1 = 0^\circ$) の振動特性を示す。図(b)から空間に振動の節となる点の確認され、空間に振動モードは固定されていることがわかる。図 3.24 に動吸振器を 2 個設置した場合の振動特性 ($\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$) を示す。全体図から限りなく制振できていることがわかる。拡大図から、動吸振器を設置した位置において変位はほぼ零となっているが、動吸振器を設置していない位置では変位振幅が多少大きいところもある。図(b)から空間に振動の節となる点の確認され空間に振動モードは固定されていることがわかる。ただし、振動の節は等間隔に位置していない。図 3.25 に動吸振器を 2 個設置した場合の振動特性 ($\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 30^\circ$) を示す。この場合も図 3.24 と同様の結果が得られた。動吸振器を 2 個設置した場合、空間に固定された振動モードとなり、主系の位置によっては変位振幅が多少大きいことは、固定子が複数の固有モードを持っていることが原因だと考えられる。また、動吸振器を設置していない場合の最大変位と動吸振器を 2 個設置した場合の最大変位を比較すると約 1/17 程度であるのでほぼ無視できるものと考えられる。

図 3.26 は理論解析と有限要素解析により得られた共振曲線である。縦軸は変位の無次元値の時間的空間的最大値を振幅として描いた。横軸は、電磁力の回転数を固有モード $s = 2$ の固有角振動数で無次元化した値である。黒色の実線は動吸振器がない場合を、赤色の実線は減衰のない 2 個の動吸振器を設置した場合の理論解析による結果を表しており、青色の点と黄緑の点は有限要素解析による結果であり、それぞれ動吸振器がない場合と、減衰のない 2 個の動吸振器を設置した場合を表している。青色の点は横軸の 0.92~1.08 の間を 0.02 刻みで計算を行い、黄緑色の点は 0.84~1.14 の間を 0.02 刻みで計算を行った。さらに、共振点での計算も行っている。有限要素解析では、 0° と 45° における半径方向変位の最大値を用いて、理論解析では、1 周期における半径方向変位の最大値を用いているが、理論解析におい

て、 0° と 45° の半径方向変位の共振曲線は一致するので、有限要素解析と比較するにあたって問題ないと言える。

動吸振器を設置していない場合の理論解析と有限要素解析の結果を比較するとほぼ一致していることがわかる。これは、他のモードの影響をほとんど受けていないためである。動吸振器を2個設置した場合、共振点では、数値計算と有限要素解析の結果はよく一致し、振幅はほぼ零となっている。一方、新たにできた共振点付近では理論解析と有限要素解析の結果が少しずれていることがわかる。これら新たにできた2つのピークは、低い振動数のピークの方が高い振動数のピークより高いという特徴はよく一致している。両手法の結果の定量的な差は、有限要素解析ではすべての振動モードを考慮しているが、理論解析では振動モード $i=2$ だけしか考慮していないためであると考えられる。

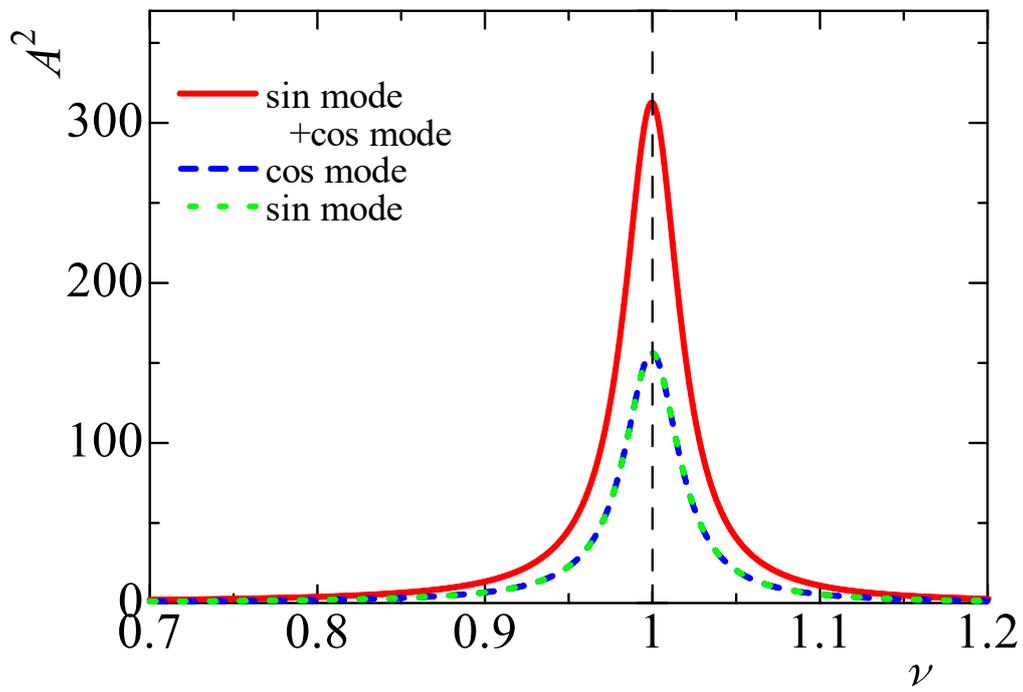


図 3.1 動吸振器を設置していない場合の共振曲線

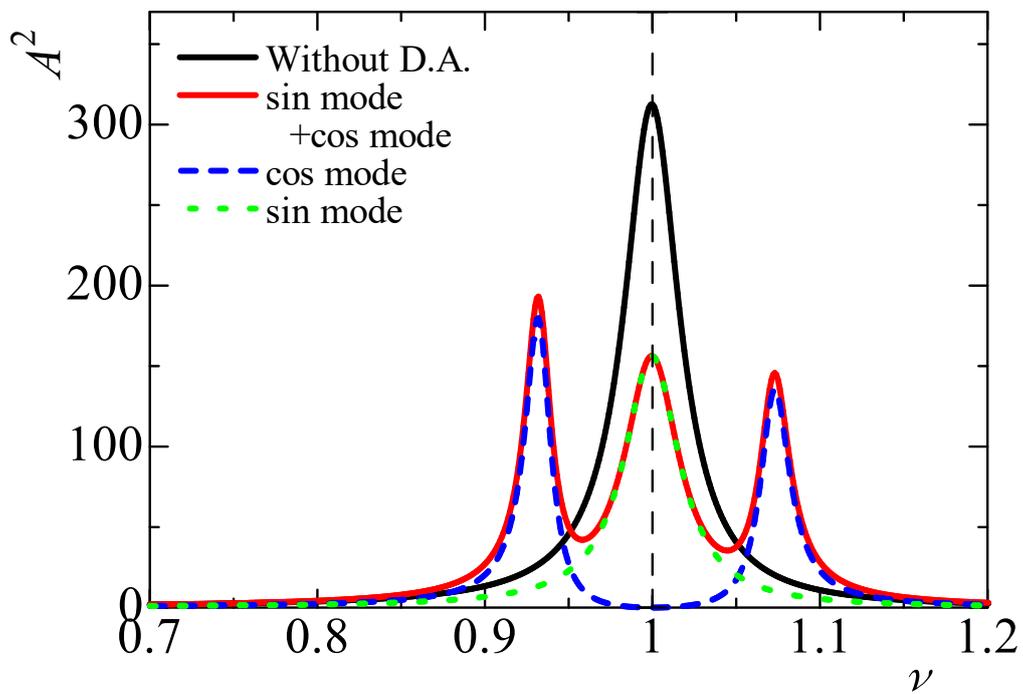
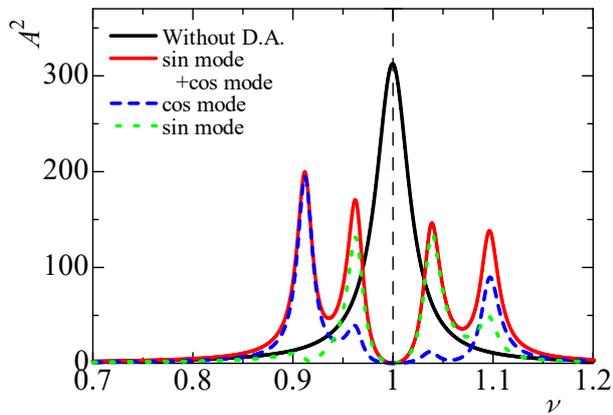
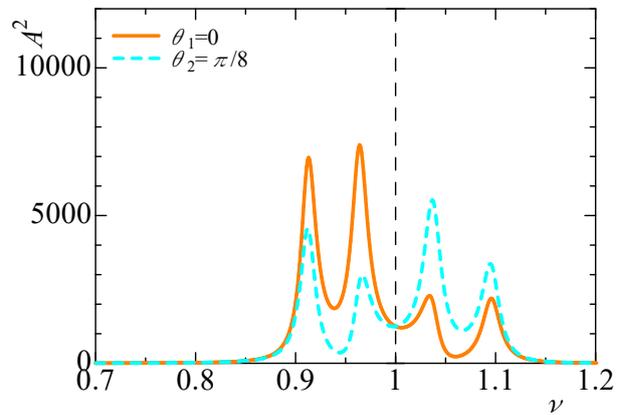


図 3.2 動吸振器を 1 個設置した場合の共振曲線 ($\theta = 0^\circ$)

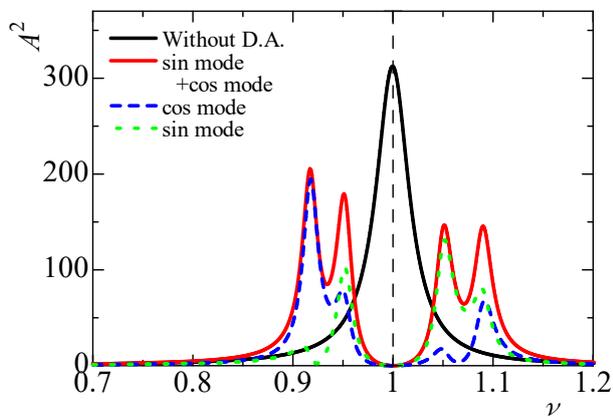


(a) 主系の共振曲線

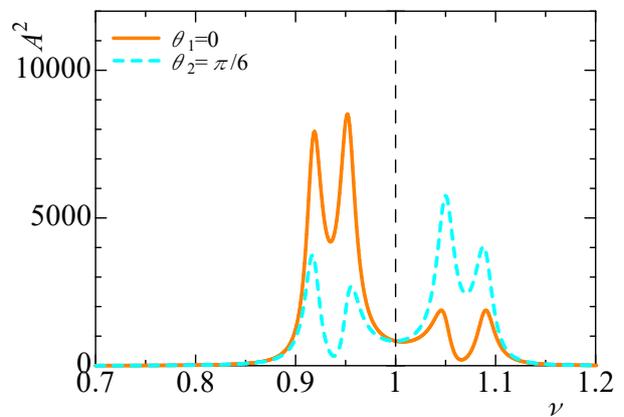


(b) 動吸振器の共振曲線

図 3.3 動吸振器を 2 個設置した場合 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=22.5^\circ$)

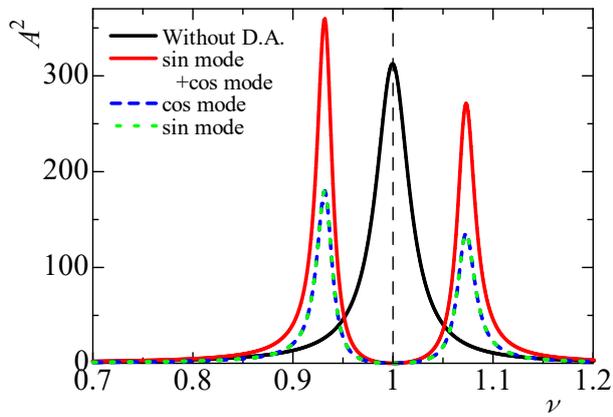


(a) 主系の共振曲線

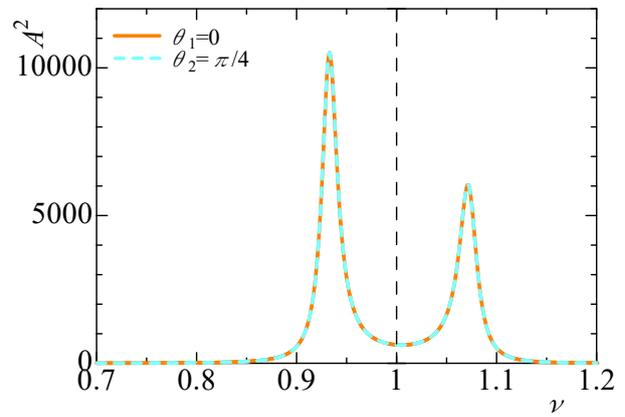


(b) 動吸振器の共振曲線

図 3.4 動吸振器を 2 個設置した場合 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=30^\circ$)

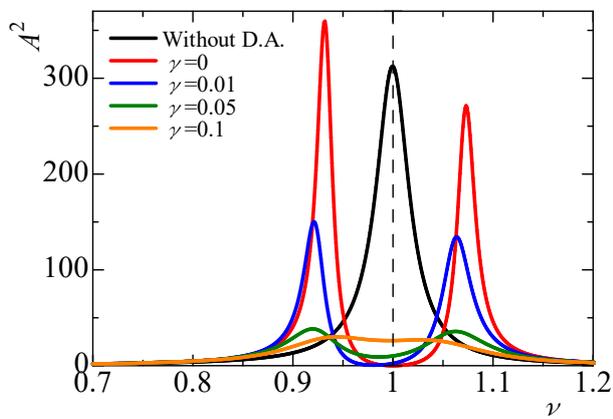


(a) 主系の共振曲線

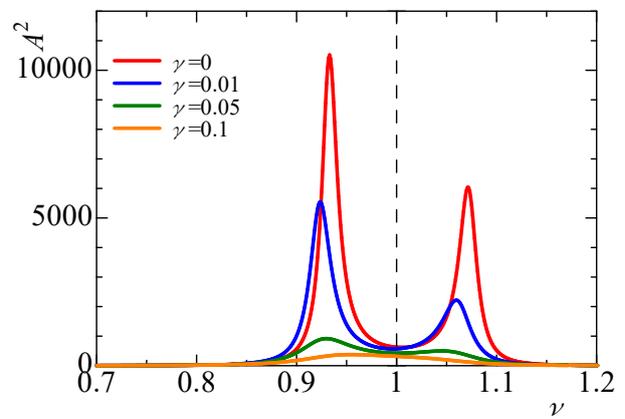


(b) 動吸振器の共振曲線

図 3.5 動吸振器を 2 個設置した場合 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ$)

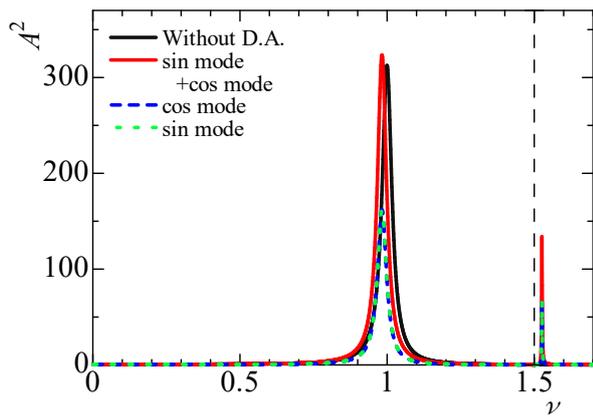


(a) 主系の共振曲線

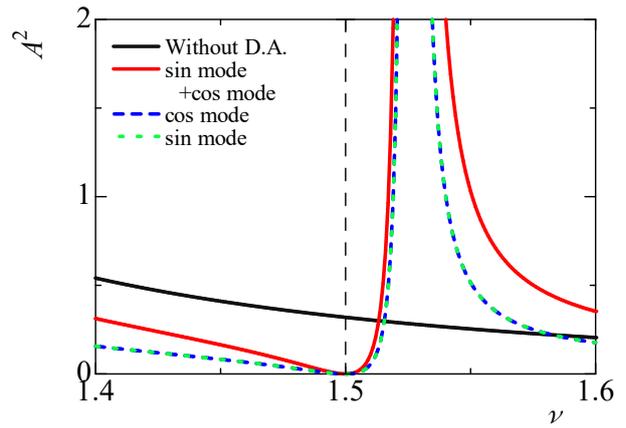


(b) 動吸振器の共振曲線

図 3.6 減衰をもつ動吸振器を 2 個設置した場合 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ$)

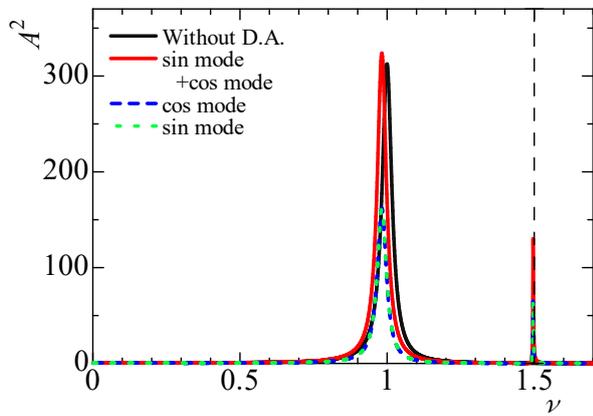


(a) 全体図

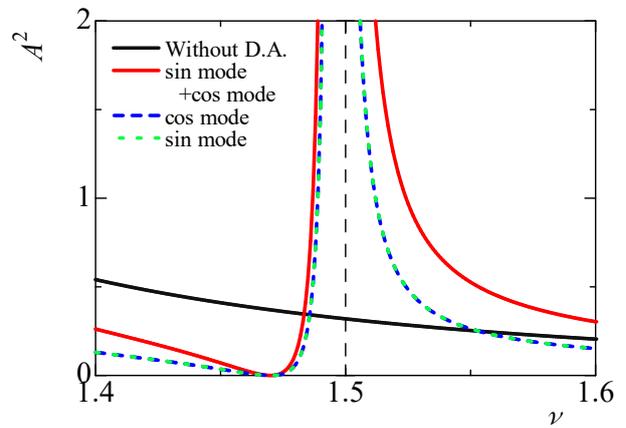


(b) 拡大図

図 3.7 $\omega_d = 1.5\omega_{02}$ の場合の共振曲線 ($\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$)

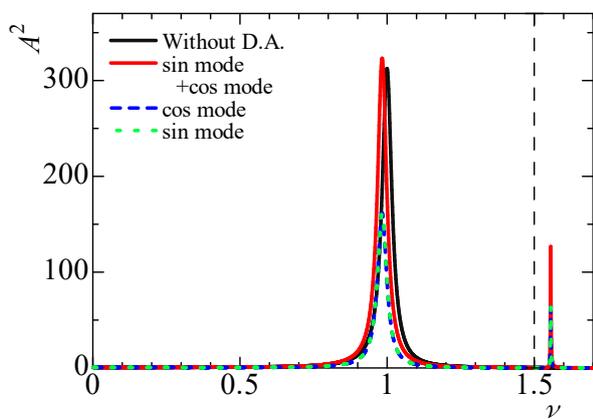


(a) 全体図

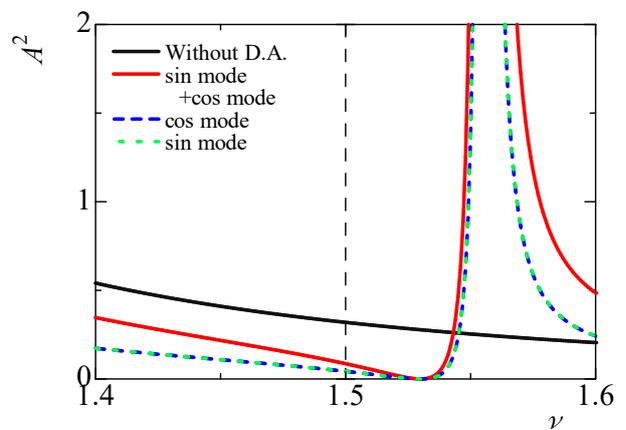


(b) 拡大図

図 3.8 $\omega_d = 1.47\omega_{02}$ の場合の共振曲線 ($\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$)



(a) 全体図



(b) 拡大図

図 3.9 $\omega_d = 1.53\omega_{02}$ の場合の共振曲線 ($\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$)

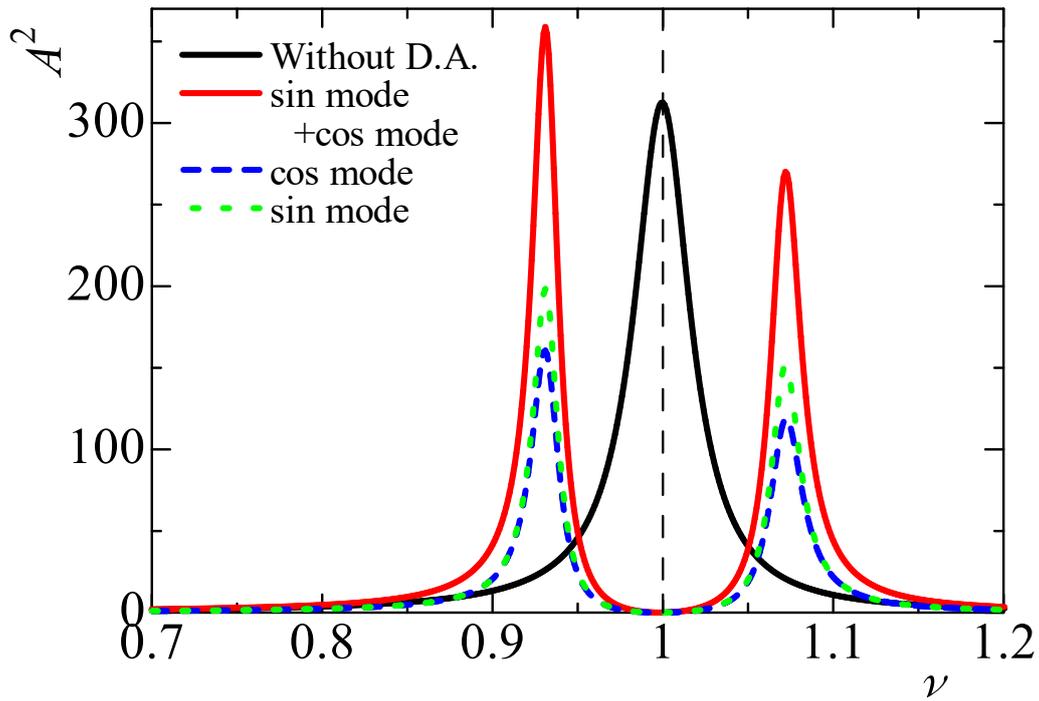
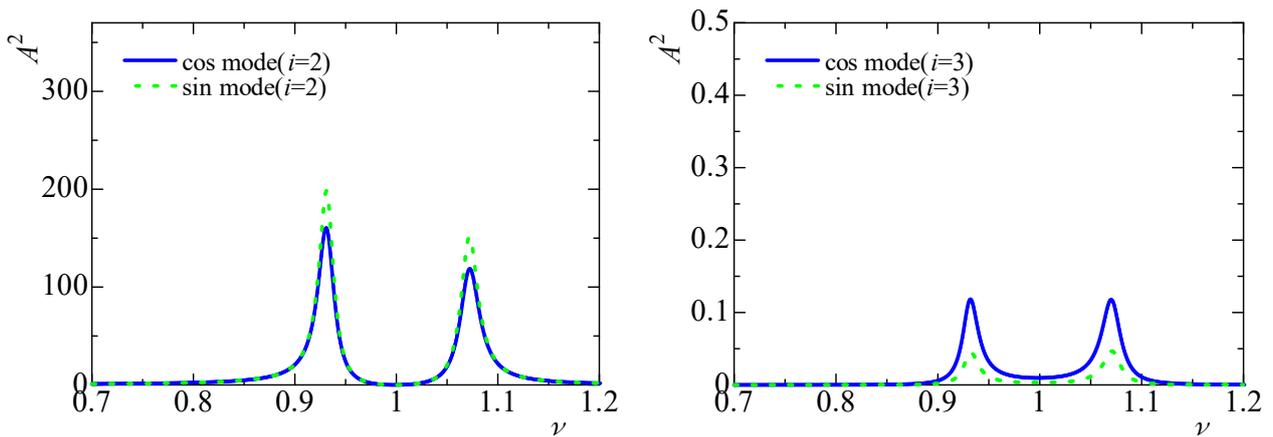


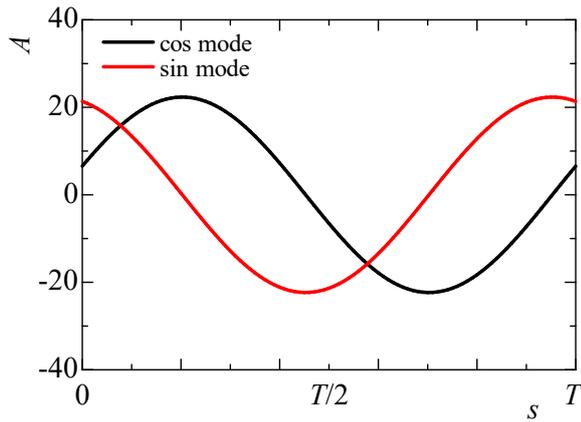
図 3.10 固定子のモード $i=2,3$ を考慮した場合の共振曲線 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ$)



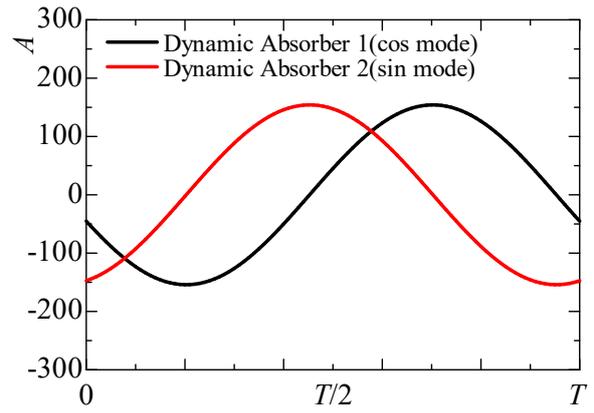
(a) $i=2$ モード成分

(b) $i=3$ モード成分

図 3.11 図 3.10 の結果を成分ごとに分解した共振曲線 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ$)

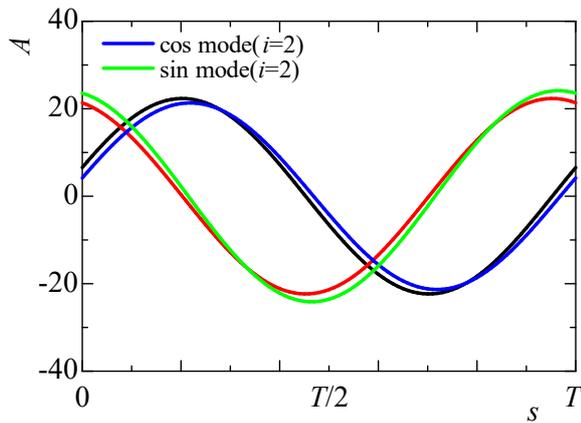


(a) 主系

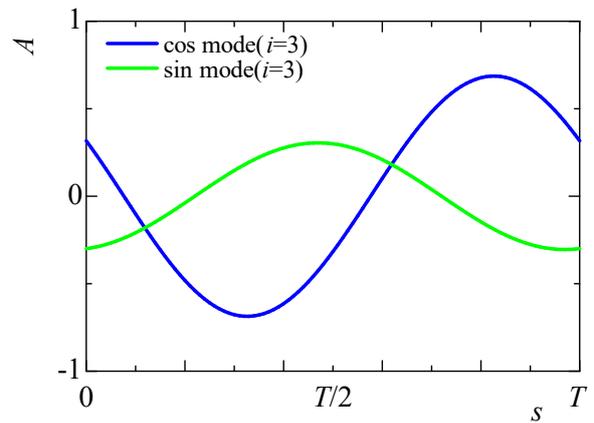


(b) 動吸振器

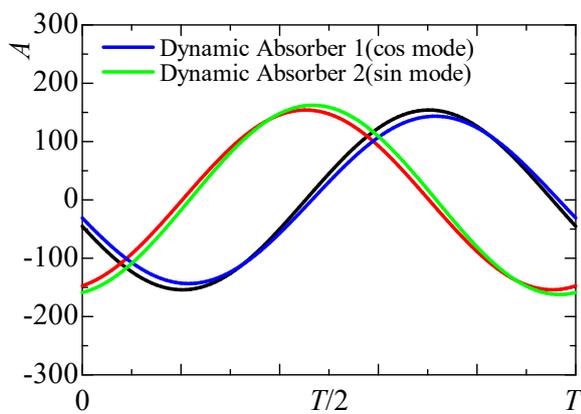
図 3.12 固定子のモード $i=2$ のみを考慮した場合の時間軸波形 ($\theta = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)



(a) 主系 ($i=2$ モード成分)

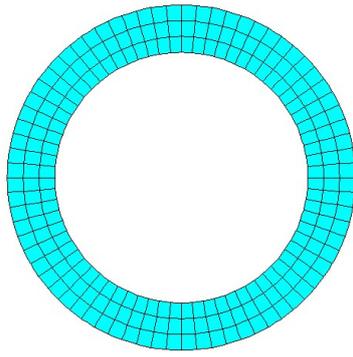


(b) 主系 ($i=3$ モード成分)

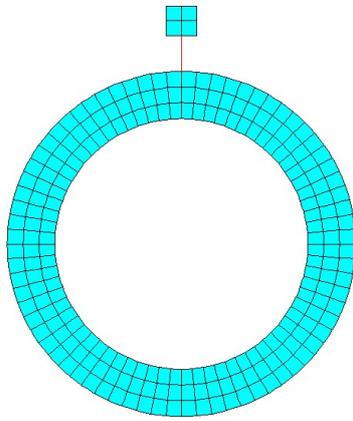


(c) 動吸振器

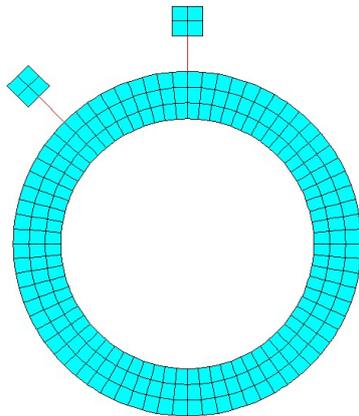
図 3.13 固定子のモード $i=2,3$ を考慮した場合の時間軸波形 ($\theta = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)



(a) 動吸振器を設置していない場合

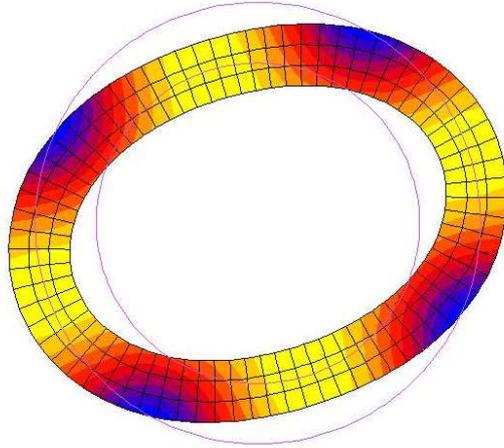


(b) 動吸振器を1個設置した場合

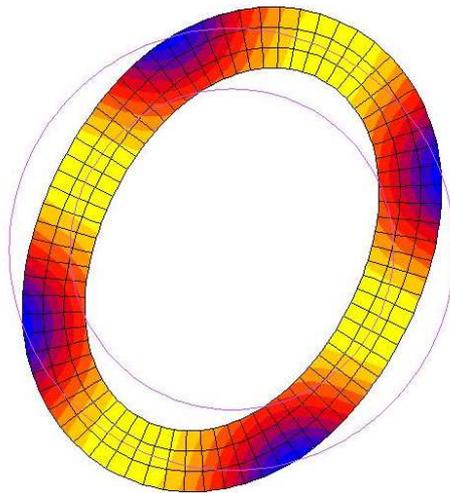


(c) 動吸振器を2個設置した場合

図 3.14 有限要素解析モデル

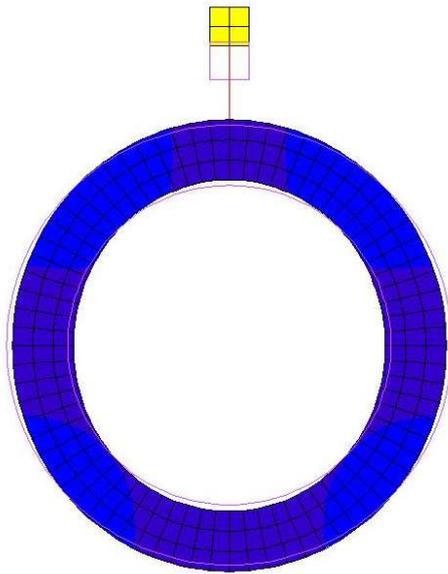


(a) 765.6Hz (cos モード)

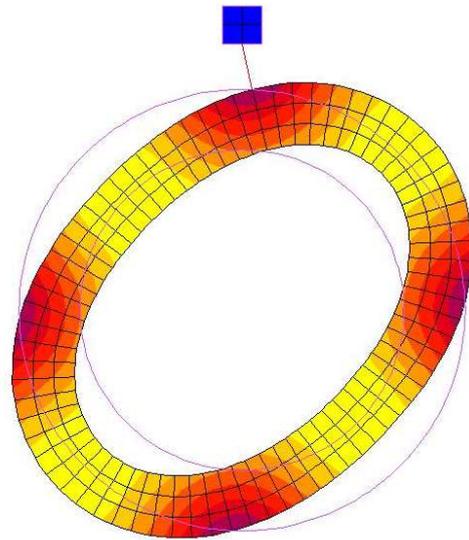


(b) 765.6Hz (sin モード)

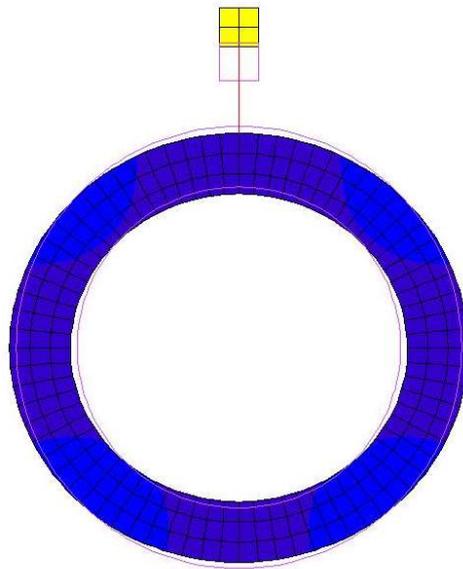
図 3.15 動吸振器を設置していない場合のモード図 ($i=2$)



(a) 702.4Hz (cos モード)

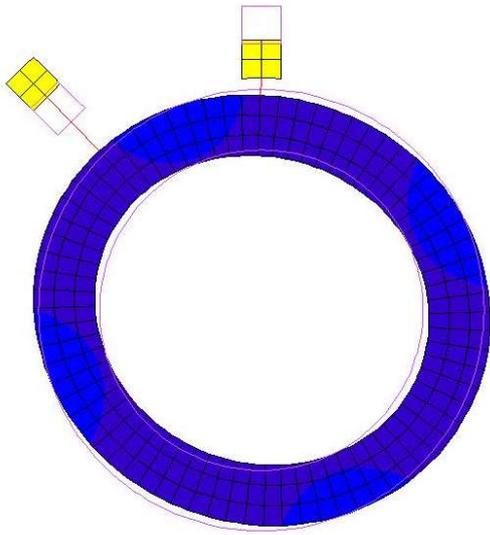


(b) 765.6Hz (sin モード)

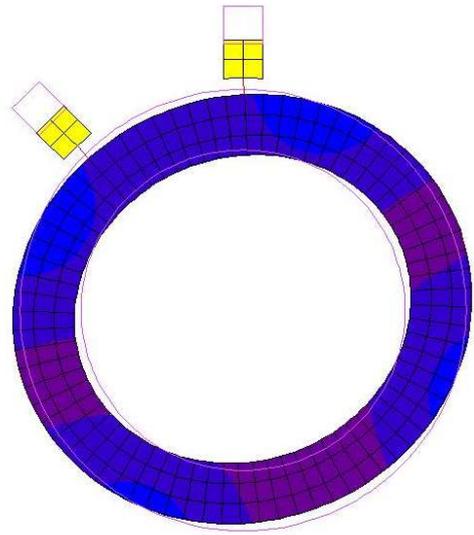


(c) 837.3Hz (cos モード)

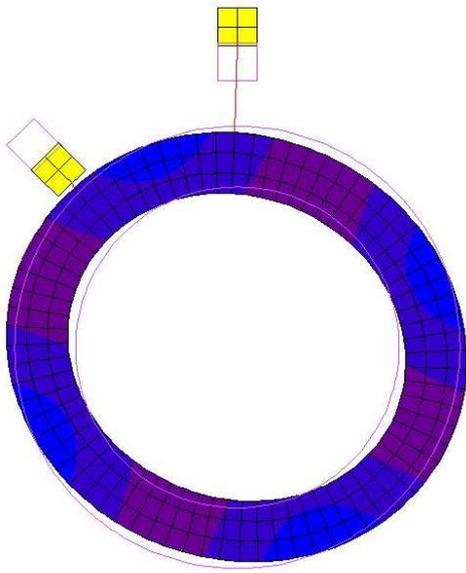
図 3.16 動吸振器を 1 個設置した場合のモード図 ($\theta = 0^\circ$)



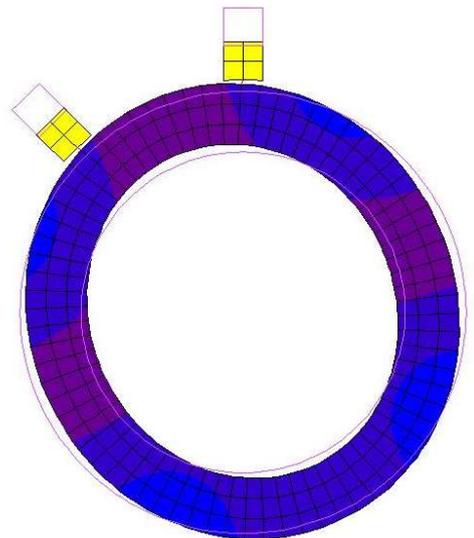
(a) 699.0Hz



(b) 705.5Hz

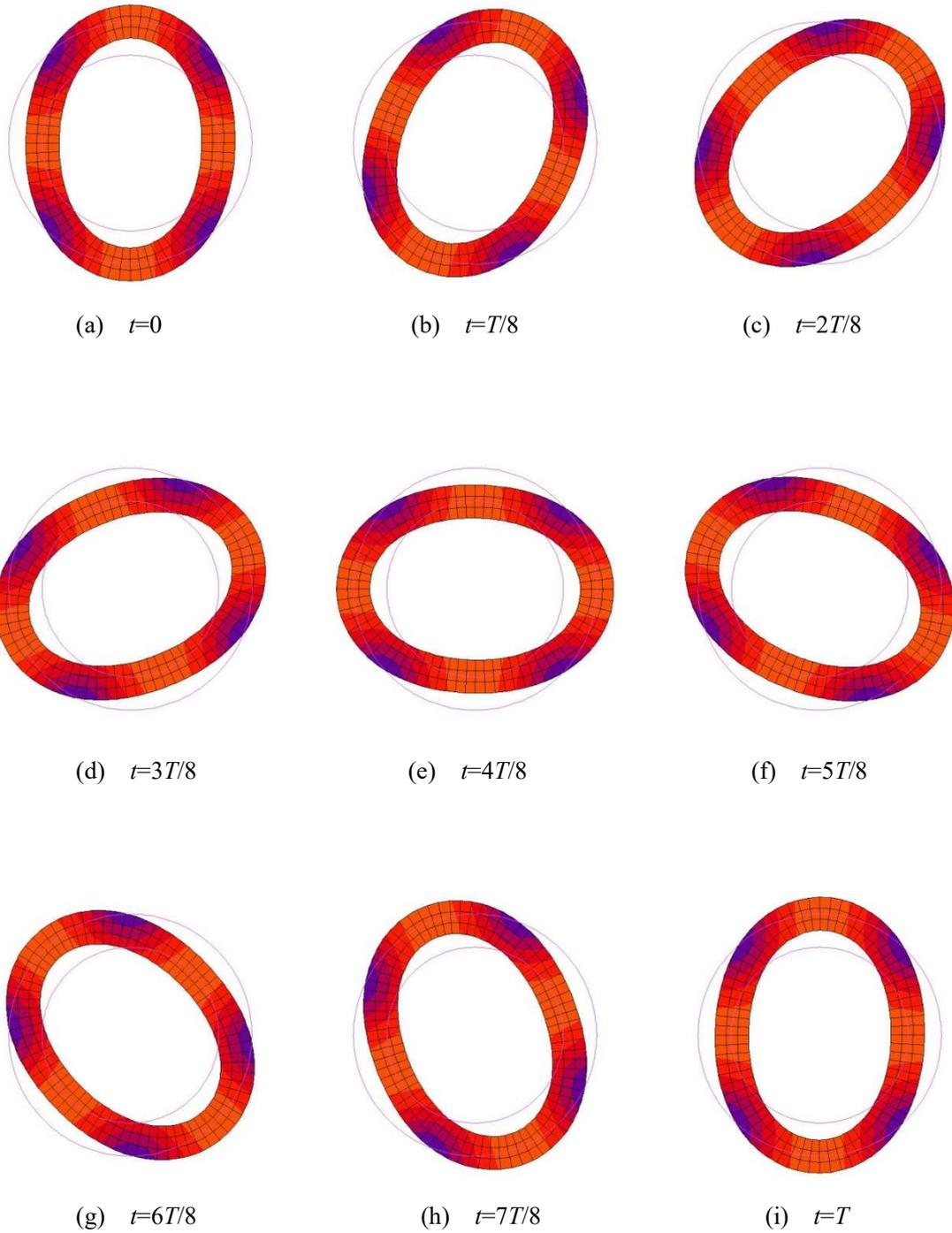


(c) 833.7Hz



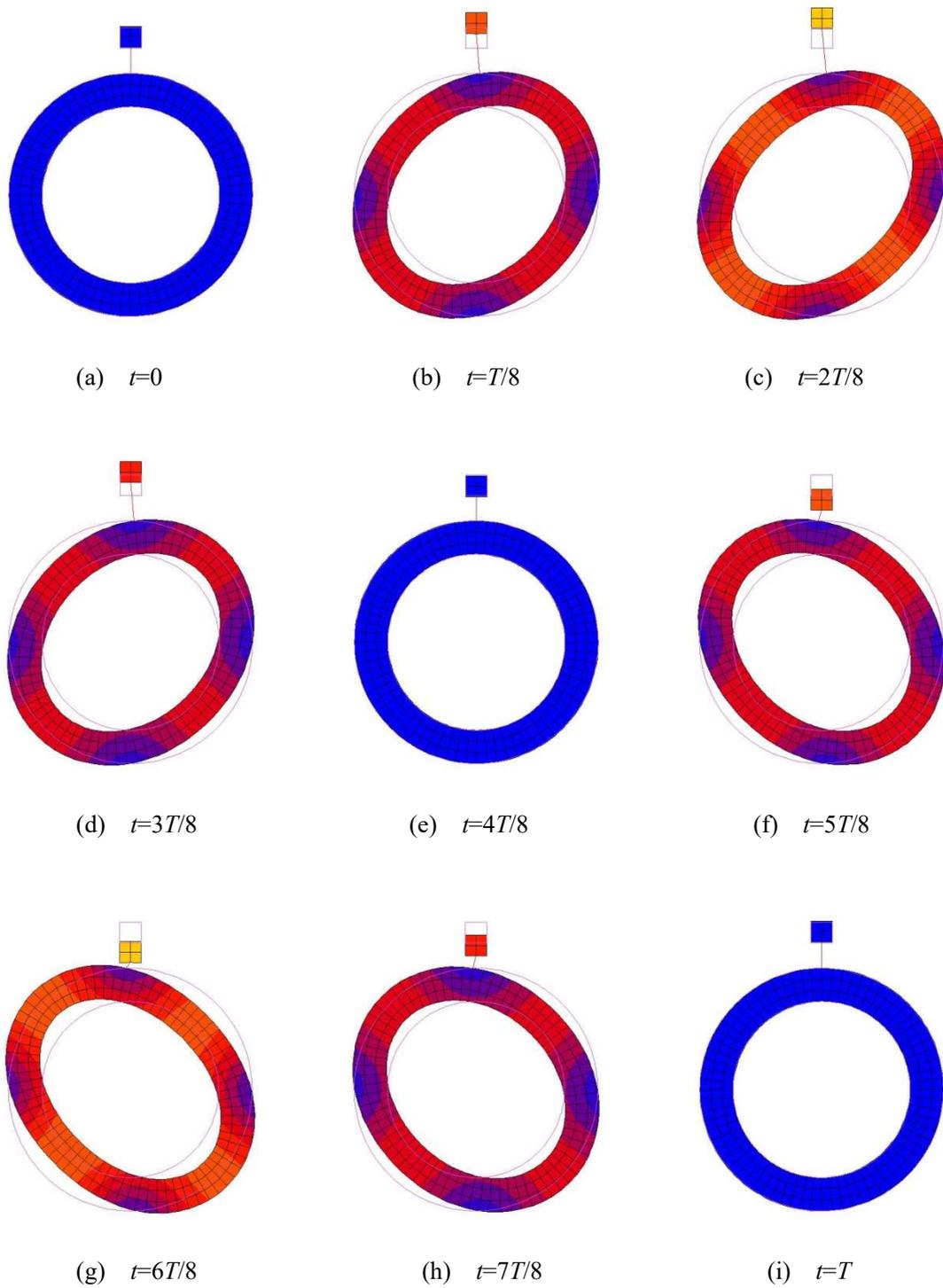
(d) 841.1Hz

図 3.17 動吸振器を 2 個の場合のモード特性 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)



(j) 変位振幅の定義

図 3.18 動吸振器を設置していない場合の応答シミュレーション



(a) $t=0$

(b) $t=T/8$

(c) $t=2T/8$

(d) $t=3T/8$

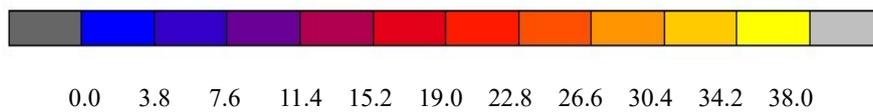
(e) $t=4T/8$

(f) $t=5T/8$

(g) $t=6T/8$

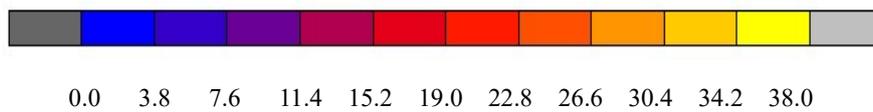
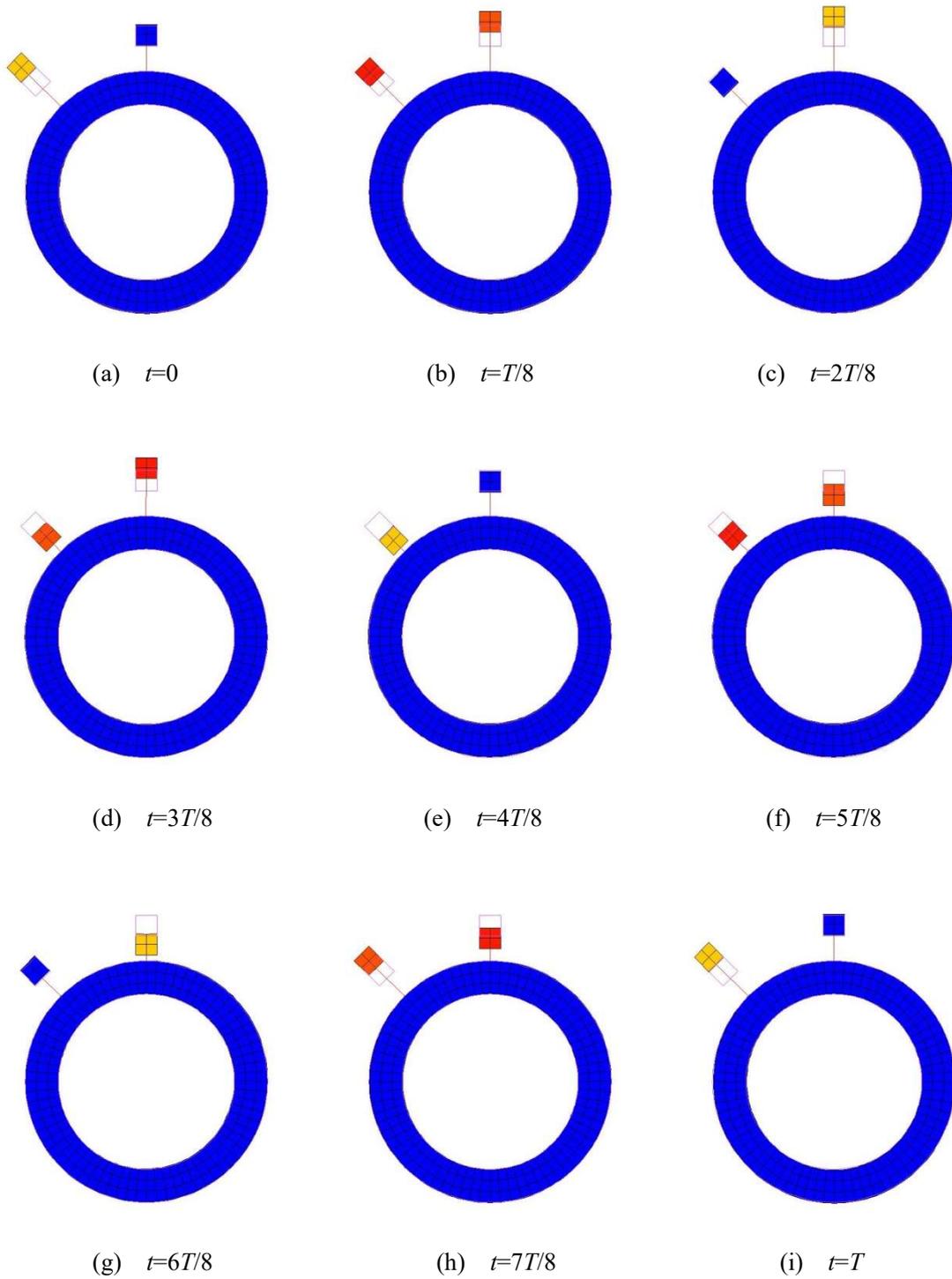
(h) $t=7T/8$

(i) $t=T$



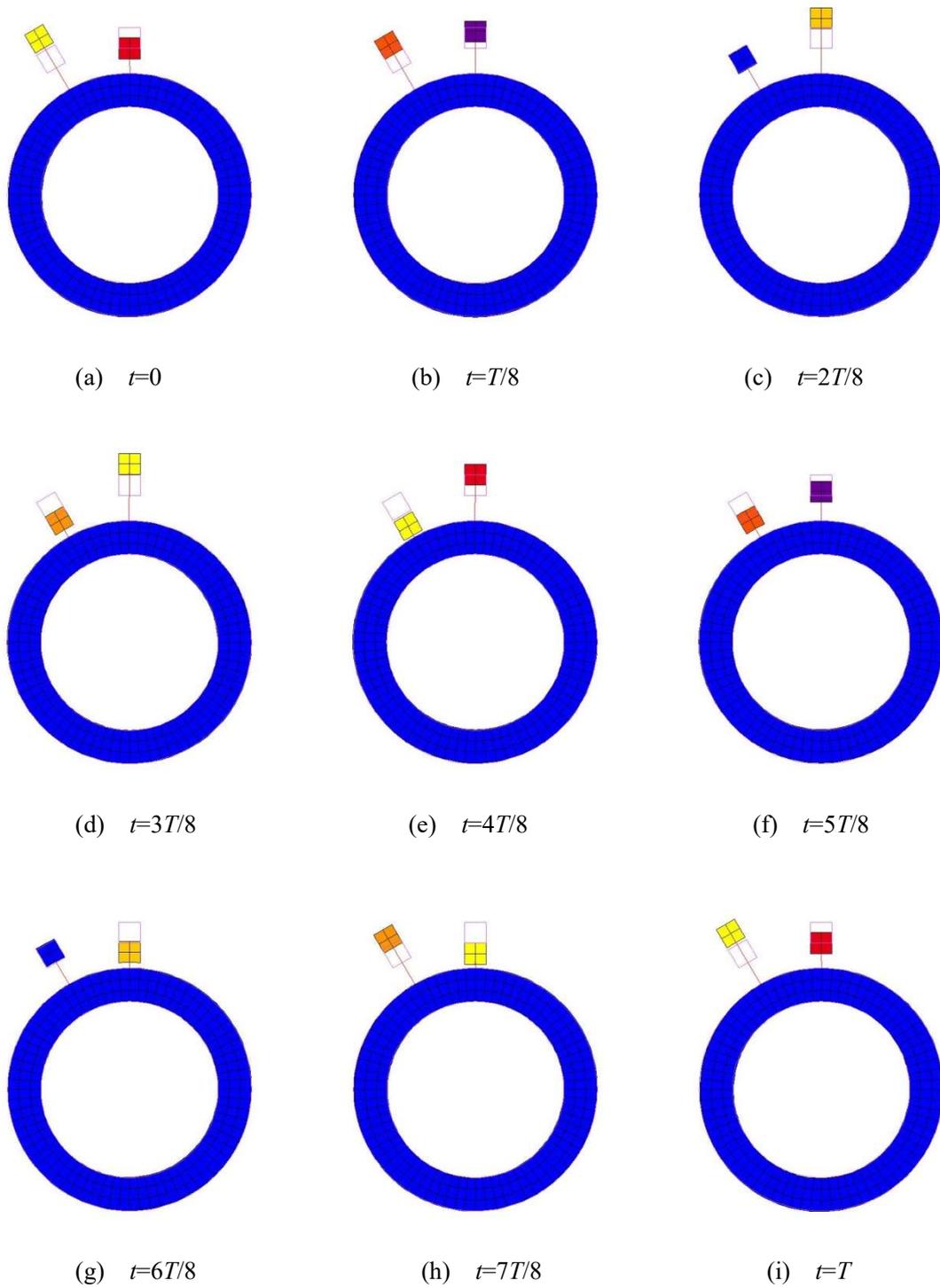
(j) 変位振幅の定義

図 3.19 動吸振器を 1 個設置した場合の応答シミュレーション ($\theta_1 = 0^\circ$)



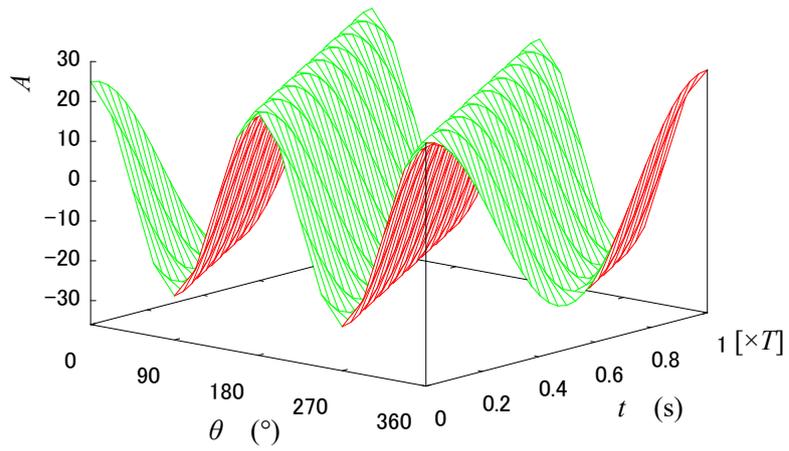
(j) 変位振幅の定義

図 3.20 動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーション ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)

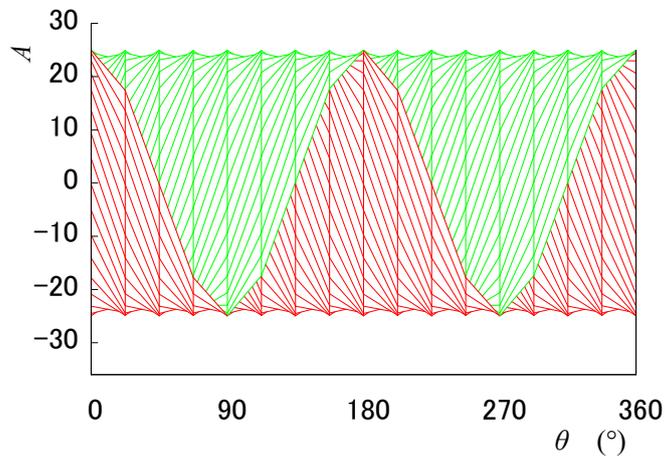


(j) 変位振幅の定義

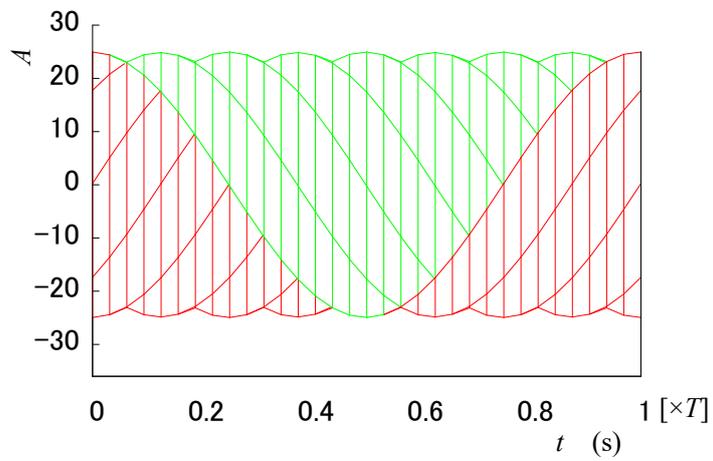
図 3.21 動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーション ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$)



(a) $A-\theta-t$ 図 (変位-角度-時間関係)

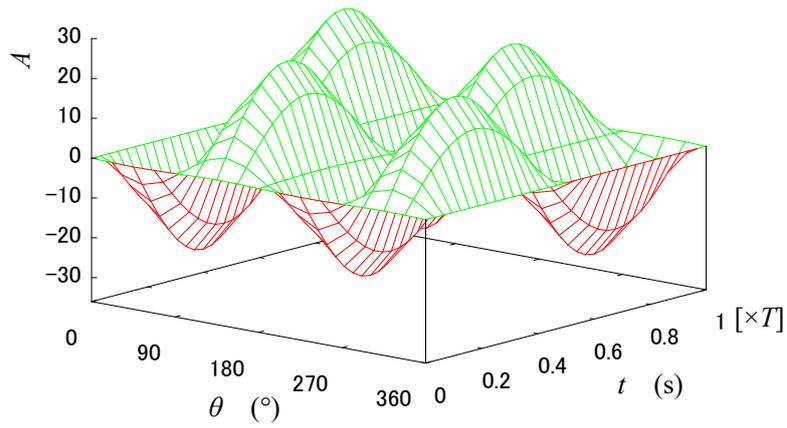


(b) $A-\theta$ 図 (変位-角度関係)

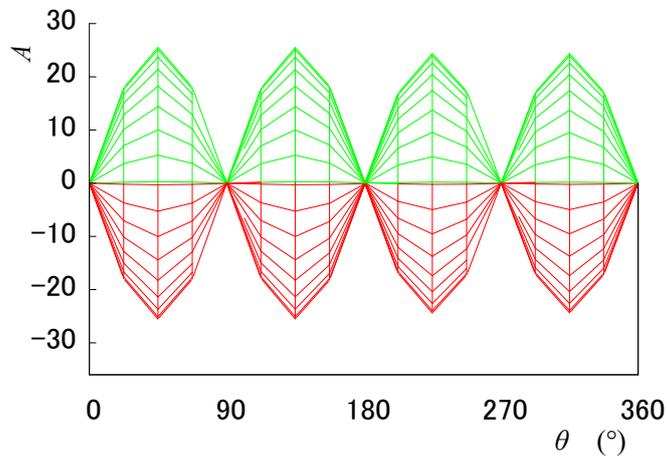


(c) $A-t$ 図 (変位-時間関係)

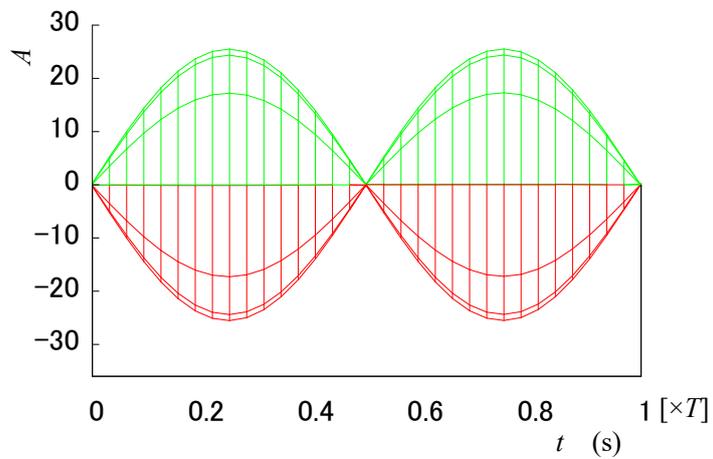
図 3.22 動吸振器を設置していない場合の振動特性



(a) $A-\theta-t$ 図 (変位-角度-時間関係)

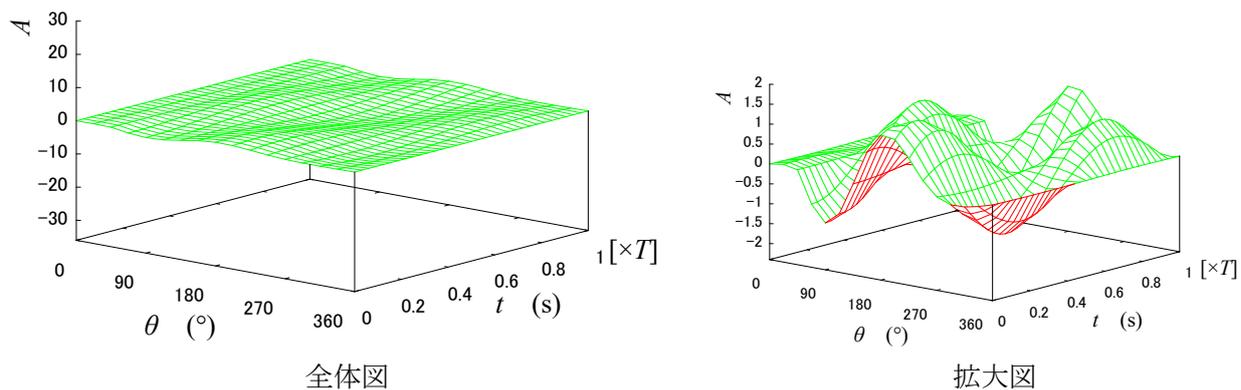


(b) $A-\theta$ 図 (変位-角度関係)

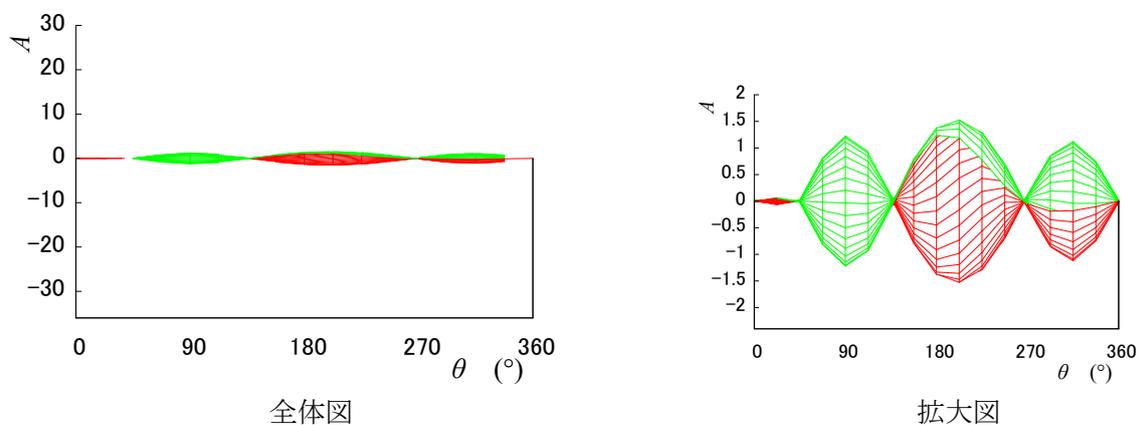


(c) $A-t$ 図 (変位-時間関係)

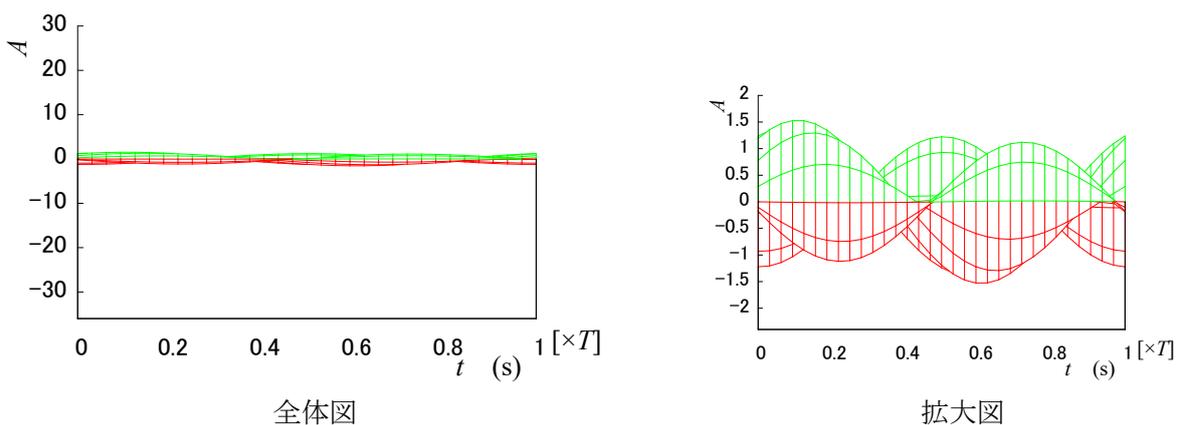
図 3.23 動吸振器を 1 個設置した場合の振動特性 ($\theta_1 = 0^\circ$)



(a) $A-\theta-t$ 図 (変位-角度-時間関係)

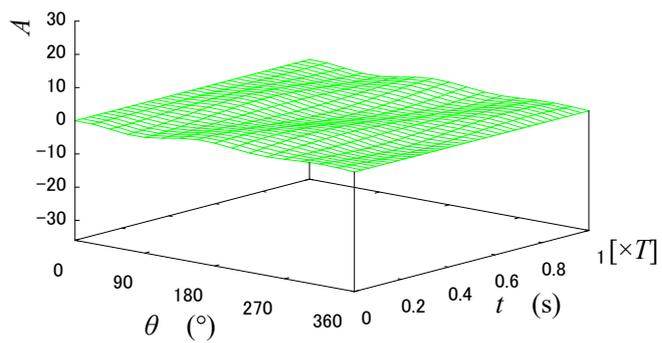


(b) $A-\theta$ 図 (変位-角度関係)

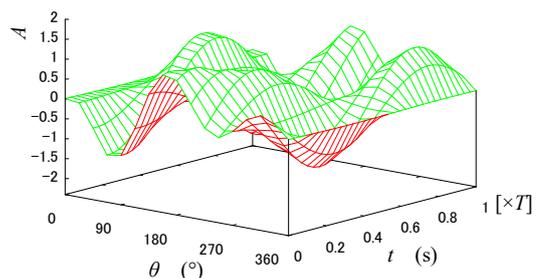


(c) $A-t$ 図 (変位-時間関係)

図 3.24 動吸振器を 2 個設置した場合の振動特性 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)

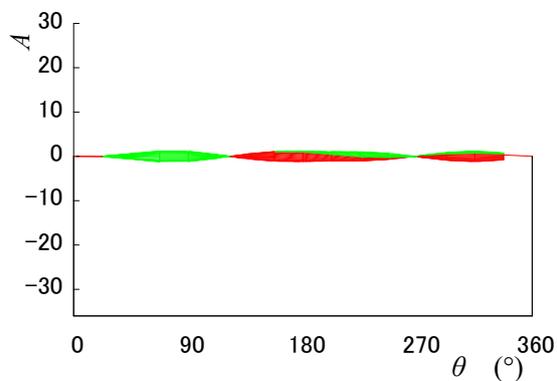


全体図

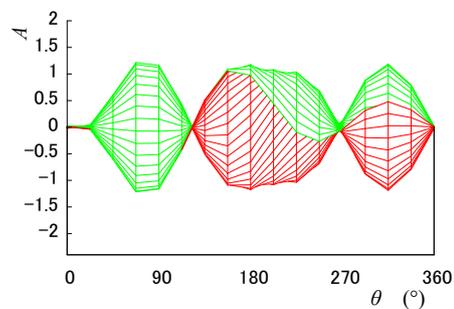


拡大図

(a) $A-\theta-t$ 図 (変位-角度-時間関係)

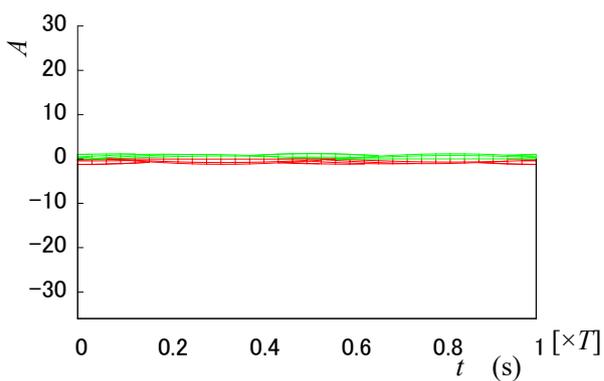


全体図

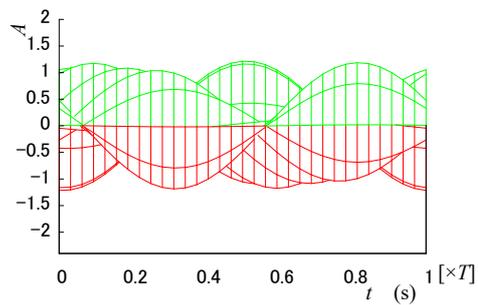


拡大図

(b) $A-\theta$ 図 (変位-角度関係)



全体図



拡大図

(c) $A-t$ 図 (変位-時間関係)

図 3.25 動吸振器を 2 個設置した場合の振動特性 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$)

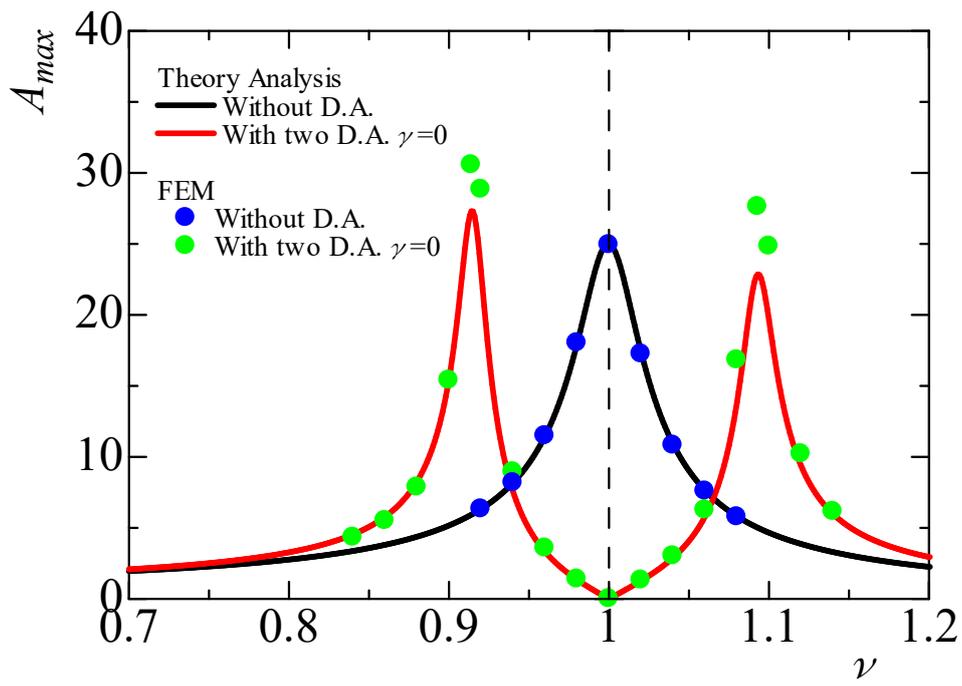


図 3.26 理論解析と有限要素解析の共振曲線 ($\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$)

第4章 動吸振器の最適設計

4.1 一対の動吸振器による制振

第3章では、駆動周波数が増えない電動機を対象として解析をおこなったが、電化製品や輸送機器など幅広い分野で駆動周波数が増えるインバータモータが使用されており、広範囲の振動数において制振する必要がある。このとき共振点のみの制振では対処できるとは言い難い。そこで、本章ではインバータモータのような駆動周波数が増える電動機の制振を考える。動吸振器を制振したい振動モードの腹と腹の間隔以外にそれぞれ設置することで、主系の共振点では完全に制振できることを第3章で証明した。よって、共振点付近の広い振動数領域での制振についても、動吸振器に適切な固有角振動数比と減衰比を与えることにより、実現できることが予測される。そこで、本章では、固有角振動数比、減衰比が同じ一対の動吸振器の固定子円周方向の設置間隔を増減させながら、最適な固有角振動数比、減衰比を調べ、最適化したときの動吸振器の設置間隔、減衰比、固有角振動数比の関係、およびその時の共振曲線上の最大振幅を調べる。主系として、固定子の i 次モードのみ採用し、それと同じモード形状の電磁力が1個作用する場合、すなわち電磁力の円周方向波数を s とすると $i=s$ の場合を扱う。

4.1.1 運動方程式

3.1.1 項で示した運動方程式、式(3.1)から式(3.4)を用いる。

4.1.2 理論解析結果

本章で示す共振曲線においては、共振曲線の縦軸は次式で示すように、半径方向の変位 u の2乗を空間と時間で平均したものを $(F_2\pi/k_{02})^2$ で除して無次元化したもので定義している ($k_{02} = 9EI\pi/r^3, T = 2\pi/\Omega_2$)。

$$A^2 = \frac{1}{T \cdot 2\pi} \int_0^T \int_0^{2\pi} u^2 d\theta dt / (F_2\pi/k_{02})^2 \quad (4.1)$$

横軸は $\nu = \Omega_2 / \omega_{02}$ とし電磁力の角振動数を2次モードの固有角振動数で無次元化したものである。以下に示す共振曲線の図においては、横軸の $\nu=1$ が主系の無次元固有角振動数であり、黒色の実線 (Without D.A.) は動吸振器が無い場合を、青色の実線 (Without Damping) は減衰のない動吸振器を2個設置した

場合を、赤色の実線 (Best Tune) は最適な固有角振動数比と減衰比を与えた動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線を示している。変数は動吸振器の固有角振動数比と減衰比、一对の動吸振器の設置間隔の 3 個とする。最適な動吸振器とは、動吸振器の固有角振動数比と減衰比の多くの組み合わせについて計算し、その中で、無次元角振動数を 0.85 から 1.1 の範囲で 0.002 変えて計算した中で最大振幅が最も小さいときとする。ここで、固有角振動数比と減衰比の最適値の計算方法は、最適値が予想される付近の 0.1 の範囲について 0.001 の精度で計算し、さらに得られた解付近の 0.01 の範囲について 0.0001 の精度で計算する方法で、小数点以下 4 桁の値として求めた。2 個の動吸振器の質量はいずれも主系である固定子の 2% としている。主系の減衰比は 0.02 である。図 4.1 から図 4.4 に一对の動吸振器を設置したときの主系の共振曲線を示す。動吸振器に最適な固有角振動数比と減衰比を与えた場合、共振点付近の幅広い振動数領域で制振が可能であることがわかる。図 4.1 から図 4.4 を比較すると、最大振幅は動吸振器の間隔が制振対象モードの腹と節の間隔のときが最も小さくなっていることがわかる。

一对の動吸振器の設置間隔を 0° から 45° まで 2.5° 間隔で変えた時の最適な固有角振動数比と減衰比、そのときの最大振幅、共振領域面積を表 4.1 に示す。ここに、共振領域面積として、最適設計時の共振曲線の横軸の無次元角振動数の 0.85 から 1.1 までの横軸と縦軸の振幅がなす面積で定義している。

図 4.5 に主系の最大振幅と最適化した動吸振器の設置間隔の関係を示す。縦軸の最大振幅は共振曲線の図と同様に無次元化しており、横軸は動吸振器の設置間隔である。振動モードの腹と節の間隔に近づくにつれ大きく制振され、設置間隔がおおよそ 30° 以上では最大振幅はほとんど変わらないことがわかる。これは設計上、1 対の動吸振器を制振対象モードの腹と節の間隔で設置できない場合においても、おおよそ 30° から 45° までの間隔で設置できれば、ほぼ等しい制振効果を得られることを意味する。

図 4.6 は、主系の共振領域面積と動吸振器の設置間隔の関係を示す。共振領域面積に関しても、設置間隔がおおよそ 30° 以上ではほぼ変わらない制振効果があることがわかる。

図 4.7 に固有角振動数比と動吸振器の設置間隔の関係を示す。設置間隔が狭いときは最適な固有角振動数比は 1 に近く、設置間隔が振動モードの腹と節の間隔に近づくにつれて最適な固有角振動数比の値は少し小さくなっていることがわかる。ところで、一般に主系に減衰がある場合の動吸振器を用いた制振における固有角振動数比の実用近似式⁹⁾は次式で表される。

$$\kappa = \frac{1}{1+\mu} - (0.241 + 1.74\mu - 2.6\mu^2)\gamma_{02} - (1 - 1.9\mu + \mu^2)\gamma_{02}^2 \quad (4.2)$$

ここに

$$\mu = \frac{m_{02}}{m_1} = \frac{m_{02}}{m_2}$$

このとき、主系の減衰比と動吸振器の質量比を式(4.2)に代入すると $\kappa = 0.9745$ が得られる。表 4.1 と図 4.7 からわかるように動吸振器の設置間隔が、振動モードの腹と節の間隔である 45° に近づくとつれ、これに近い値に近づくと傾向にあることがわかった。

図 4.8 に減衰比と動吸振器の設置間隔の関係を示す。動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節の間隔に近づくとつれて、最適な減衰比の値はかなり大きくなることがわかる。主系に減衰がある場合の動吸振器を用いた制振における減衰比の実用近似式⁹⁾は次式で表される。

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} + (0.13 + 0.12\mu + 0.4\mu^2)\gamma_{02} - (0.16 + 0.9\mu + 3\mu^2)\gamma_{02}^2 \quad (4.3)$$

このとき、主系の減衰比と動吸振器の質量比を用いて式(4.3)を計算すると $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.0883$ が得られる。表 4.1 と図 4.8 からわかるように動吸振器の設置間隔が、振動モードの腹と節の間隔である 45° に近づくとつれ、これに近い値に近づくと傾向にあることがわかった。これは、考えている系が 4 自由度の系となっているが、制振したい振動モードの腹と節の間隔に動吸振器をそれぞれ 1 個設置した場合、主系がほぼ 2 自由度系の応答をするためである。よって、動吸振器の設置間隔が制振したい振動モードの腹と節の間隔でない場合、一般的な最適設計値を用いることができないことがわかった。

4.2 多重動吸振器による制振

本研究の制振対象である電動機固定子は質量が大きく、発生する電磁振動の振動数は 1kHz 以上と極めて高い。質量とバネの単純な 1 自由度系の動吸振器を考えたとき、固有振動数を高くするには質量を小さくするか、バネの剛性を大きくすればよい。ただし、高い制振効果を得るには動吸振器の質量はそれなりに大きくなければならない。そこで、大きな質量をもった動吸振器となると非常に大きな剛性をもったバネにしなければならない。そのように相反する大きい質量と高い剛性の確保の両立は困難である。そこで、図 4.9 に示すような sin モードと cos モードに対してそれぞれ動吸振器を 2 個ずつ計 4 個設置する多重動吸振器を提案する。動吸振器 1 個当たりの質量を半分にすることによって、その固有振動

数を高くすることができ、動吸振器の設計が容易になる。

本節では、多重動吸振器の設置間隔と最適パラメータ値の関係を示すとともに、多重動吸振器の有効性を確認する。

4.2.1 運動方程式

主系と動吸振器の両方に粘性減衰力を考慮すると、主系と動吸振器の運動方程式はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{a}_i + c_{0i} \dot{a}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} a_i \\ & + \sum_{j=1}^4 c_j \cos i \theta_j \left\{ \dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j \right\} - \dot{x}_j + \sum_{j=1}^4 k_j \cos i \theta_j \left\{ (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j \right\} \\ & = \pi F_s \cos \Omega_s t \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi r \rho A \ddot{b}_i + c_{0i} \dot{b}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} b_i \\ & + \sum_{j=1}^4 c_j \sin i \theta_j \left\{ \dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j \right\} - \dot{x}_j + \sum_{j=1}^4 k_j \sin i \theta_j \left\{ (a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j \right\} \\ & = -\pi F_s \sin \Omega_s t \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \left\{ \dot{x}_1 - (\dot{a}_i \cos i \theta_1 + \dot{b}_i \sin i \theta_1) \right\} + k_1 \left\{ x_1 - (a_i \cos i \theta_1 + b_i \sin i \theta_1) \right\} = 0 \quad (4.6)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \left\{ \dot{x}_2 - (\dot{a}_i \cos i \theta_2 + \dot{b}_i \sin i \theta_2) \right\} + k_2 \left\{ x_2 - (a_i \cos i \theta_2 + b_i \sin i \theta_2) \right\} = 0 \quad (4.7)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + c_3 \left\{ \dot{x}_3 - (\dot{a}_i \cos i \theta_3 + \dot{b}_i \sin i \theta_3) \right\} + k_3 \left\{ x_3 - (a_i \cos i \theta_3 + b_i \sin i \theta_3) \right\} = 0 \quad (4.8)$$

$$m_4 \ddot{x}_4 + c_4 \left\{ \dot{x}_4 - (\dot{a}_i \cos i \theta_4 + \dot{b}_i \sin i \theta_4) \right\} + k_4 \left\{ x_4 - (a_i \cos i \theta_4 + b_i \sin i \theta_4) \right\} = 0 \quad (4.9)$$

以下、新たに設置する動吸振器のうち $\theta = \theta_3$ に設置するものを動吸振器 3、 $\theta = \theta_4$ に設置するものを動吸振器 4 と呼ぶこととする。ここに、 c_{0i} ($i=1, \dots, M$) は主系の粘性減衰係数であり、 c_j ($j=1, \dots, 4$) は動吸振器の粘性減衰係数である。また、理論解析においては主系の減衰比を 0.02 とし、 $i=2$ のモードの共振の制振を考える。

式(4.4)から式(4.9)の定常解を次式のようにおく。

$$a_2 = A_1 \cos \Omega_2 t + B_1 \sin \Omega_2 t \quad (4.10)$$

$$b_2 = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \quad (4.11)$$

$$x_1 = A_3 \cos \Omega_2 t + B_3 \sin \Omega_2 t \quad (4.12)$$

$$x_2 = A_4 \cos \Omega_2 t + B_4 \sin \Omega_2 t \quad (4.13)$$

$$x_3 = A_5 \cos \Omega_2 t + B_5 \sin \Omega_2 t \quad (4.14)$$

$$x_4 = A_6 \cos \Omega_2 t + B_6 \sin \Omega_2 t \quad (4.15)$$

式(4.4)から式(4.9)に式(4.10)から式(4.15)を代入し、 $\cos \Omega_2 t$ 、 $\sin \Omega_2 t$ の係数を比較すると、 $A_1 \sim A_6$ 、 $B_1 \sim B_6$ に関する以下の行列式が得られる。

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \\ A_5 \\ B_5 \\ A_6 \\ B_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{G}$$

$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^4 k_j \cos^2 2\theta_j & c_{02} \Omega_2 + \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & \sum_{j=1}^4 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ -c_{02} \Omega_2 - \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^4 k_j \cos^2 2\theta_j & -\sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^4 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ \sum_{j=1}^4 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^4 k_j \sin^2 2\theta_j & c_{02} \Omega_2 + \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^4 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & -c_{02} \Omega_2 - \sum_{j=1}^4 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^4 k_j \sin^2 2\theta_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 \\ -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{13} = \begin{bmatrix} -k_3 \cos 2\theta_3 & -c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 & -k_3 \cos 2\theta_3 & -c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 \\ c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 & -k_3 \cos 2\theta_3 & c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 & -k_3 \cos 2\theta_3 \\ -k_4 \sin 2\theta_4 & -c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 & -k_4 \sin 2\theta_4 & -c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 \\ c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 & -k_4 \sin 2\theta_4 & c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 & -k_4 \sin 2\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 \\ -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \Omega_2^2 & c_1 \Omega_2 & 0 & 0 \\ -c_1 \Omega_2 & k_1 - m_1 \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 & c_2 \Omega_2 \\ 0 & 0 & -c_2 \Omega_2 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{23} = \mathbf{G}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{31} = \begin{bmatrix} -k_3 \cos 2\theta_3 & -c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 & -k_3 \sin 2\theta_3 & -c_3 \Omega_2 \sin 2\theta_3 \\ c_3 \Omega_2 \cos 2\theta_3 & -k_3 \cos 2\theta_3 & c_3 \Omega_2 \sin 2\theta_3 & -k_3 \sin 2\theta_3 \\ -k_4 \cos 2\theta_4 & -c_4 \Omega_2 \cos 2\theta_4 & -k_4 \sin 2\theta_4 & -c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 \\ c_4 \Omega_2 \cos 2\theta_4 & -k_4 \cos 2\theta_4 & c_4 \Omega_2 \sin 2\theta_4 & -k_4 \sin 2\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{33} = \begin{bmatrix} k_3 - m_3 \Omega_2^2 & c_3 \Omega_2 & 0 & 0 \\ -c_3 \Omega_2 & k_3 - m_3 \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 - m_4 \Omega_2^2 & c_4 \Omega_2 \\ 0 & 0 & -c_4 \Omega_2 & k_4 - m_4 \Omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{02} = \frac{5}{4} \pi r \rho A, k_{02} = 9EI \frac{\pi}{r^3}$$

式(4.16)を解いて $A_1 \sim A_6$, $B_1 \sim B_6$ を求めることにより定常解を得る. ここに, 動吸振器と主系の質量比 μ は次式とした.

$$\mu = \frac{m_1}{m_{02}} = \frac{m_2}{m_{02}} = \frac{m_3}{m_{02}} = \frac{m_4}{m_{02}} = 0.01 \quad (4.17)$$

4.2.2 理論解析結果

図 4.10 から図 4.12 に最適化した動吸振器を設置した時の主系の共振曲線を示す. 共振曲線の縦軸と横軸の定義は 4.1.2 項と同様である. 共振曲線上の, 黒色の実線 (Without D.A.) は動吸振器を設置していない場合を, 青色の実線 (With two D.A.) は最適設計した 2 個の動吸振器を設置した場合を, 赤色の実線 (with four D.A.) は最適設計した 4 個の動吸振器を設置した場合の共振曲線を示している. 変数は

動吸振器 1 と 2 の固有角振動数比と減衰比，一対の動吸振器の設置間隔の 5 個とする．動吸振器の最適値は，4.1 節と同様に動吸振器 1 と 2 の固有角振動数比と減衰比の多くの組み合わせについて計算し，その中で，無次元角振動数を 0.85 から 1.1 の範囲で 0.002 変えて計算した中で最大振幅が最も小さいときとする．ここで，固有角振動数比と減衰比のパラメータの最適値が予想される付近の 0.1 の範囲について 0.001 の精度で計算し，さらに得られた解付近の 0.01 の範囲について 0.0001 の精度で計算した．動吸振器の設置間隔が 0° から 45° まで 2.5° 間隔で得られた最適な固有角振動数比と減衰比，そのときの最大振幅，共振領域面積を表 4.2 に示す．ここに，動吸振器 1 と 2，および 3 と 4 はそれぞれ 180° の間隔で設置している．図 4.10 から図 4.12 より，多重動吸振器の方が一対の動吸振器よりも幅広い振動数領域にわたり，より小さな振幅で制振していることがわかる．また，多重動吸振器の場合においても，対となる 2 個の動吸振器の間隔が制振対象モードの腹と節の間隔に近づくにつれて制振効果が高いことがわかった．

図 4.13 から図 4.16 に最適化した動吸振器の設置間隔と最大振幅，共振領域面積，固有角振動数比，減衰比の関係を示す．図(a)は全体図，図(b)は拡大図を示している．図 4.13 は最大振幅と動吸振器の設置間隔の関係を示している．図中の黒色の点は最適な動吸振器を 2 個設置した場合，赤色の点は最適な動吸振器を 4 個設置した場合を示している．表 4.1 と表 4.2，図 4.13 からどの設置間隔においても最適化した一対の動吸振器よりも多重動吸振器の方がより制振されていることがわかる．また，表 4.2 と図 4.13 から多重動吸振器の場合においても，一対の動吸振器の場合と同じく動吸振器の 1 と 2 の設置間隔がおおよそ 30° から 45° までの間隔で設置できれば，ほぼ同様の制振効果があることがわかった．

図 4.14 の共振領域面積と動吸振器の設置間隔の関係を示す図中の黒色の点は最適な動吸振器を 2 個設置した場合，赤色の点は最適な動吸振器を 4 個設置した場合を示している．共振領域面積の場合についても，動吸振器 1 と 2 の設置間隔がおおよそ 30° から 45° までの間隔で設置できれば，一対の場合とほぼ同様の制振効果があることがわかった．ここで，腹と腹に近い間隔では最適化された多重動吸振器の方が制振されてない結果となったが，動吸振器の最適設計の条件である最大振幅が最小となる値を最適設計としたためであると考えられる．制振効果を考えて，基本的に動吸振器はなるべく振動モードの腹と節の間隔に近い位置に設置することを想定しているので，これは無視してよいと考える．

図 4.15 の固有角振動数比と動吸振器の設置間隔の関係を示す図中の黒色の点は動吸振器を 2 個設置した場合，赤色の点は多重動吸振器の動吸振器 1,2，青色の点は多重動吸振器の動吸振器 3,4 の最適値を示

す。多重動吸振器の場合では動吸振器 1,2 の固有角振動数比は動吸振器 2 個の場合より少し小さな値となり、逆に動吸振器 3,4 の固有角振動数比は少し大きな値となっていることがわかる。180° 離して設置した動吸振器 1,2, 3,4, それぞれの中間値が動吸振器 2 個のときの固有角振動数比となっている。

図 4.16 の減衰比と動吸振器の設置間隔の関係を示す図中の黒色の点は動吸振器を 2 個設置した場合、赤色の点は多重動吸振器の動吸振器 1,2, 青色の点は多重動吸振器の動吸振器 3,4 の最適値を示す。多重動吸振器の場合においても設置間隔が制振対象モードの腹と節の間隔に近づくにつれて、最適な減衰比の値は大きくなっていることがわかる。30° 以上の場合では、一对の動吸振器の最適減衰比の方が多重動吸振器の最適減衰比よりも少し大きな値となることがわかった。図 4.17 と図 4.18 に最適設計時の各動吸振器の 1 周期の波形を示しているが、これからわかるように、多重動吸振器では多重化した 2 つの動吸振器が全く同じものでもそれらの位相がずれているため、単純に多重化する前と同じ減衰比にならないと思われる。

動吸振器を多重化することで、より高い制振効果が得られることがわかった。さらに、多重動吸振器は製作が容易になるので、多重動吸振器はインバータモータのような駆動周波数が広範囲で変化する電動機を制振するのに最適と考えられる。また、この節では解析時間の関係から二対の動吸振器を用いて解析したが、神谷ら⁽⁵⁴⁾は 1 自由度系の制振問題に 4 つの最適化した動吸振器を用いることで十分な制振効果が得られ、それ以上動吸振器の個数を増やしても制振性能は上がらないとしている。本研究は 2 自由度系の制振問題であるので、四対の動吸振器を用いたとき最も制振効果が高いことが考えられる。

4.3 一对の動吸振器のパラメータが異なる場合

4.1 節では、一对の動吸振器の固有角振動数比と減衰比がそれぞれ等しい場合について解析を行った。これは、本来 4 自由度系の問題であるが、制振したい振動モードの腹と節の間隔に動吸振器をそれぞれ 1 個設置した場合、主系の共振曲線は 2 自由度系のような応答を示したためである。しかし、振動モードの腹と節の間隔以外に動吸振器を設置した場合、一对の動吸振器の固有角振動数比と減衰比の最適値は等しくない可能性がある。また、2 個の動吸振器の質量を互いに異なる値に与えることにより、同じ質量の動吸振器を腹と節の間隔以外の開き角で設置する場合に近い制振効果を確保できる可能性もあ

と思われるが、一般に2個の動吸振器の質量を異なる値とした研究は見当たらない。そこで、最適設計条件として一对の動吸振器の質量比と固有角振動数比、減衰比がそれぞれ異なる場合を考える。

4.3.1 動吸振器の質量比の和が一定の場合

2個の動吸振器の質量比の和が0.04の場合について、2個の動吸振器の円周方向の各設置間隔における共振曲線上の最大振幅を最小にする質量比、固有角振動数比、減衰比の最適な組み合わせを数値計算から求めた。変数は2個の各動吸振器の質量比、固有角振動数比、減衰比の6個とする。ここで、下記のように、Case1とCase2、Case3を定義する。

Case1：2個の動吸振器の質量比、固有角振動数比、減衰比が同じ値とした場合

Case2：2個の動吸振器の質量比のみ同じで、固有角振動数比、減衰比が互いに異なるとした場合

Case3：2個の動吸振器の質量比、固有角振動数比、減衰比が全て互いに異なるとした場合

動吸振器の質量比、固有角振動数比、減衰比の最適値の探索については、特別なツールなど用いず、それらの全ての組み合わせについて共振曲線を計算し、その最大振幅を求めて比較することを繰り返し行い、全ての最適値を有効数字3桁以上で求めた。

図4.19に動吸振器の各設置間隔において、前述の定義による最適設計を行った時の共振曲線上の最大の振幅を示している。図(a)は動吸振器の設置間隔 $0^{\circ} \sim 45^{\circ}$ （2次モードの腹と節の間隔に相当する）の全体図、図(b)は設置間隔 $30^{\circ} \sim 45^{\circ}$ の拡大図である。図の黒色、赤色、青色の各丸印はそれぞれCase1、Case2、Case3の各場合の共振曲線上の最大振幅を示している。図4.19から、動吸振器の全ての設置間隔でCase1よりもCase2の方が最大振幅が小さく、さらにCase2よりもCase3の方が最大振幅が小さいことがわかる。これらの制振効果の差については、動吸振器の設置間隔が小さいときは、Case2とCase3の最大振幅の差はごくわずかで、それらと最大振幅が最も大きいCase1との間に差がみられる。一方、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節の間隔である 45° に近づくと、Case1とCase2の最大振幅がほぼ同じ値に収束し、それらよりもCase3の最大振幅は少し小さくなっている。図4.19から、Case1～3のいずれの場合においても動吸振器の設置間隔がおおよそ 30° から 40° までの間隔で設置すると総じて高い制振効果が得られることがわかるが、Case1の場合、振動モードの腹と節の間隔である 45° の間

隔で2個の動吸振器を設置した場合が最もよく制振され、Case2の場合では動吸振器の設置間隔が 32.5° のとき最も制振されているが、Case3では動吸振器の設置間隔 35.7° で最もよく制振される。実用化においては、設計の簡便さから2個の動吸振器を全く同じ特性で設計するCase1が用いられる可能性もあるように思われる。その場合、それらの設置間隔を 45° にすることになるが、Case2やCase3のように動吸振器間で固有角振動数比、減衰比、および、Case3のように質量比を異なる値にすることで、 45° ではない、それぞれ 32.5° や 35.7° の設置間隔でCase1以上の制振効果が得られるので、動吸振器の精密な設計を厭わなければ、このような設置間隔を選ぶ制振方法は有効である。

図4.20～4.22に最適設計を行った時の最適質量比、最適固有角振動数比、最適減衰比を示している。各図の(a)と(b)は図4.19と同様の全体図と拡大図である。各図において、黒色の丸印はCase1の各最適値を示しており、赤色の丸印と三角印はそれぞれCase2の動吸振器1と動吸振器2の最適値を示し、青色の丸印と三角印はそれぞれCase3の動吸振器1と動吸振器2の最適値を示している。図4.19と図4.20から、動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節の間隔である 45° に近い場合、2個の動吸振器の質量比に差をつけた方が制振効果が高くなるが、その効果はさほど大きくはないことがわかる。このことから、質量の等しい一対の動吸振器でも最適に近い制振効果を得ることができると言え、動吸振器の簡易設計の観点からは有用である。図4.21から、最適固有角振動数比については、総じて設置間隔が広がると、やや小さな値となることがわかる。また、Case2とCase3の差は小さいが、Case3では、Case2のように2個の動吸振器の値は、設置間隔が振動モードの腹と節の間隔である 45° において同じ値とはならないことがわかる。図4.22から、最適減衰比については、設置間隔が広くなればなるほど、制振のためにはより大きな減衰が必要となっていることがわかる。図4.19の最大振幅の図とも対応させると、動吸振器の設置間隔がおよそ 30° から 45° までの間隔における良好な制振は、大きな値をもつ減衰の効果が大きいと考えられる。また、設置間隔が $10^\circ \sim 20^\circ$ と 30° 以上の場合にCase2とCase3の最適減衰比の差が大きくなっており、Case3は設置間隔が 45° において前述の最適固有角振動数比と同様に、2個の動吸振器の最適減衰比が同じ値とはならないことがわかる。

図4.23から図4.26にCase3の場合の動吸振器の設置間隔がそれぞれ 5° 、 20° 、 21° 、 35.7° のときの共振曲線を示す。縦軸は式(4.1)で定義した無次元振幅、横軸は2次モードの固有角振動数で無次元化した外力の角振動数である。図中の青色の破線はcosモードのみ抽出したときの値、緑色の点線はsinモードのみを抽出したときの値、赤色の実線はcosモードとsinモードの和である固定子の振幅を表し

ている。図 4.23 から動吸振器の設置間隔が 5° のとき、 \cos モードは $\nu=1$ の共振点付近の振幅が小さく、 $\nu=0.9$ と 1.1 付近に大きな共振ピークがある。 \sin モードは逆に $\nu=1$ の共振点付近の振幅が大きく、となりあう 2 個のピークに分かれていることがわかる。これらは動吸振器 1 を $\theta_1 = 0^\circ$ の \cos モードの腹の位置に、動吸振器 2 を $\theta_2 = \Delta\theta = 5^\circ$ の \cos モードの腹のすぐ近くに設置しているため、動吸振器 1 は専ら \cos モードの制振に関与し、動吸振器 2 もほぼ \cos モードの制振に関わり、 \sin モードの制振にはわずかに関与する状態となっているためである。この時、 \cos モードと \sin モードの和からなる実際の共振曲線は 4 個のピークからなる。この 4 個のピークからなる共振曲線の形状は、図 4.24 の動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 20^\circ$ まで続く。図 4.25 に示す動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 21^\circ$ になると、 $\nu=1.1$ 付近の共振ピークが無くなり、共振曲線は 3 個のピークからなる形状となる。この動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 20^\circ$ と 21° の共振曲線の形状の違いと図 4.20, 4.21, 4.22 における動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 20^\circ$ と 21° の間における最適質量比、最適固有角振動数比、最適減衰比のやや大きな変化が対応していると思われる。Case3 で最もよく制振される場合である動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 35.7^\circ$ における制振は、図 4.26 からわかるように共振曲線が $\nu=0.9$ から $\nu=1.05$ でほぼ平坦な形状となることで広い範囲の制振が実現されている。そのメカニズムは、図 4.20, 4.22, 4.26 から、動吸振器 1 の質量を重くすることで \cos モードを互いに固有振動数の差が大きな 2 個のモードとし、一方、動吸振器 2 の質量は動吸振器 1 の 60%程度に軽くすることで \sin モードの固有振動数を互いの差がそれほど大きくない 2 個のモードとすると同時に大きめの減衰比を採用することで、 \sin モードのピーク値を抑える方法であることがわかる。

図 4.27 から図 4.30 に動吸振器の質量比の和が 0.08 の場合の数値計算結果を示している。それぞれ、動吸振器の各設置間隔における共振曲線上の最大振幅、最適質量比、最適固有角振動数比、最適減衰比の図である。各丸印と三角印の色の定義は図 4.19 から図 4.22 と同様である。図 4.19 と図 4.27 を比較すると、質量比が 2 倍になったことで共振曲線の最大振幅は減少し、その効果は動吸振器の設置間隔が大きな領域で大きいことがわかる。図 4.27 から Case1, Case2, Case3 の間の動吸振器の設置間隔に応じた振幅の大小関係は図 4.19 と同じ傾向であることがわかる。動吸振器を重くしても 2 個の動吸振器の質量比を異なる値とすることの効果は少ないことがわかる。また、Case1 の場合、動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 45^\circ$ が最もよく制振され、Case2 の場合、設置間隔が 33.1° のとき、Case3 の場合、設置間隔が 36.4° のとき最もよく制振されている。図 4.28 から質量比の和が 0.08 と大きくなると、図 4.20 と比較して 2 個の動吸振器の質量の差が相対的にやや小さくなっていることがわかる。図 4.29, 4.30 から最適固有角

振動数比，最適減衰比と動吸振器の設置間隔の関係については，動吸振器の質量比の和が 0.04 の場合とほぼ同様の傾向を示しているが，減衰比が全体的に大きな値となっていることがわかる。

図 4.31 に Case3 の場合の 2 個の動吸振器の設置間隔が 22° のときの共振曲線を示す。動吸振器の質量が重くなったために，前節で述べた 4 つのピークがある形状の共振曲線は設置間隔が小さな時から設置間隔 22° まで続いている。また，最も制振効果が高い 2 個の動吸振器の設置間隔が 36.4° のときの共振曲線を図 4.32 に示す。図 4.26 と比較すると，おおよそ $\nu=0.87$ から 1.08 と少し広い振動数の領域でほぼ平坦な形状となることで制振が実現されている。

4.3.2 減衰比に制約がある場合

前項では 2 個の動吸振器の円周方向の各設置間隔における共振曲線上の最大振幅を最小にする質量比，固有角振動数比，減衰比の最適な組み合わせを数値計算から求めたが，制振効果が大きいのは動吸振器の設置間隔が制振対象モードの腹と節の間隔に比較的近い，広い場合であり，そのときの最適な減衰比は比較的大きな値であった。しかしながら，大きな減衰比の値は，減衰材料や必要とされる固定子外周上のスペースの関係から最適な値を実現できない可能性がある。本項では，そのような場合を想定して減衰比の値を 0.01~0.04 の比較的小さい値に固定し，2 個の動吸振器の質量比の和が 0.04 の場合について，2 個の動吸振器の円周方向の各設置間隔における共振曲線上の最大振幅を最小にする質量比，固有角振動数比の最適な組み合わせを数値計算から求めた。

図 4.33 に動吸振器の各設置間隔における共振曲線上の最大振幅を示している。赤色と青色の丸印は減衰比が 0.01 の場合であり，それぞれ 2 個の動吸振器の質量比が同じ場合と異なる場合である。橙色と水色の丸印は減衰比が 0.02 の場合であり，それぞれ 2 個の動吸振器の質量比が同じ場合と異なる場合である。紫色と緑色の丸印は減衰比が 0.04 の場合であり，それぞれ 2 個の動吸振器の質量比が同じ場合と異なる場合である。図 4.34 に動吸振器の各設置間隔における質量比，図 4.35(a), (b), (c) にそれぞれ減衰比が 0.01, 0.02, 0.04 の場合の最適固有角振動数比を示している。各図の丸印と三角印の色の定義は図 4.33 に倣っている。また，前節と同様に丸印は $\Delta\theta = 0^\circ$ に設置した動吸振器 1 の値を示し，三角印は $\theta_2 = \Delta\theta$ に設置した動吸振器 2 の値を示している。図 4.33 から動吸振器の設置間隔が狭い時は減衰比が小さい方が最大振幅は小さく，設置間隔が約 12° 以上では減衰比が大きい方が最大振幅が小さくなっていることがわかる。また，質量比を異なる値にする効果は，減衰比が小さい値の時と動吸振器の設置間隔がおお

よそ 35° 以上で表れている。このことは、図 4.34 で対をなす 2 個の動吸振器の質量比の差が大きく異なっているときの減衰比、および動吸振器の設置間隔の領域とよく対応している。どの減衰比においても、2 個の動吸振器の開き角がおよそ 20° から 30° の値の時に制振効果が高くなっている。図 4.35 から 2 個の動吸振器の質量比が同じ場合に 2 個の動吸振器の最適な固有振動数比の差が大きくなっていることがわかる。図 4.36 に $\gamma=0.02$, $\mu_1+\mu_2=0.04$, 2 個の動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 25^\circ$ のときの共振曲線を示す。4.3.1 項とは異なり、最適な減衰比ではないために、設置間隔が $\Delta\theta = 25^\circ$ であるにも関わらず、前節で述べた 4 つのピークがある形状の共振曲線となっている。

4.3.3 有限要素解析

円環理論による数値解析結果を有限要素解析による結果と比較する。有限要素解析ソフトは Marc を用いた。固定子の形状は、電磁振動が確認された大型のモータを参考にし、内径 428.4mm, 外径 590mm とした。第 2 章で述べたように電磁振動が問題となる振動数の範囲では、軸方向には節が存在するモードは発生しないので、軸方向長さは 1mm としている。四角形 8 節点要素を用い、固定子本体は半径方向を 3 分割し、円周方向は 72 分割している。また、境界条件は、全周フリーとしている。 $i=2$ の固有振動数は均一な円環のため、cos モードと sin モードともに 765.6Hz である。

有限要素解析ソフト Marc の過渡解析を使用して応答シミュレーションを行った。固定子内径の各要素に分布した電磁力を荷重として作用させ、その分布した電磁力が $s=2$ のモードで回転するように設定した。電磁力の 1 周期の時間刻み幅は約 512 等分とした。動吸振器は簡単のためマス、減衰要素、およびバネでモデル化した。主系の各要素に減衰を与えるために次式の仮想的な減衰であるレイリー減衰を用いた。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (4.18)$$

ここに

M : 主系の質量マトリクス

K : 主系の剛性マトリクス

C : 主系の減衰マトリクス

α : 質量減衰係数

β : 剛性減衰係数

そして、 $i=2$ のモードに関する減衰比 γ との関係は次式により得ることができる。

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\omega_{02}} + \frac{\beta\omega_{02}}{2} \quad (4.19)$$

簡単のため質量減衰係数のみが作用するものとし ($\beta=0$)，理論解析と同様に $i=2$ のモードの減衰比が 0.02 となるように質量減衰係数 α を $0.04\omega_{02}$ とした。また，理論解析との比較のため動吸振器の減衰も導入している。図 4.37 に 4.3.1 項の Case3 の最大振幅が最も小さくなる動吸振器の設置間隔に近い $\theta_2 = 35^\circ$ における共振曲線を示している。実線が円環理論による共振曲線，丸印が有限要素モデルのシミュレーション結果である。共振点付近でシミュレーション結果の方が少し大きな振幅となっているが，共振曲線の形状は定性的によく一致している。図 4.38 に 3.2 節の減衰比 $\gamma=0.02$ ，動吸振器の設置間隔 $\Delta\theta = 25^\circ$ で，質量比が異なる場合 ($\mu_1+\mu_2=0.04$) の共振曲線を示している。両解法の結果は定性的に一致しており，無次元角振動数 ν が 0.9, 0.925 を除けば，定量的にもよく一致している。

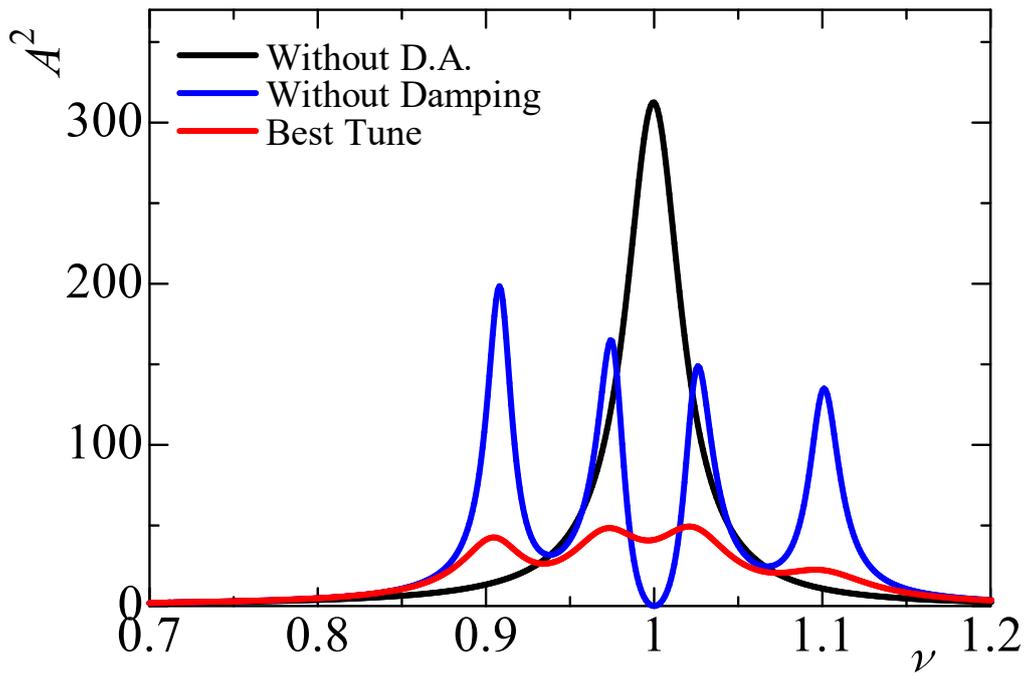


図 4.1 最適化した一対の動吸振器を設置した場合の共振曲線 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=15^\circ$)

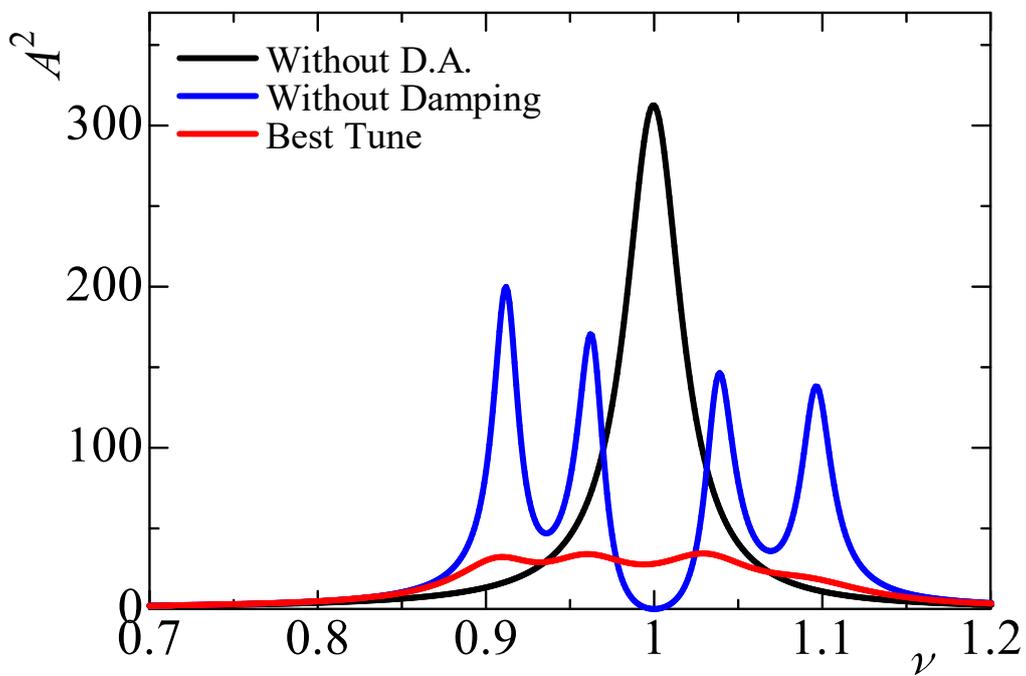


図 4.2 最適化した一対の動吸振器を設置した場合の共振曲線 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=22.5^\circ$)

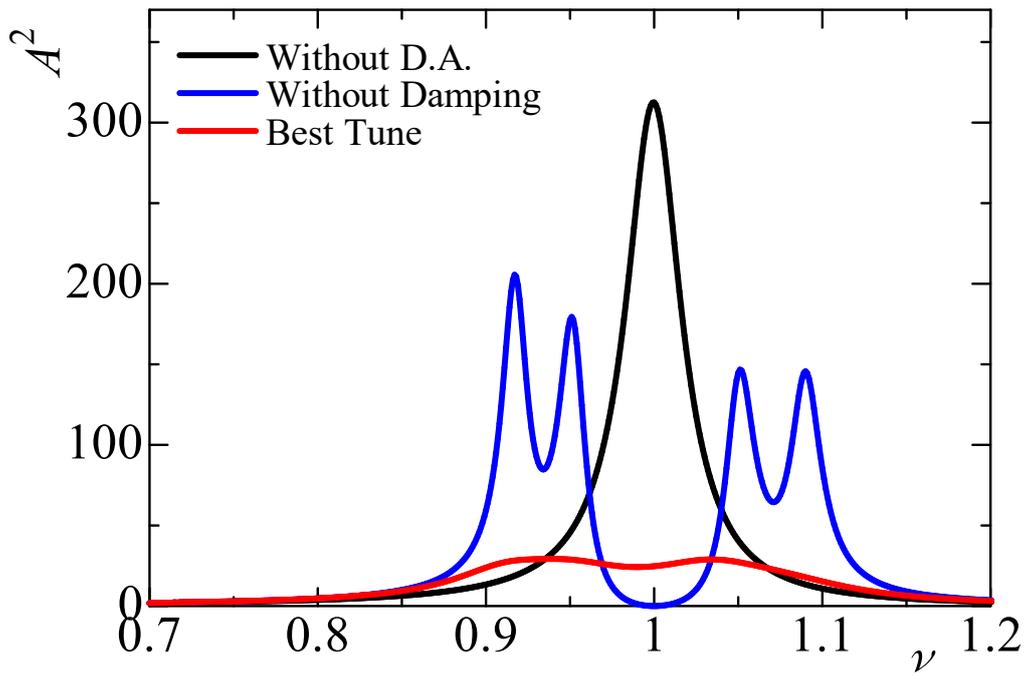


図 4.3 最適化した一対の動吸振器を設置した場合の共振曲線 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=30^\circ$)

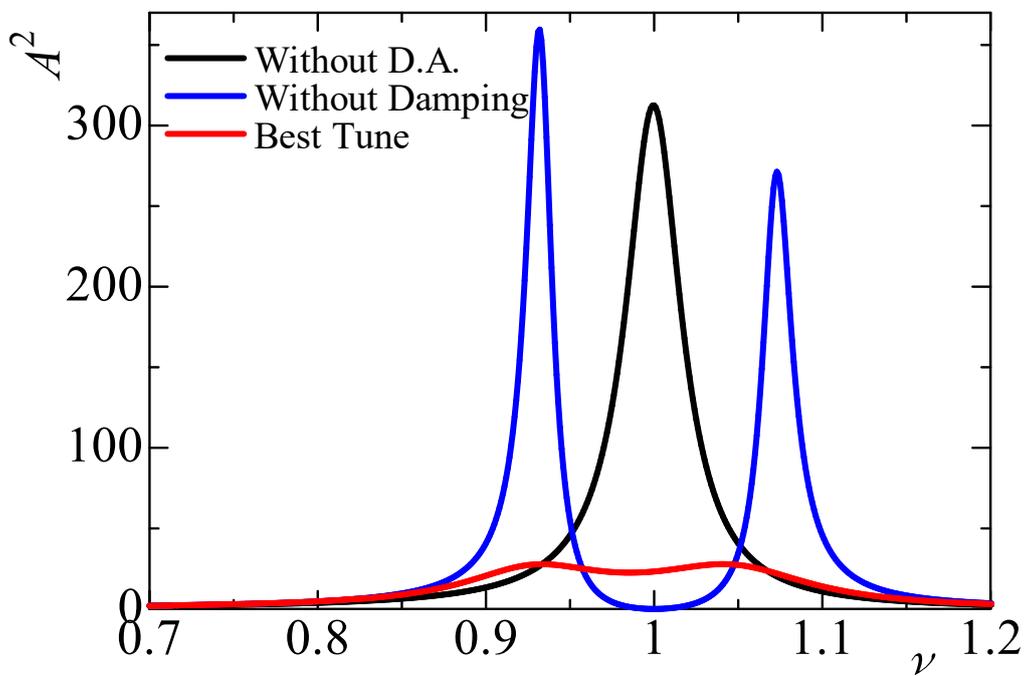


図 4.4 最適化した一対の動吸振器を設置した場合の共振曲線 ($\theta_1=0^\circ$, $\theta_2=45^\circ$)

表 4.1 一対の動吸振器における動吸振器の設置間隔の関係

設置間隔	最大振幅	共振領域 面積	減衰比		固有角振動数比	
			D.A.1	D.A.2	D.A.1	D.A.2
2.5°	128.4	13.02	0.0071	0.0071	0.9993	0.9993
5.0°	102.3	11.67	0.0128	0.0128	0.9988	0.9988
7.5°	82.7	10.55	0.0181	0.0181	0.9982	0.9982
10.0°	68.1	9.58	0.0239	0.0239	0.9974	0.9974
12.5°	57.1	8.78	0.0292	0.0292	0.9965	0.9965
15.0°	48.9	8.13	0.0341	0.0341	0.9954	0.9954
17.5°	42.6	7.55	0.0402	0.0402	0.9942	0.9942
20.0°	37.8	7.09	0.0442	0.0442	0.9929	0.9929
22.5°	34.2	6.70	0.0498	0.0498	0.9913	0.9913
25.0°	31.7	6.37	0.0555	0.0555	0.9895	0.9895
27.5°	30.0	6.11	0.0623	0.0623	0.9872	0.9872
30.0°	29.1	5.92	0.0692	0.0692	0.9846	0.9846
32.5°	28.6	5.78	0.0754	0.0754	0.9820	0.9820
35.0°	28.3	5.70	0.0816	0.0816	0.9799	0.9799
37.5°	28.0	5.61	0.0842	0.0842	0.9782	0.9782
40.0°	27.9	5.55	0.0865	0.0865	0.9770	0.9770
42.5°	27.8	5.53	0.0889	0.0889	0.9763	0.9763
45.0°	27.8	5.52	0.0892	0.0892	0.9761	0.9761

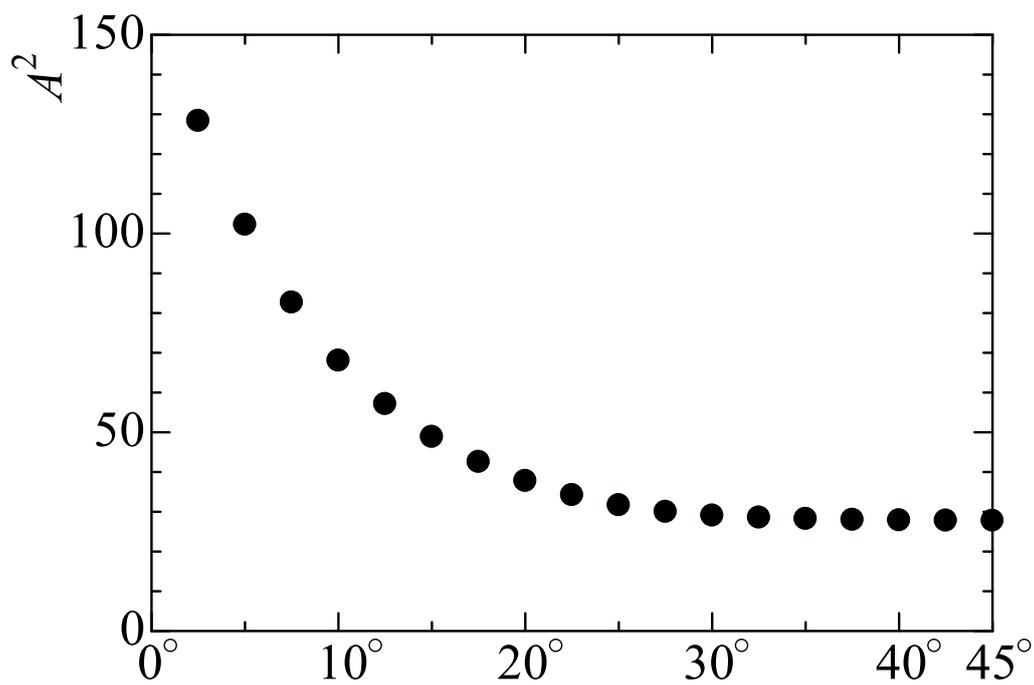


図 4.5 最大振幅と動吸振器の設置間隔の関係

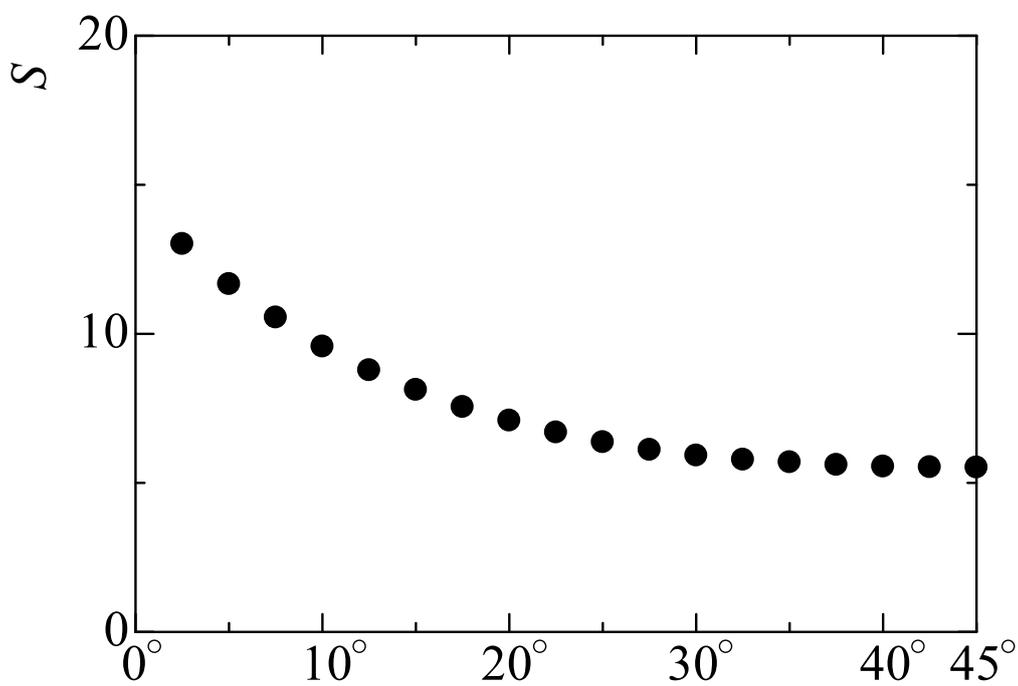


図 4.6 共振領域面積と動吸振器の設置間隔の関係

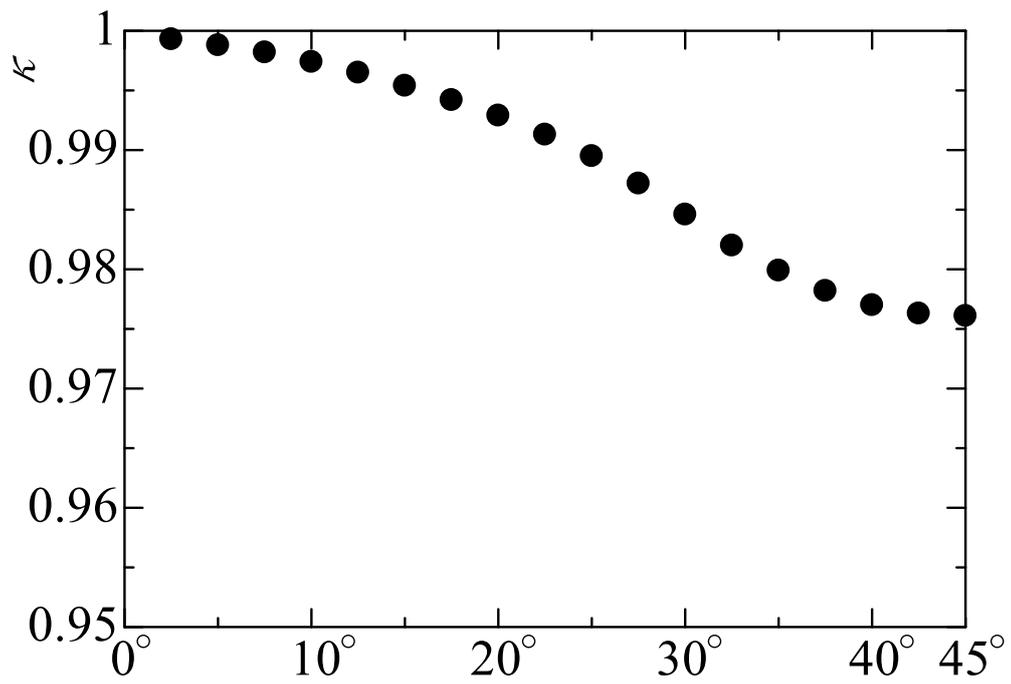


図 4.7 固有角振動数比と動吸振器の設置間隔の関係

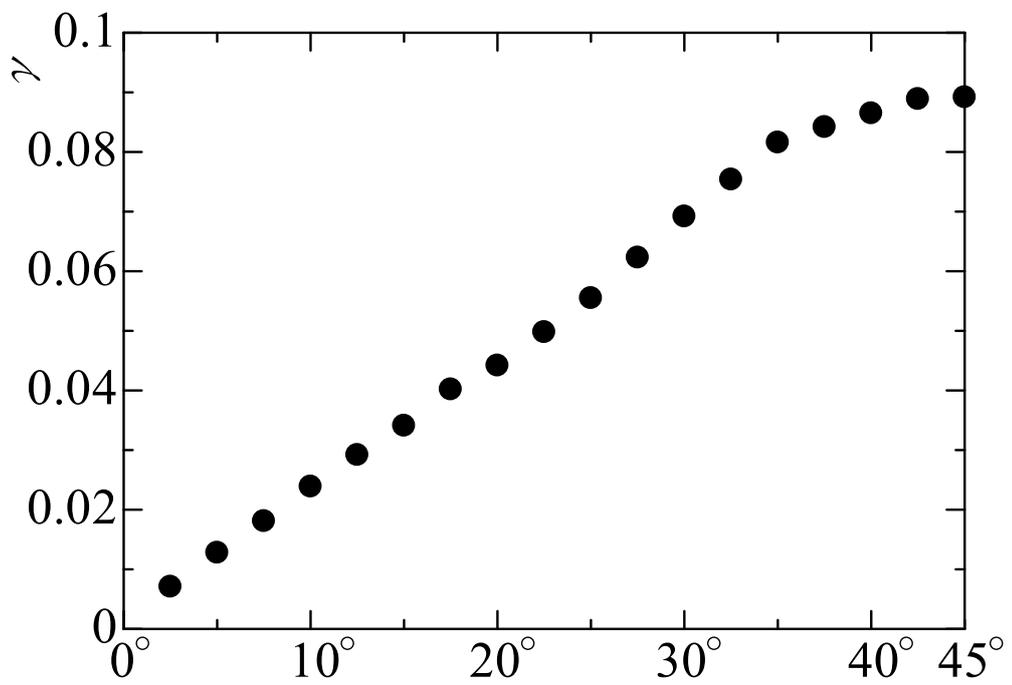


図 4.8 減衰比と動吸振器の設置間隔との関係

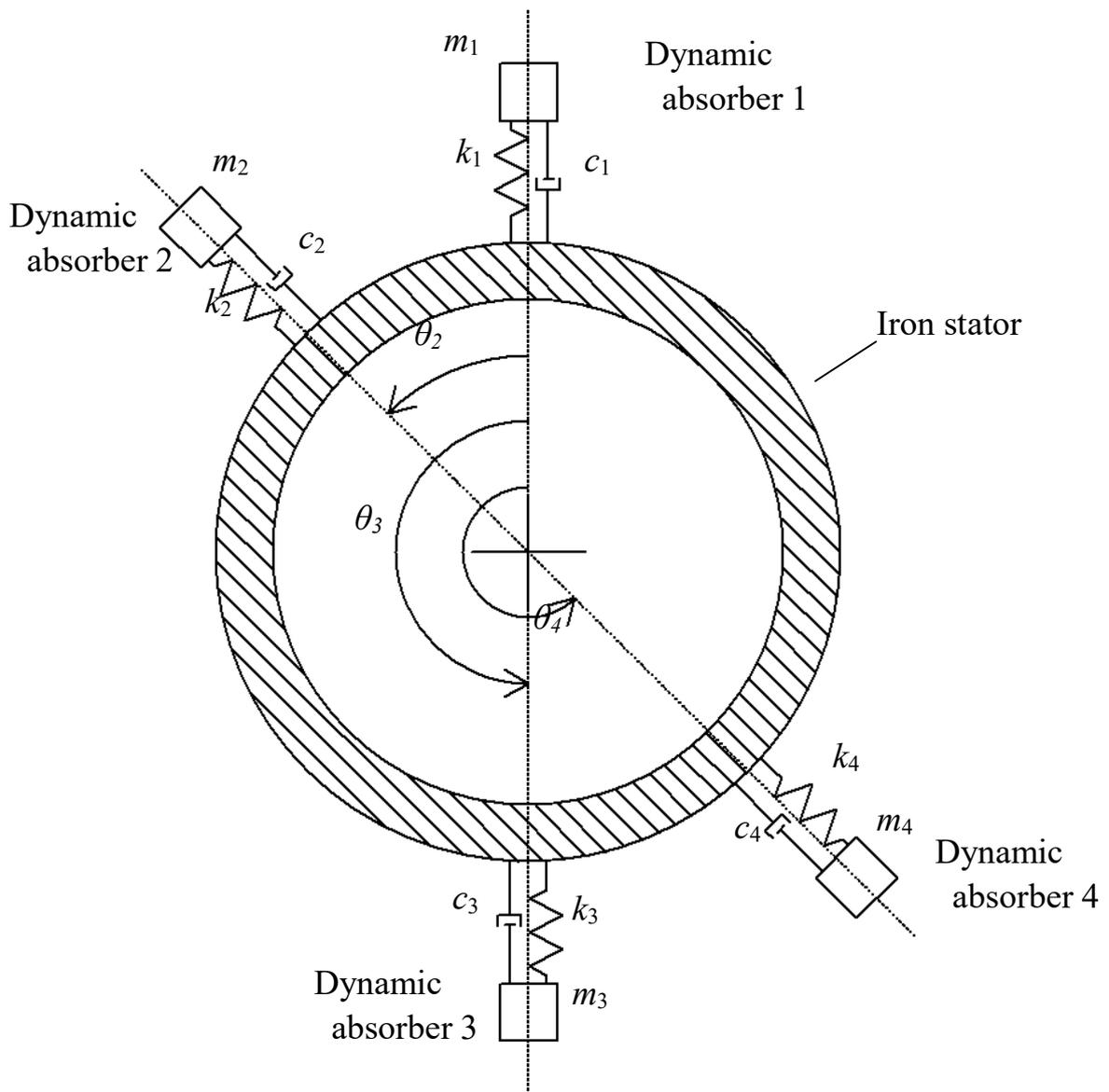
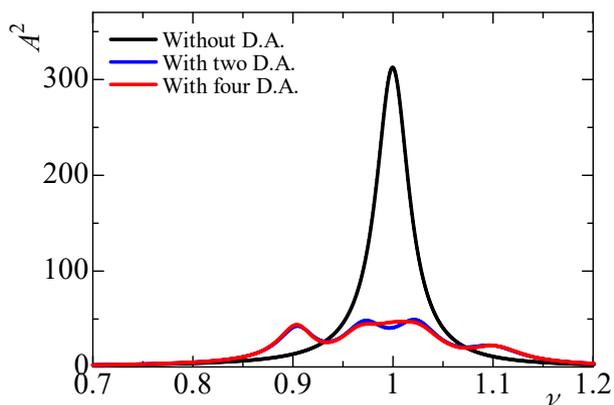
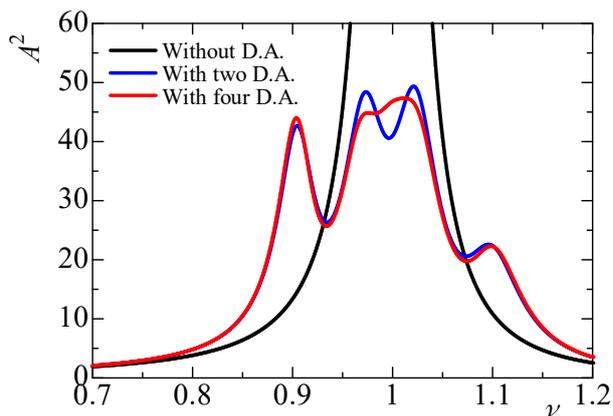


図 4.9 多重動吸振器モデル図

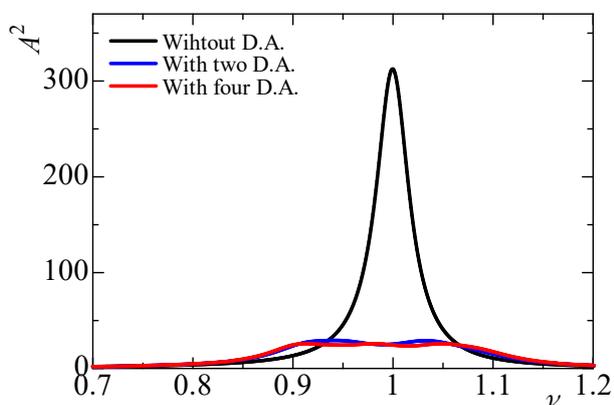


(a) 全体図

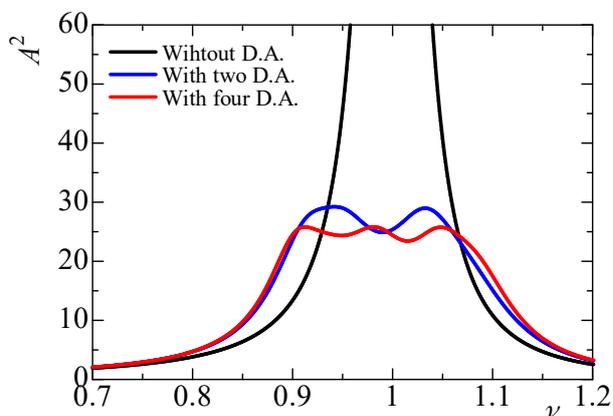


(b) 拡大図

図 4.10 最適化した多重動吸振器を設置した場合の共振曲線($\theta_1 = 0, \theta_2 = 15^\circ, \theta_3 = 180^\circ, \theta_4 = 195^\circ$)

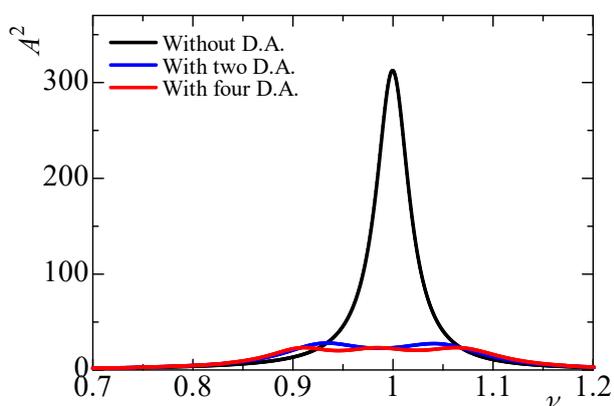


(a) 全体図

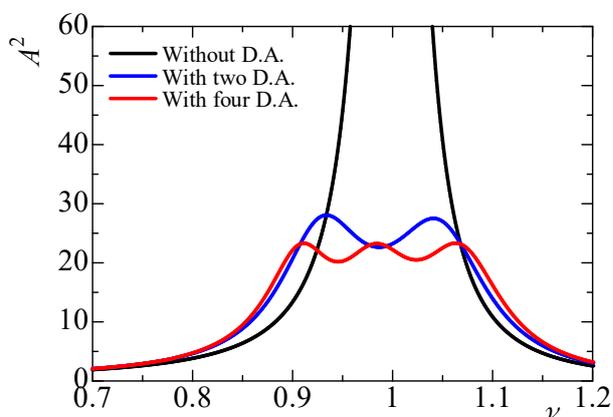


(b) 拡大図

図 4.11 最適化した多重動吸振器を設置した場合の共振曲線($\theta_1 = 0, \theta_2 = 30^\circ, \theta_3 = 180^\circ, \theta_4 = 210^\circ$)



(a) 全体図

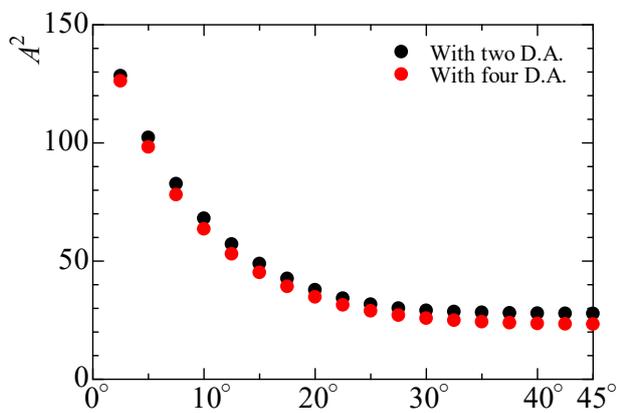


(b) 拡大図

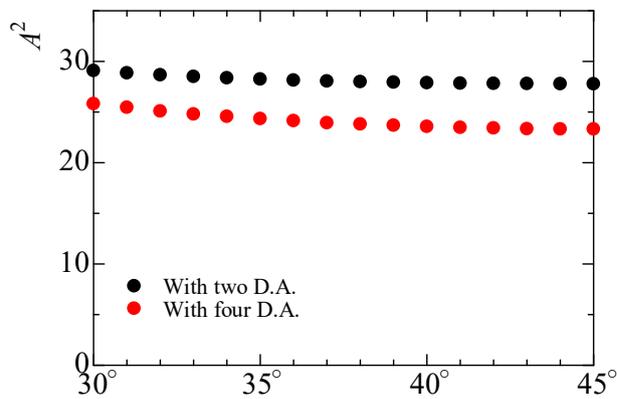
図 4.12 最適化した多重動吸振器を設置した場合の共振曲線($\theta_1 = 0, \theta_2 = 45^\circ, \theta_3 = 180^\circ, \theta_4 = 225^\circ$)

表 4.2 多重動吸振器における動吸振器の設置間隔の関係

設置間隔	最大振幅	共振領域 面積	減衰比		固有角振動数比	
			D.A. 1,2	D.A. 3,4	D.A. 1,2	D.A. 3,4
2.5°	126.2	13.09	0.0064	0.0067	0.9960	1.0028
5.0°	98.2	11.84	0.0109	0.0110	0.9927	1.0051
7.5°	78.0	10.68	0.0158	0.0153	0.9895	1.0067
10.0°	63.6	9.68	0.0206	0.0198	0.9863	1.0081
12.5°	53.0	8.82	0.0254	0.0250	0.9834	1.0095
15.0°	45.1	8.11	0.0305	0.0293	0.9799	1.0103
17.5°	39.2	7.50	0.0356	0.0336	0.9762	1.0109
20.0°	34.8	7.00	0.0406	0.0373	0.9718	1.0113
22.5°	31.4	6.57	0.0450	0.0406	0.9666	1.0119
25.0°	28.9	6.21	0.0485	0.0436	0.9608	1.0128
27.5°	27.0	5.92	0.0520	0.0468	0.9556	1.0137
30.0°	25.8	5.67	0.0529	0.0500	0.9500	1.0156
32.5°	24.9	5.48	0.0543	0.0533	0.9458	1.0174
35.0°	24.3	5.34	0.0556	0.0564	0.9426	1.0191
37.5°	23.8	5.23	0.0565	0.0587	0.9401	1.0206
40.0°	23.5	5.15	0.0569	0.0601	0.9383	1.0218
42.5°	23.3	5.11	0.0572	0.0613	0.9373	1.0225
45.0°	23.3	5.10	0.0570	0.0620	0.9370	1.0228

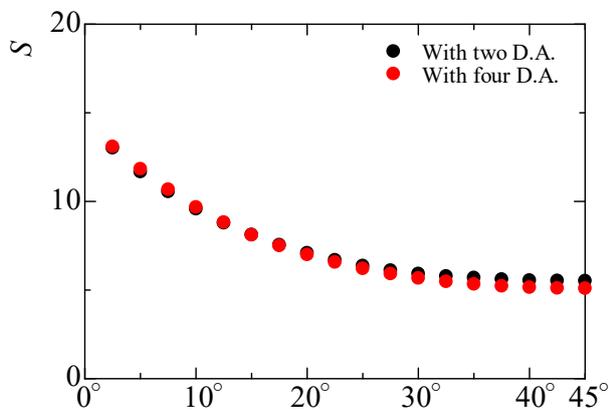


(a) 全体図

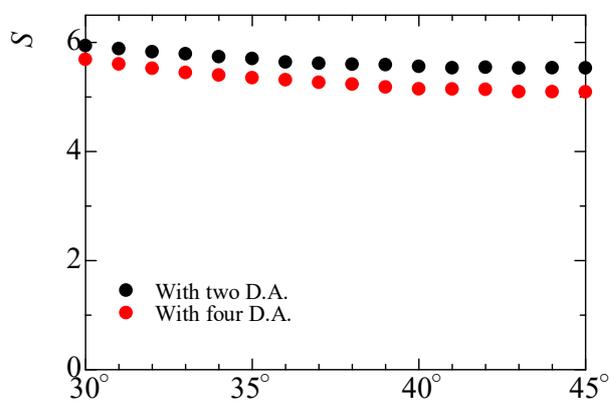


(b) 拡大図

図 4.13 最大振幅と動吸振器の設置間隔の関係

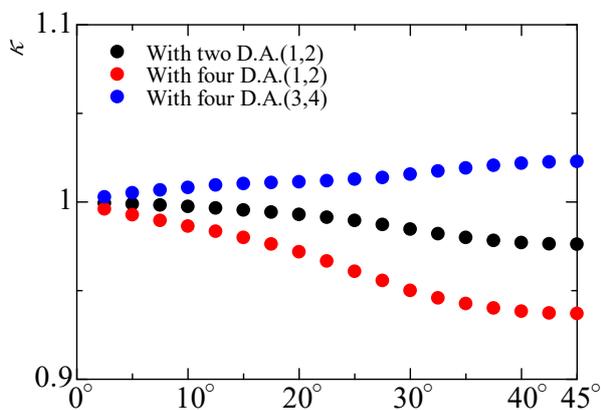


(a) 全体図

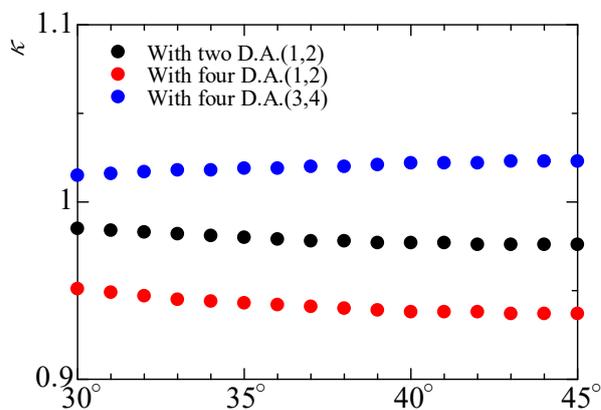


(b) 拡大図

図 4.14 共振領域面積と動吸振器の設置間隔の関係

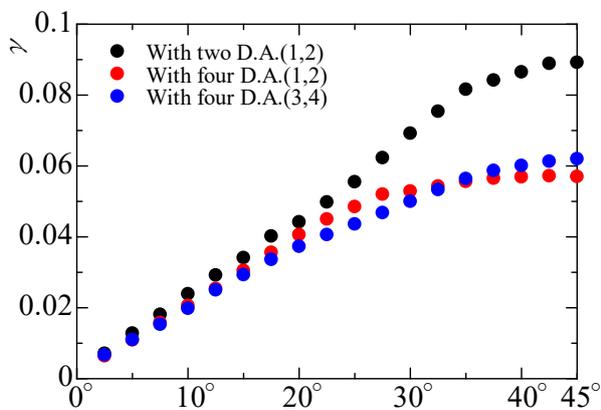


(a) 全体図

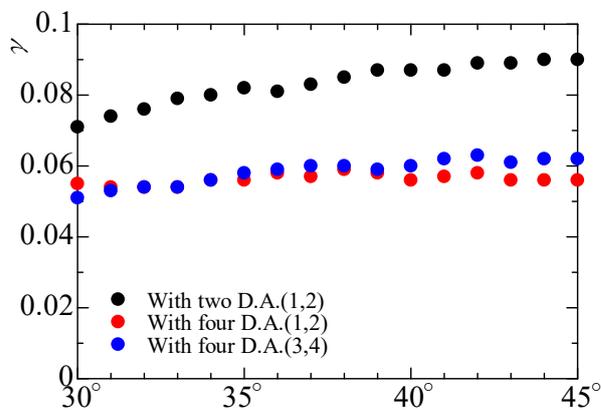


(b) 拡大図

図 4.15 固有角振動数比と動吸振器の設置間隔との関係



(a) 全体図



(b) 拡大図

図 4.16 減衰比と動吸振器の設置間隔の関係

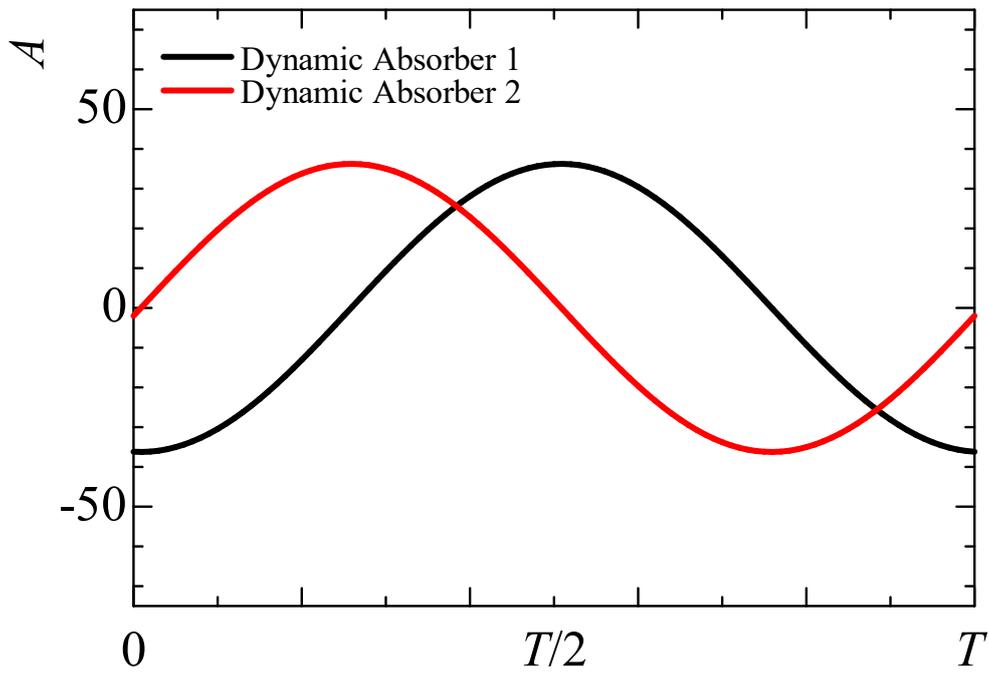


図 4.17 動吸振器 2 個の最適設計時の波形 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ$)

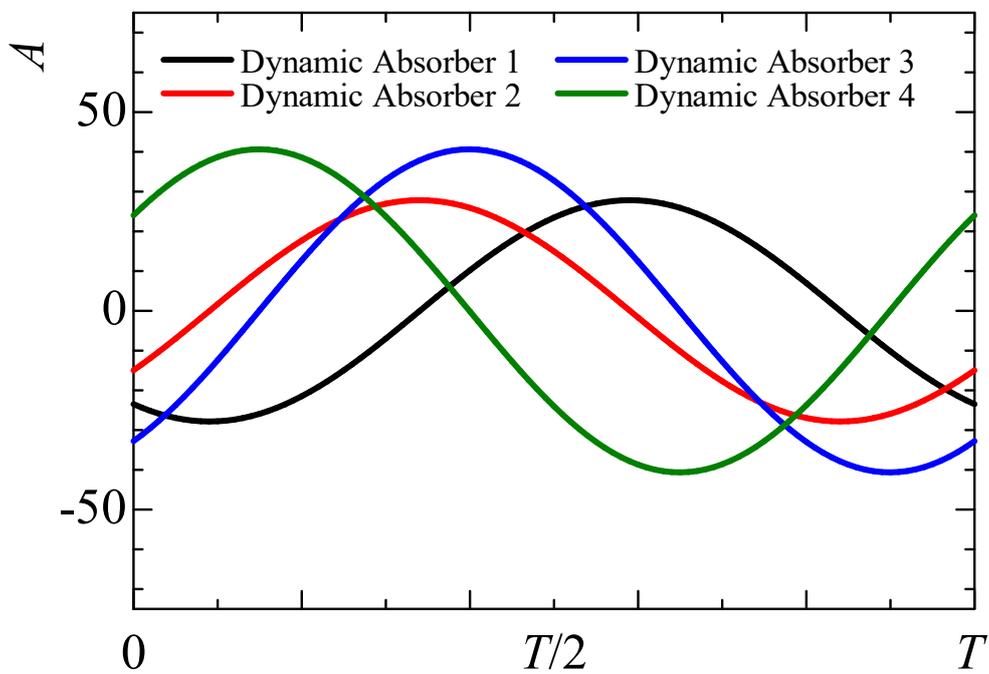


図 4.18 多重動吸振器の最適設計時の波形 ($\theta_1=0^\circ, \theta_2=45^\circ, \theta_3=180^\circ, \theta_4=225^\circ$)

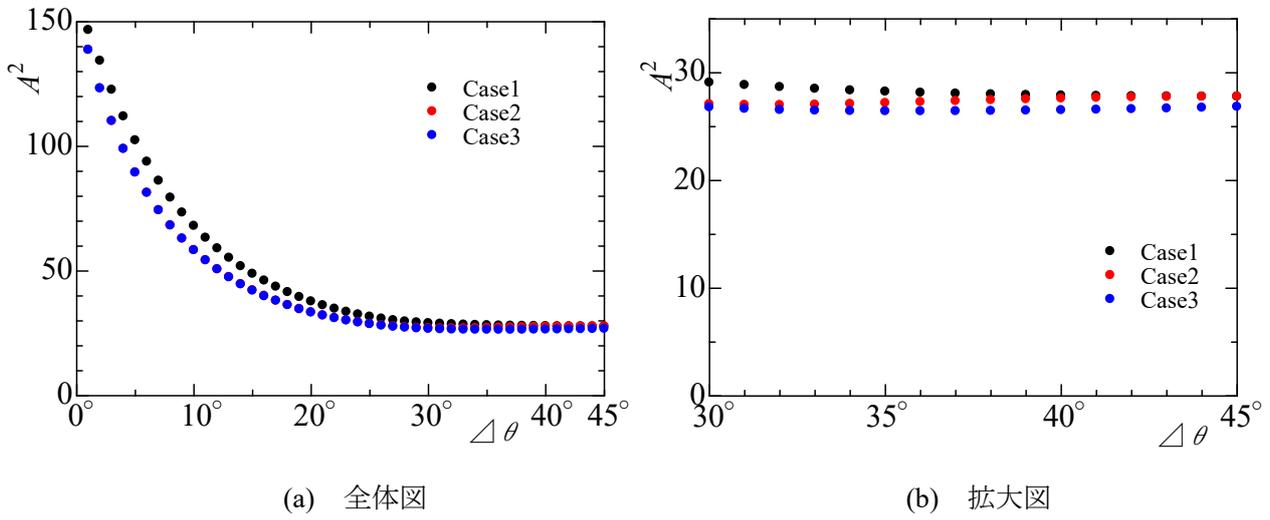


図 4.19 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最大振幅との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

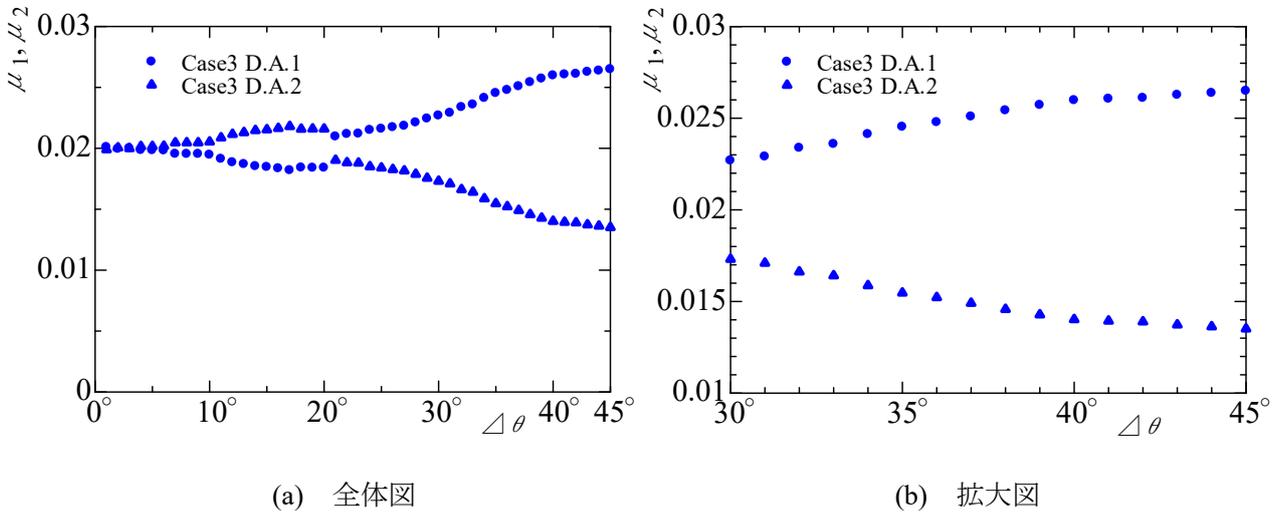


図 4.20 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適質量比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

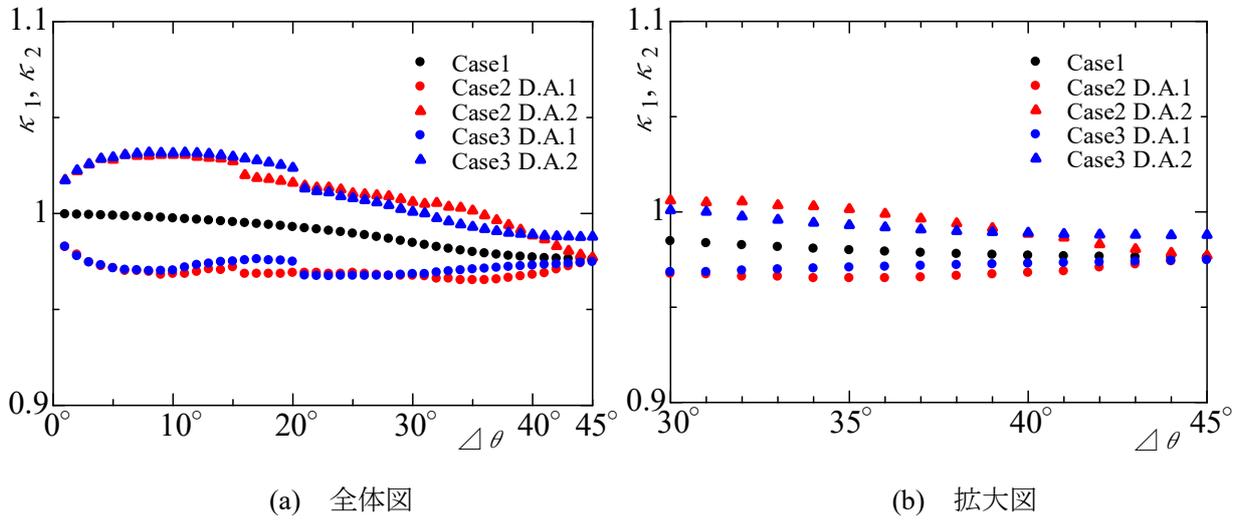


図 4.21 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適固有角振動数比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

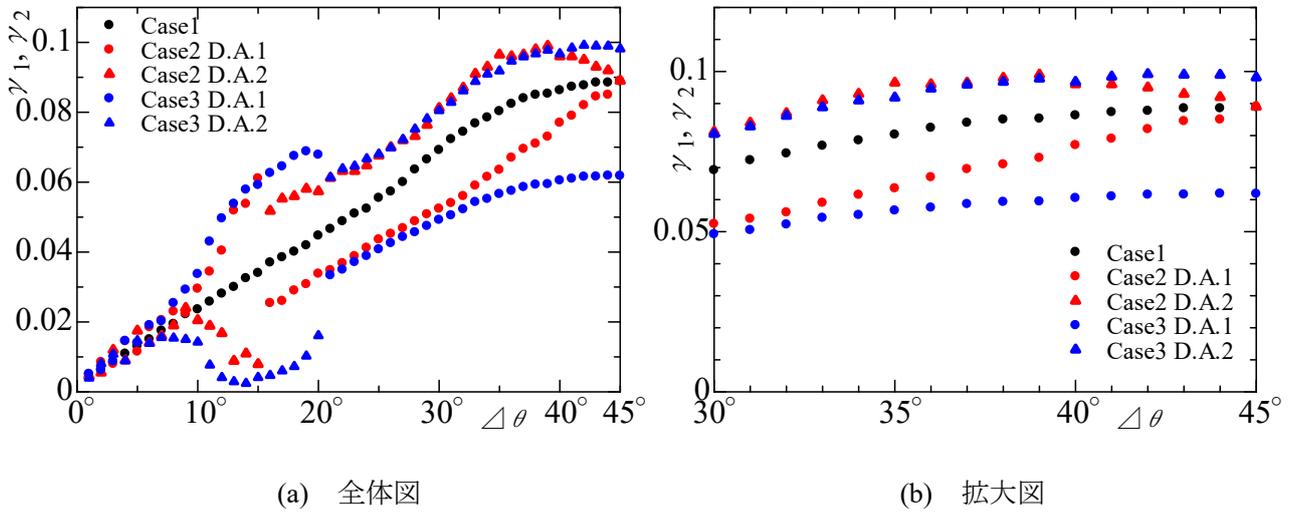


図 4.22 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適減衰比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

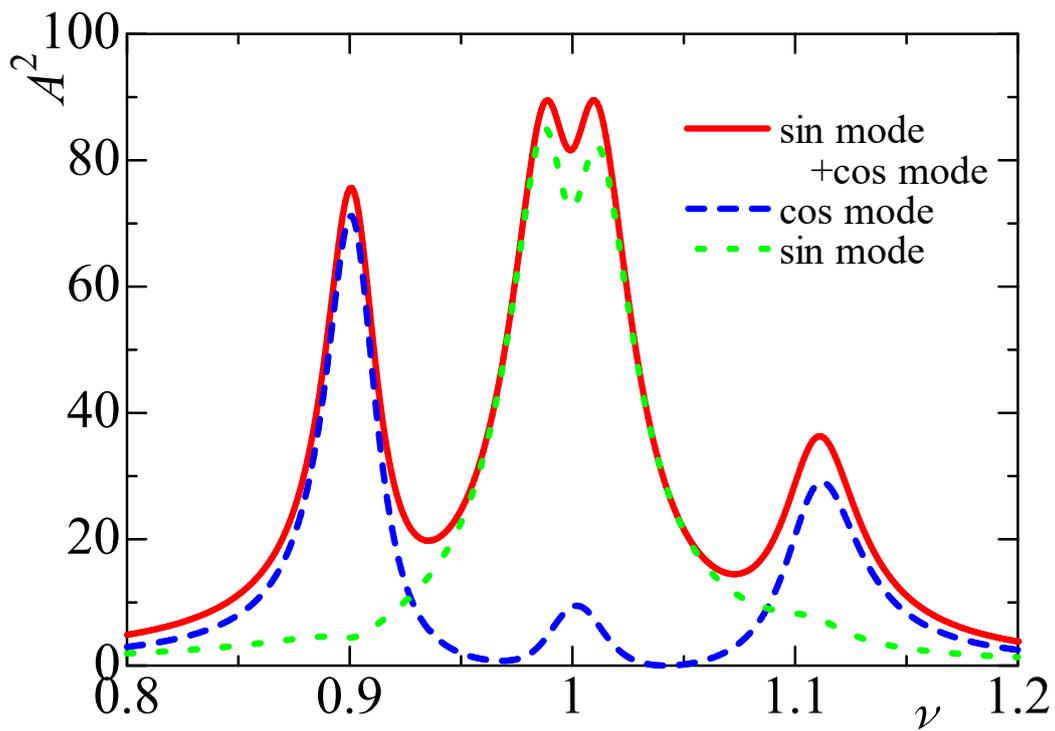


図 4.23 Case3 における動吸振器の設置間隔が 5° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

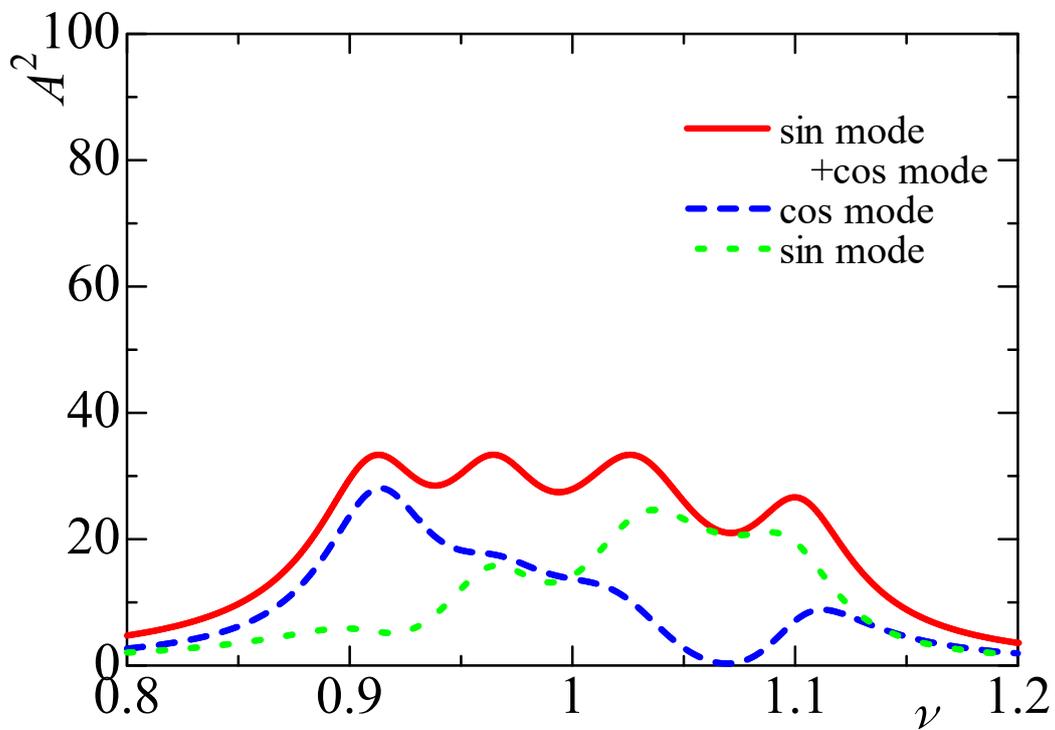


図 4.24 Case3 における動吸振器の設置間隔が 20° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

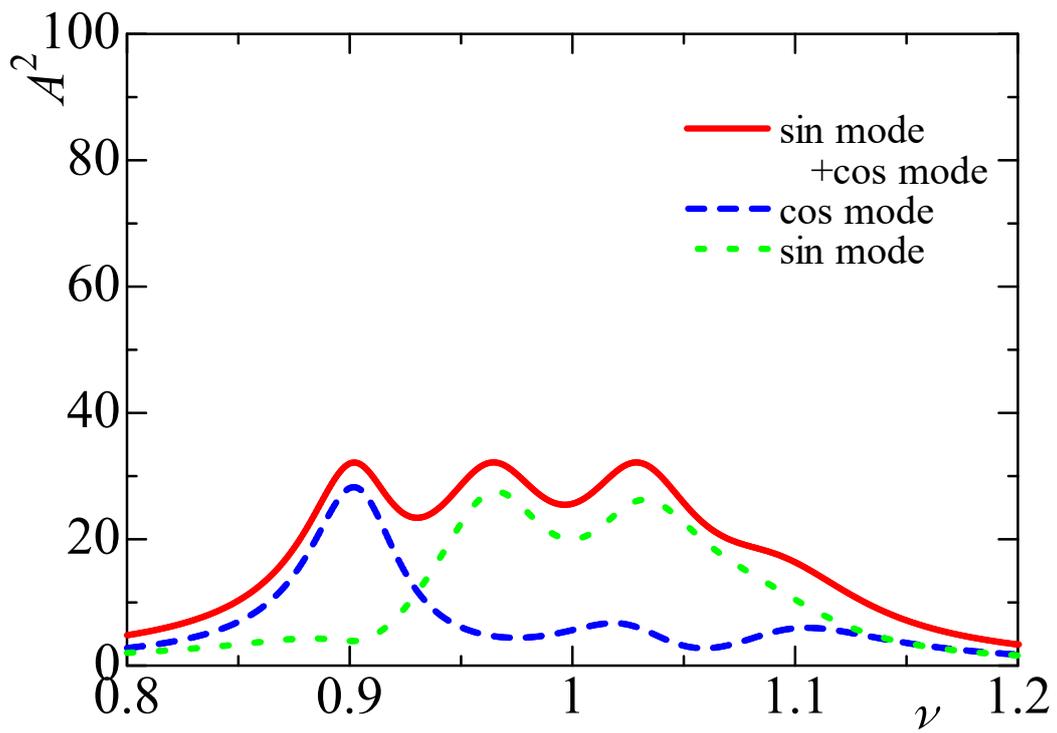


図 4.25 Case3 における動吸振器の設置間隔が 21° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

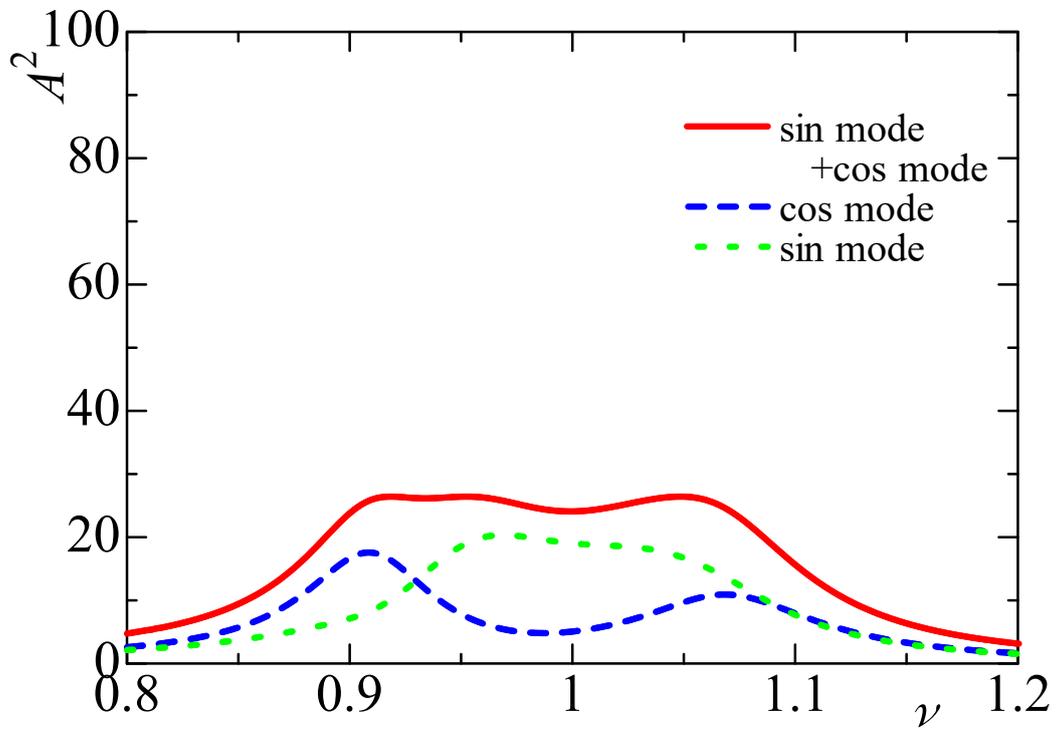


図 4.26 Case3 における動吸振器の設置間隔が 35.7° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.04$)

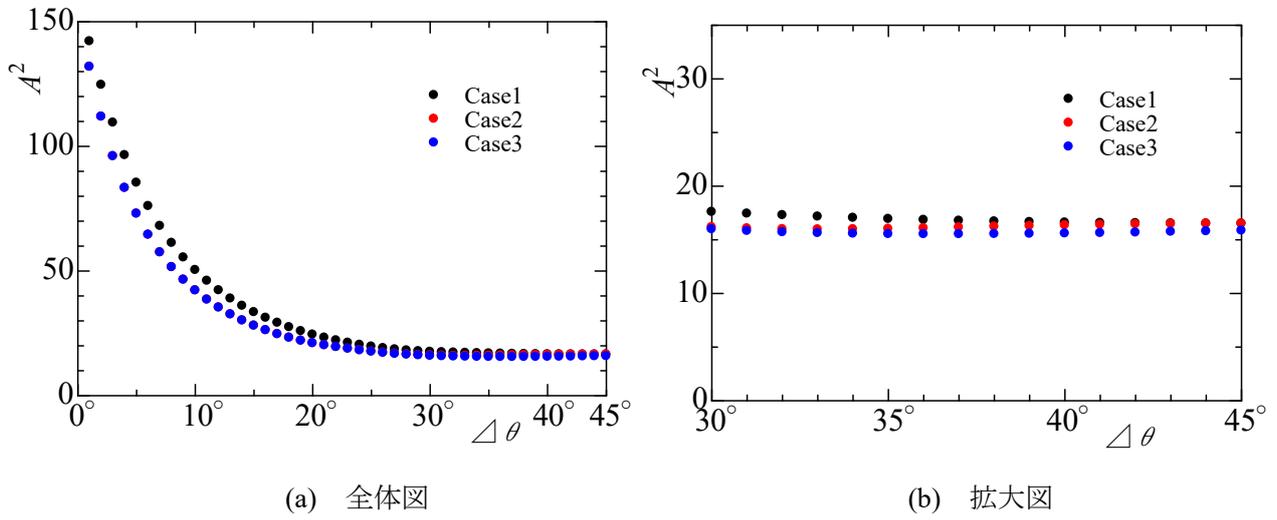


図 4.27 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最大振幅との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)

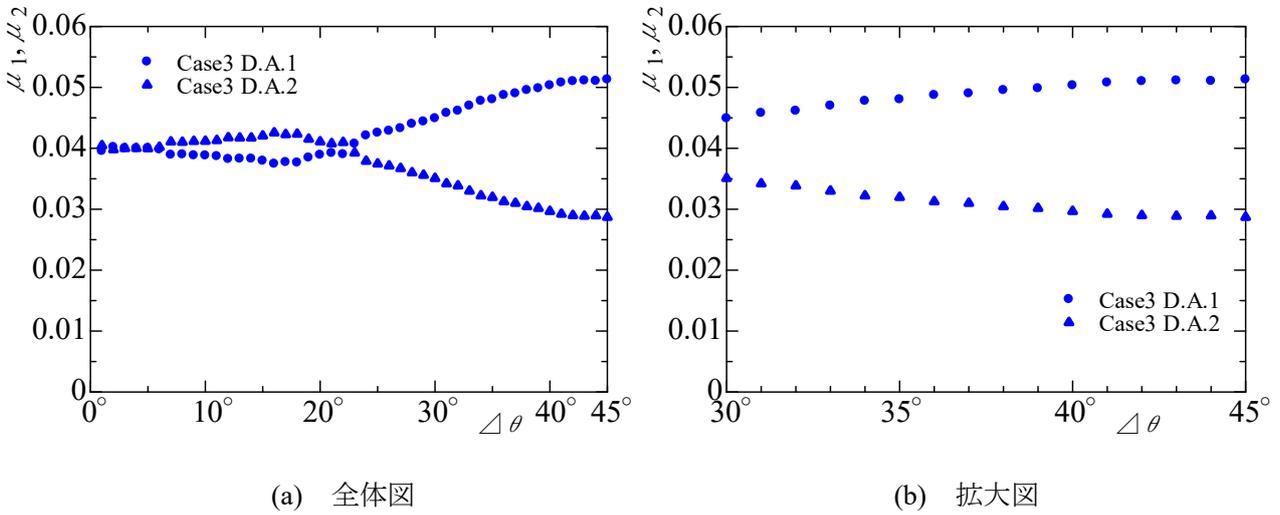
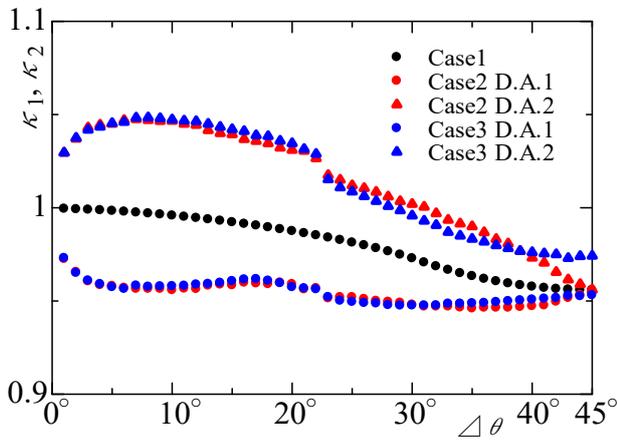
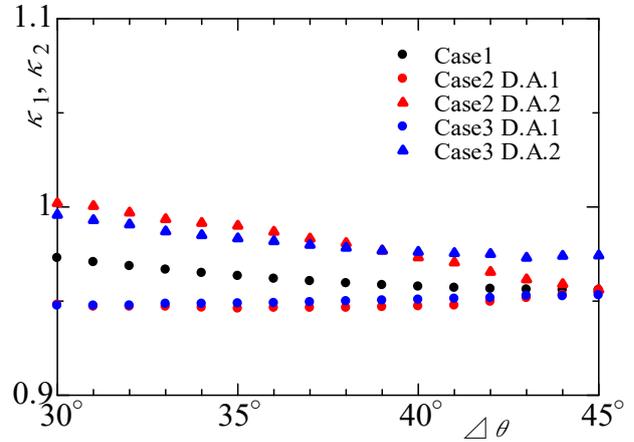


図 4.28 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適質量比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)

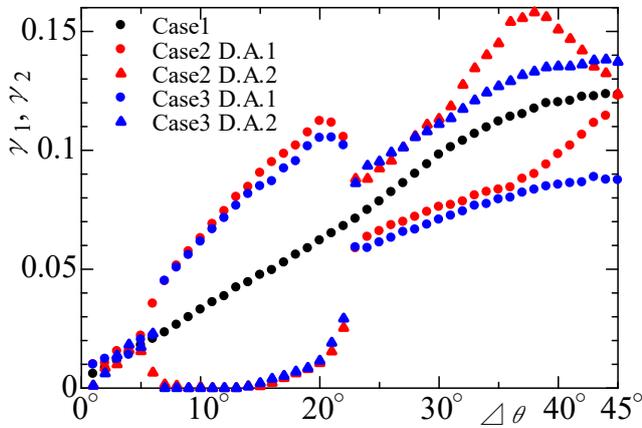


(a) 全体図

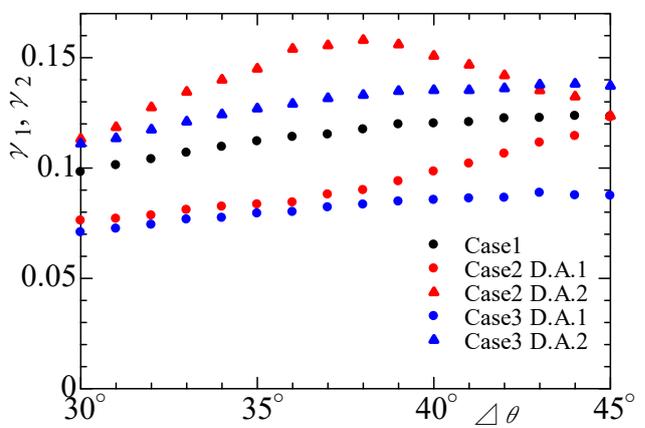


(b) 拡大図

図 4.29 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適固有角振動数比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)



(a) 全体図



(b) 拡大図

図 4.30 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適減衰比との関係 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)

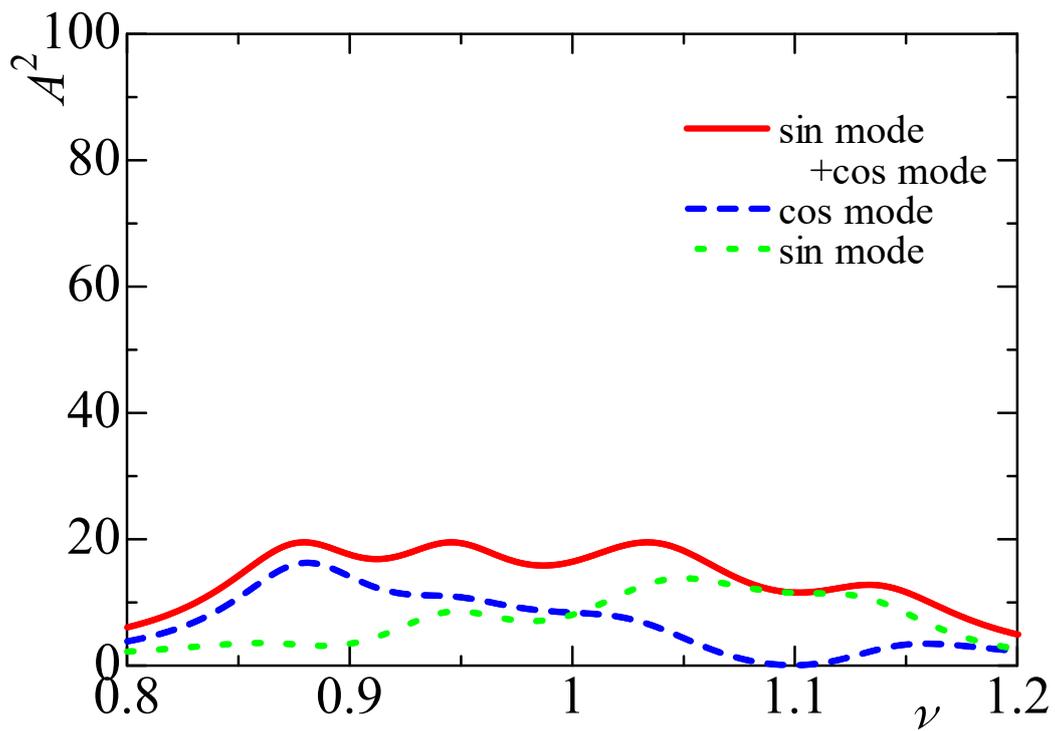


図 4.31 Case3 における動吸振器の設置間隔が 22° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)

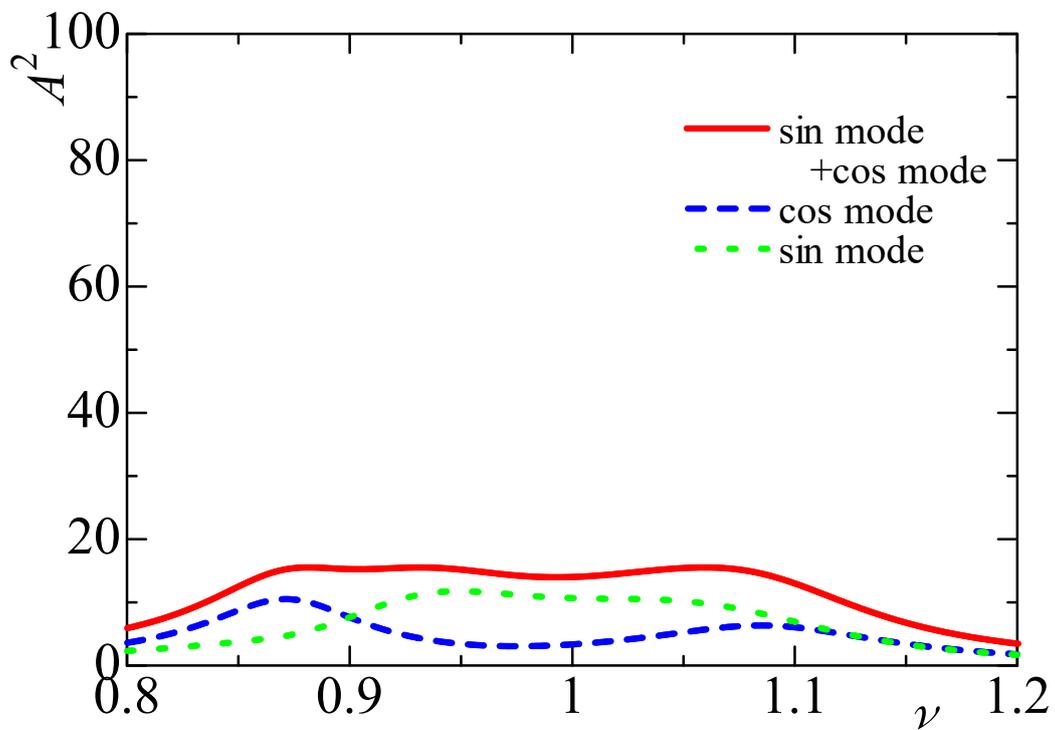


図 4.32 Case3 における動吸振器の設置間隔が 36.4° の場合の共振曲線 ($\mu_1+\mu_2=0.08$)

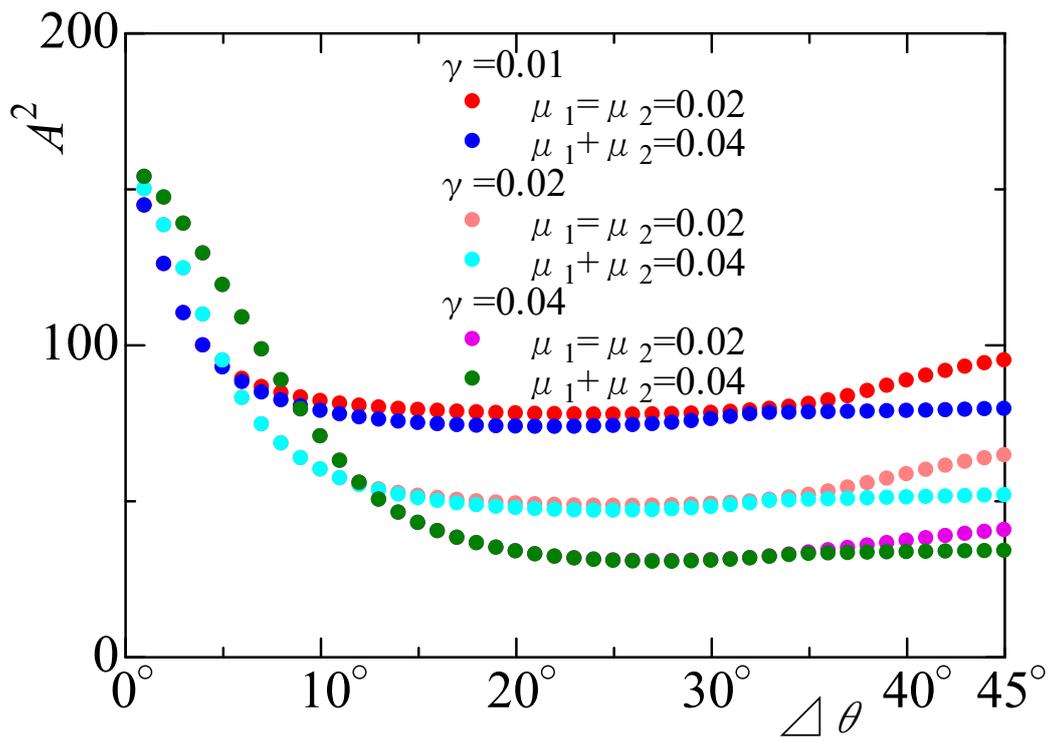


図 4.33 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最大振幅との関係

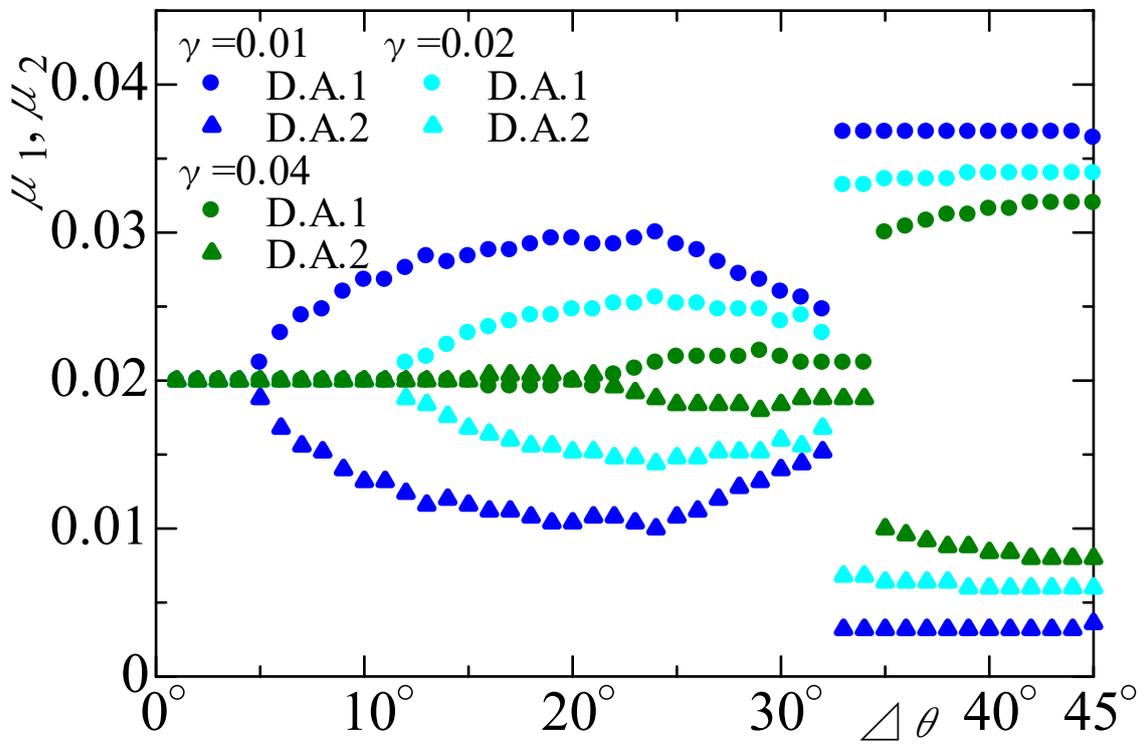
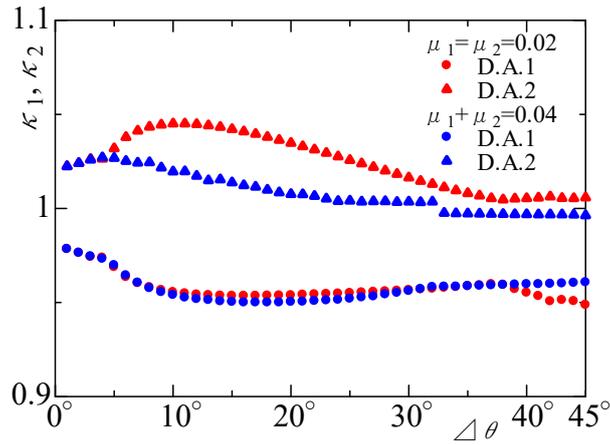
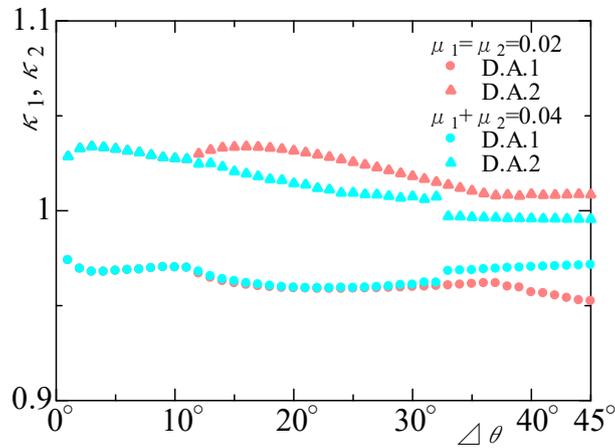


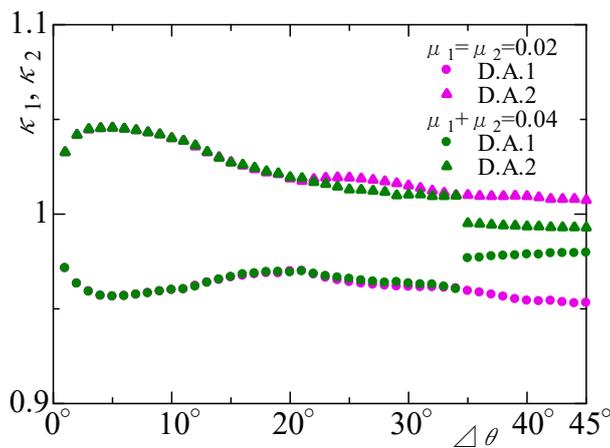
図 4.34 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適質量比との関係



(a) $\gamma=0.01$



(b) $\gamma=0.02$



(c) $\gamma=0.03$

図 4.35 最適設計時の動吸振器の設置間隔と最適固有角振動数比との関係

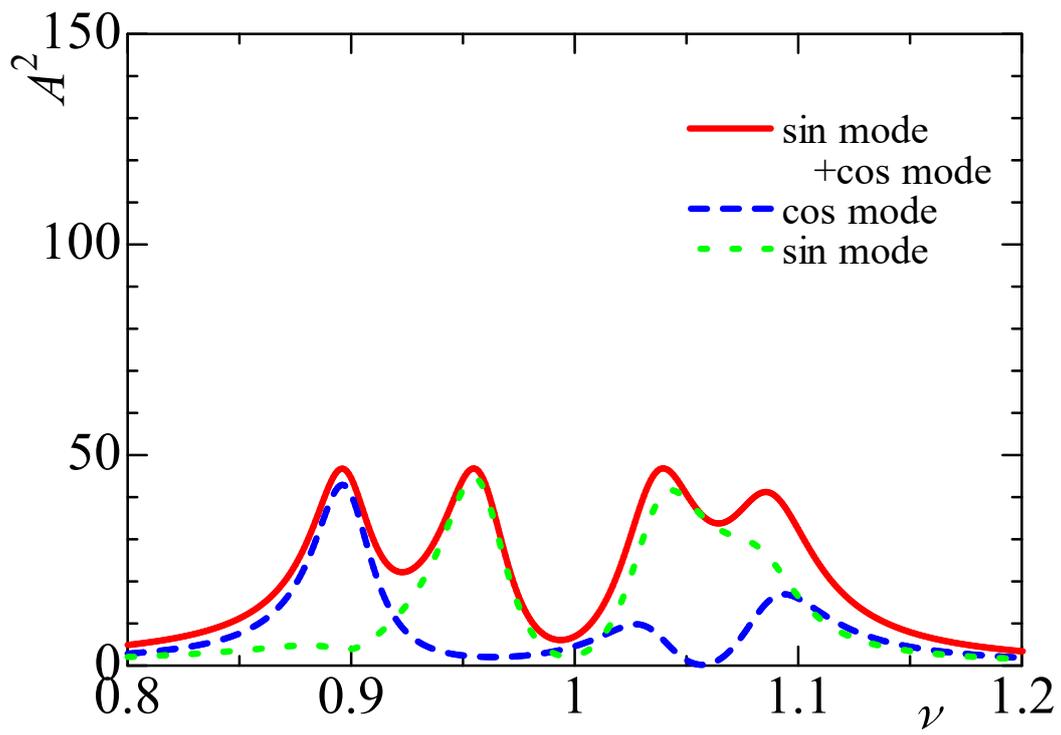


図 4.36 共振曲線 ($\gamma=0.02$, $\mu_1+\mu_2=0.04$, $\Delta\theta = 25^\circ$)

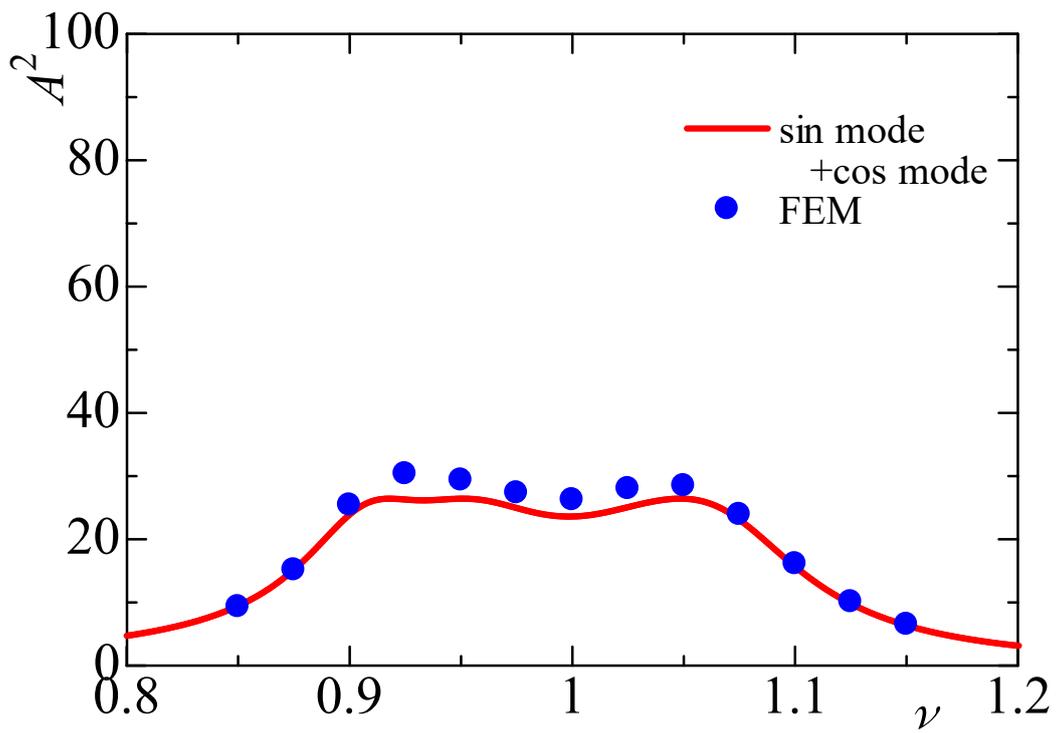


图 4.37 共振曲线 (Cace3, $\mu_1+\mu_2=0.04$, $\Delta\theta = 35^\circ$)

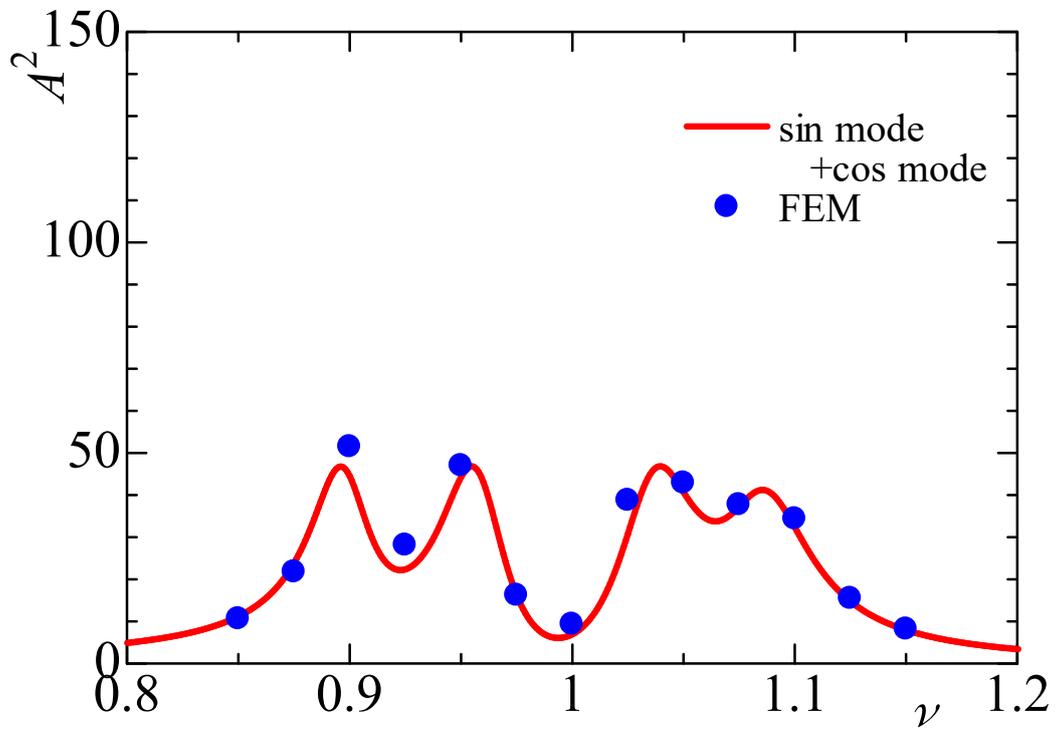


图 4.38 共振曲线 ($\gamma=0.02$, $\mu_1+\mu_2=0.04$, $\Delta\theta = 25^\circ$)

第5章 不均一性を考慮した電動機の制振

5.1 理論解析

前章まで電動機を均一な円環としてモデル化しているが、実際の電動機固定子は第2章の図2.2に示したように、薄い電磁鋼板が軸方向に積層したものを端部の鉄板を介してボルトによって加圧し締め付ける構造となっており、そのボルトが積層板に接した場合不均一性の要因となる。また、放熱フィンやフレームも不均一性の要因となる。そこで、本章では慣性力として不均一性を再現することとし、不均一性がある場合の電動機の制振問題を考える。また、不均一性の効果を用いて電動機の制振に利用できるか検討する。

5.1.1 運動方程式

主系に不均一性を慣性力として追加する。簡単のため、その慣性力は半径方向の一点に作用するものとする。また、主系と動吸振器にそれぞれ粘性減衰力を追加すると、主系と動吸振器の運動方程式はそれぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi \rho A \ddot{a}_i + c_{0i} \dot{a}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} a_i + \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \cos i \alpha_z (\ddot{a}_i \cos i \alpha_z + \ddot{b}_i \sin i \alpha_z) \\ & + \sum_{j=1}^2 c_j \cos i \theta_j \{(\dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j) - \dot{x}_j\} + \sum_{j=1}^2 k_j \cos i \theta_j \{(a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j\} \\ & = \pi F_s \cos \Omega_s t \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) \pi \rho A \ddot{b}_i + c_{0i} \dot{b}_i + (1 - i^2)^2 EI \frac{\pi}{r^3} b_i + \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \sin i \alpha_z (\ddot{a}_i \cos i \alpha_z + \ddot{b}_i \sin i \alpha_z) \\ & + \sum_{j=1}^2 c_j \sin i \theta_j \{(\dot{a}_i \cos i \theta_j + \dot{b}_i \sin i \theta_j) - \dot{x}_j\} + \sum_{j=1}^2 k_j \sin i \theta_j \{(a_i \cos i \theta_j + b_i \sin i \theta_j) - x_j\} \\ & = -\pi F_s \sin \Omega_s t \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \{\dot{x}_1 - (\dot{a}_i \cos i \theta_1 + \dot{b}_i \sin i \theta_1)\} + k_1 \{x_1 - (a_i \cos i \theta_1 + b_i \sin i \theta_1)\} = 0 \quad (5.3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \{\dot{x}_2 - (\dot{a}_i \cos i \theta_2 + \dot{b}_i \sin i \theta_2)\} + k_2 \{x_2 - (a_i \cos i \theta_2 + b_i \sin i \theta_2)\} = 0 \quad (5.4)$$

ここに、不均一性に関連する変数は以下のとおりである。

α_z : 不均一性の円周方向の作用位置、反時計回りを正とする ($z=1,2$)

z : 不均一性の作用する数を表す整数 ($z=1,2$)

m_{Iz} : $\theta = \alpha_z$ に作用する不均一性の質量

以下, $i=2$ のモードの制振を考える.

式(5.1)から式(5.4)の定常解を次式のようにおく.

$$a_2 = A_1 \cos \Omega_2 t + B_1 \sin \Omega_2 t \quad (5.5)$$

$$b_2 = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t \quad (5.6)$$

$$x_1 = A_3 \cos \Omega_2 t + B_3 \sin \Omega_2 t \quad (5.7)$$

$$x_2 = A_4 \cos \Omega_2 t + B_4 \sin \Omega_2 t \quad (5.8)$$

式(5.1)から式(5.4)に式(5.5)から式(5.8)を代入し $\cos \Omega_2 t$, $\sin \Omega_2 t$ の係数を比較すると, $A_1 \sim A_4$, $B_1 \sim B_4$ に関する以下の行列式が得られる.

$$\mathbf{G} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_2 \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

ここに

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G1}_{11} & \mathbf{G1}_{12} \\ \mathbf{G1}_{21} & \mathbf{G1}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_{11}$$

$$\mathbf{G1}_{11} = \begin{bmatrix} k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \cos^2 2\alpha_z & c_{02} \Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j \\ -c_{02} \Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \cos^2 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \cos^2 2\alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G1}_{12} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \cos 2\alpha_z \sin 2\alpha_z & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \cos 2\theta_j \sin 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \cos 2\alpha_z \sin 2\alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{121} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \sin 2\alpha_z \cos 2\alpha_z & \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j \\ -\sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j & \sum_{j=1}^2 k_j \sin 2\theta_j \cos 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \sin 2\alpha_z \cos 2\alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{122} = \begin{bmatrix} k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \sin^2 2\alpha_z & c_{02} \Omega_2 + \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j \\ -c_{02} \Omega_2 - \sum_{j=1}^2 c_j \Omega_2 \sin^2 2\theta_j & k_{02} - m_{02} \Omega_2^2 + \sum_{j=1}^2 k_j \sin^2 2\theta_j - \sum_{z=1}^2 m_{Iz} \Omega_2^2 \sin^2 2\alpha_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 \\ -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{21} = \begin{bmatrix} -k_1 \cos 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 & -c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 \\ c_1 \Omega_2 \cos 2\theta_1 & -k_1 \cos 2\theta_1 & c_1 \Omega_2 \sin 2\theta_1 & -k_1 \sin 2\theta_1 \\ -k_2 \cos 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 & -c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 \\ c_2 \Omega_2 \cos 2\theta_2 & -k_2 \cos 2\theta_2 & c_2 \Omega_2 \sin 2\theta_2 & -k_2 \sin 2\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{22} = \begin{bmatrix} k_1 - m_1 \Omega_2^2 & c_1 \Omega_2 & 0 & 0 \\ -c_1 \Omega_2 & k_1 - m_1 \Omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 & c_2 \Omega_2 \\ 0 & 0 & -c_2 \Omega_2 & k_2 - m_2 \Omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$m_{02} = \frac{5}{4} \pi r \rho A, \quad k_{02} = 9EI \frac{\pi}{r^3}$$

式(5.9)を解いて $A_1 \sim A_4$, $B_1 \sim B_4$ を求めることにより定常解を得る。動吸振器と主系の質量比 μ は、次の式(5.10)、不均一性と主系の質量比 μ_I は式(5.11)で定義した。

$$\mu = \frac{m_1}{m_{02}} = \frac{m_2}{m_{02}} = 0.02 \quad (5.10)$$

$$\mu_I = \frac{m_{I1}}{m_{02}} = \frac{m_{I2}}{m_{02}} \quad (5.11)$$

また、2つの動吸振器の固有角振動数を $i=2$ のモードの固有角振動数 ω_{02} に一致させる。

5.1.2 1点の不均一性を考慮した場合

ここでは、主系の円周方向に1個の不均一性がある場合を考える。まず、不均一性が電動機の振動にどのような影響があるか調べるため、不均一性が1個 ($\alpha_1 = 0^\circ$) あり、動吸振器を設置していない場合の共振曲線を図 5.1 に示す。図(a)は $\mu_I = 0.05$ の場合、図(b)は $\mu_I = 0.1$ の場合の共振曲線である。ここ

に、以下の共振曲線の縦軸は第3章の式(3.11)、横軸も式(3.12)で示したように無次元化している。また、黒色の実線 (Without Imperfection) は不均一性が無い場合の A^2 の値を表し、得られた解から半径方向の変位 u として \cos モードのみ抽出したときの A^2 の値を青色の破線で、 \sin モードのみ抽出したときの A^2 の値を緑色の点線で表し、 \cos モードと \sin モードの和となる第3章の式(3.11)で計算したものを赤色の実線で表している。不均一性が $\alpha_1 = 0^\circ$ の角度にあることで $\theta = 0^\circ$ に振動の腹をもつ \cos モード成分の共振曲線のピークの振動数は低くなり、振動の節をもつ \sin モード成分の共振曲線は全く変わっていない。これより、不均一性はその位置が振動の節となるモードに対しては影響しないことがわかり、その位置が振動の腹となるモードに対しては共振曲線のピークの振動数は低下する効果があることがわかった。また、図(a)、図(b)を比較して、不均一性の質量が大きいほどピークの振動数を低くする効果は大きくなる。

ここで、不均一性があると共振点において振動モードが回転しないことを確認した。このことを数式から証明する。ここに、円周方向波数が i のモードの解のみ考え、

$$u = a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta, \quad a_i = A_1 \cos \Omega_s t + B_1 \sin \Omega_s t, \quad b_i = A_2 \cos \Omega_s t + B_2 \sin \Omega_s t \quad (5.12)$$

とおく。主系に $\alpha = 0^\circ$ の角度に不均一性がある場合の $\cos i\theta$, $\sin i\theta$ モードの振幅に関する連立方程式は主系に減衰がないものとする。次式となる。

$$\begin{bmatrix} k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 - m_{I1}\Omega_s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 - m_{I1}\Omega_s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0\pi \\ 0 \\ 0 \\ -F_0\pi \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

上式を解くと次式となる。

$$A_1 = \frac{F_0\pi}{k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 - m_{I1}\Omega_s^2}, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = -\frac{F_0\pi}{k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2} \quad (5.14)$$

$\Omega_s = \omega_{0i}$ ($s=i$) の共振点の場合を考えると、 $k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2 = 0$ となり式(5.14)に代入すると

$$A_1 = \frac{F_0\pi}{-m_{I1}\Omega_s^2}, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = -\infty \quad (5.15)$$

となる。これより、 A_1 は有限の値であり、 B_2 は無限大の値なのでモードが回転しているとは言えないことがわかった。

$\alpha = 0^\circ$ の角度に $\mu_l = 0.05$ の不均一性があり、さらに、動吸振器を 1 個設置したときの共振曲線を図 5.2 に示す。動吸振器を設置したときについても線種の定義は設置しないときの図 3.1 と同様であるが、図 5.1 の動吸振器を設置してしない場合の解である赤色の実線を比較のため黒色の実線 (Without D.A.) で示している。図(a)に $\theta = 0^\circ$ の位置に動吸振器を設置した場合、図(b)に $\theta = 45^\circ$ の位置に動吸振器を設置した場合の共振曲線を示している。図(a)では、動吸振器 1 個を $\theta_1 = 0^\circ$ の位置に設置しているために共振点で cos モードの振動を制振できているが、sin モードの振動の共振曲線は図 5.1 の動吸振器がないときと全く変わっておらず、sin モードを全く制振できていない。図(b)では、動吸振器 1 個を $\theta = 45^\circ$ の位置に設置しているために共振点で sin モードの振動を制振できているが、cos モードの振動の共振曲線は図 5.1 の動吸振器がないときと全く変わっておらず、cos モードを全く制振できていない。ただし、cos モードは不均一性により、cos モードの共振振動数は低くなったため、 $\nu = 1$ では振幅は約 1/3 程度に制振されていることがわかる。 $\theta_1 = 0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲で動吸振器の設置位置を変えて同様の計算を行ったものが図 5.3 である。横軸は不均一質量と動吸振器の設置位置の間隔 $\Delta\theta$ で、縦軸はその時の $\nu = 1$ における振幅である。不均一質量と動吸振器の設置位置の間隔が制振したい振動モードの腹と節の間隔 (ここでは $\Delta\theta = 45^\circ$) に近づくとつれて、図 5.2(b)のように $\nu = 1$ 付近のピークの振動数が低くなり、それにとまって $\nu = 1$ における振幅は小さくなる。これより、不均一質量と動吸振器を制振したい振動モードの腹と節の間隔で設置することによりある程度の制振ができることがわかった。例えば、既に電動機に 1 つの大きな不均一性がある場合や、電動機の外周に重りを 1 つ設置し不均一性をわざと再現する。このとき、前章までのように動吸振器を一对用いなくとも動吸振器を 1 つ追加することで、ある程度の制振効果が期待できる。また、 $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲について動吸振器の設置位置を数点変えて計算を行った結果、不均一性と動吸振器の設置位置が制振したい振動モードの腹と節の間隔に近づくとつれて $\nu = 1$ 付近のピークの振動数が低くなることにより、 $\nu = 1$ の振幅は小さくなる傾向にあることを確認している。

$\alpha = 0^\circ$ の位置に $\mu_l = 0.05$ の不均一性があり、さらに、動吸振器を 2 個設置したときの共振曲線を図 5.4 に示す。図(a)に一对の動吸振器の設置間隔が $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 22.5^\circ$ の場合、図(b)に一对の動吸振器の設置位置が $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$ の場合、図(c)に一对の動吸振器の設置位置が $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 67.5^\circ$ の場合、図(d)に一对の動吸振器の設置位置が $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 90^\circ$ の場合の共振曲線を示している。不均一性がない

場合である第3章の結果と同様に、一対の動吸振器を制振したいモードの腹と節の間隔で設置しなくても、いずれの主系の共振曲線においても $\Omega_2 = \omega_{02}$ の共振点では振幅が零となって制振できていることがわかる。これは動吸振器を2個設置することで共振点では \cos モードと \sin モードの両方を制振できるためである。共振点付近の制振領域の広さは、2つの動吸振器の設置間隔が振動モードの腹と節の間隔に近づくと広がっている。ここで、動吸振器の設置間隔が等しい図(a)と図(c)を比較すると、動吸振器を制振したい振動モードの腹と節の間隔以外で設置した場合、2個の動吸振器の設置間隔だけでなく不均一性の相対的角度によって応答は異なることがわかった。ただし、図(b)、図(d)を比較してわかるように、動吸振器の設置間隔が制振したい振動モードの腹と節の間隔であれば応答は等しいことがわかった。

ここで、共振点において不均一性のある場所が節となるような空間に固定されたモードを共振曲線から確認した。このことを数式から証明する。ここに、 i は制振対象モードの円周方向波数、 l は零、あるいは正の整数である。円周方向波数が i のモードの解のみ考え、主系の解は式(5.12)とおき、動吸振器の解は

$$x_1 = A_3 \cos \Omega_s t + B_3 \sin \Omega_s t, \quad x_2 = A_4 \cos \Omega_s t + B_4 \sin \Omega_s t \quad (5.16)$$

とおく。2つの動吸振器の開き角を $l\pi/2i$ とし、 $\theta_1 = \beta, \theta_2 = \beta + l\pi/2i$ とおくと (l は整数)、主系に $\alpha = 0^\circ$ の位置に不均一性がある場合、 $\cos i\theta, \sin i\theta$ モード、および動吸振器の振幅に関する連立方程式の解は以下のようになる。

$$A_1 = -\frac{DF_0\pi}{m_{11}D\Omega_s^2 - D_{0i}D - kD(\sin^2 i\beta + \cos^2 i\beta) + k^2(\sin^2 i\beta + \cos^2 i\beta)}, \quad B_1 = 0 \quad (5.17)$$

$$A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{DF_0\pi}{-D_{0i}D - kD(\sin^2 i\beta + \cos^2 i\beta) + k^2(\sin^2 i\beta + \cos^2 i\beta)} \quad (5.18)$$

ここに、

$$m = m_1 = m_2$$

$$k = k_1 = k_2$$

$$c_{0i} = 0$$

$$D_{0i} = k_{0i} - m_{0i}\Omega_s^2$$

$$D = k_1 - m_1\Omega_s^2$$

上式を簡約化すると、

$$A_1 = -\frac{DF_0\pi}{m_{11}D\Omega_s^2 - D_{0i}D - kD + k^2}, \quad B_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{DF_0\pi}{-D_{0i}D - kD + k^2} \quad (5.19)$$

となる。式(5.19)は動吸振器の設置位置 β による影響を受けないので、動吸振器の設置間隔が腹と節の間隔であれば制振効果は等しいことが証明された。

図 5.2, 図 5.4 は主系と不均一性の質量比 $\mu_i = 0.05$ の場合の共振曲線を示したが、図 5.5, 図 5.6 は主系と不均一性の質量比 $\mu_i = 0.1$ の場合の共振曲線を示す。主系と不均一性の質量比が変化しても、共振曲線の応答に変化はあるものの共振点付近における動吸振器の制振効果の傾向は変わらないことがわかる。さらに、図 5.5(a)に示すように、不均一性の質量が大きい方が動吸振器 1 個でも制振効果が高まることわかった。ただし、実際の電動機ではそれほど不均一性が大きくないと考えられ、また、重り等で不均一性を実現するとしても重りの質量はそれほど大きくできない。よって、完全に制振したい場合は、動吸振器を 2 個設置することが望ましい。

5.1.3 2 個の不均一性を考慮した場合

ここでは、主系の円周方向の 2 か所に不均一性がある場合を考える。まず、これら 2 個の不均一性が電動機の振動にどのような影響があるか調べるため、不均一性が 2 個あり、動吸振器を設置していない場合の共振曲線を図 5.7 に示す。図(a)は不均一性の位置 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$) で質量比 $\mu_i = 0.025$ の場合、図(b)は不均一性の位置 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$) で質量比 $\mu_i = 0.025$ の場合、図(c)は不均一性の位置 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$) で質量比 $\mu_i = 0.05$ の場合、図(d)は不均一性の位置 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$) で質量比 $\mu_i = 0.05$ の場合における共振曲線を示す。また、黒色の実線 (Without Imperfection) は不均一性が無い場合の A^2 の値を表し、得られた解から半径方向の変位 u として \cos モードのみ抽出したときの A^2 の値を青色の破線で、 \sin モードのみ抽出したときの A^2 の値を緑色の点線で表し、 \cos モードと \sin モードの和となる第 3 章の式(3.11)のままに計算したものを赤色の実線で表している。図(b)と図(d)の結果から、2 個の不均一質量の位置が制振したい振動モードの腹と節の間隔のとき、 \cos モードと \sin モードの応答振幅は同じ値となるので振動モードは空間に固定されず回転する。共振曲線のピークの振動数が低くなるが、ピークの値はやや大きくなっている。しかしながら、不均一質量がない時の元々の共振点である $\nu = 1$ における振幅は、不均一質量が大きいほど小さくなっている。これに対して、図(a)と図(c)の結果から、2 個の不均一質量の位

置が制振したい振動モードの腹と節の間隔以外のとき、 \cos モード成分と \sin モード成分の大きさが異なることがわかる。このとき、振動モードは完全な形では回転しない。また、共振ピークの値は不均一質量の位置が制振したい振動モードの腹と節の間隔の図(b), (d)の場合よりも小さいが、 $\nu = 1$ における振幅は、図(d)の場合ほど小さくないことがわかる。そこで、不均一質量による共振の制振の可能性を調べるために、2つの不均一質量の開き角と $\nu = 1$, すなわち元の共振点における振幅の関係を示したものが図 5.8 である。図(a)は2個の不均一質量の質量比がいずれも $\mu_i = 0.025$ の場合、図(b)は2個の不均一質量の質量比がいずれも $\mu_i = 0.05$ の場合である。図(b)から2個の不均一質量の質量比が $\mu_i = 0.05$ で、それらの開き角が振動モードの腹と節の間隔に近いほど、共振振幅をある程度低減できることがわかる。

$\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 22.5^\circ$ の位置に不均一性があり、 $\mu_i = 0.025$ の場合に動吸振器を1個設置したときの共振曲線を図 5.9 に示す。動吸振器を設置したときについても線種の定義は設置しないときの図 5.7 と同様であるが、図 5.7 の動吸振器を設置してしない場合の解である赤色の実線を比較のため黒色の実線 (Without D.A.) で示している。図(a)に $\theta = 0^\circ$ の角度に動吸振器を設置した場合、図(b)に $\theta = 45^\circ$ の角度に動吸振器を設置した場合の共振曲線を示している。図(a)では、 \cos モードの振動は動吸振器1個を $\theta_1 = 0^\circ$ の位置に設置しているために共振点で制振できているが、 \sin モードの振動の共振曲線は図 5.1 の動吸振器がないときと全く変わっておらず、 \sin モードを全く制振できていない。図(b)では、 \sin モードの振動は動吸振器1個を $\theta = 45^\circ$ の位置に設置しているために共振点で制振できているが、 \cos モードの振動の共振曲線は図 5.1 の動吸振器がないときと全く変わっておらず、 \cos モードを全く制振できていない。ただし、 \cos モードは不均一性により、 \cos モードの共振点の振動数が低くなっているため、 $\nu = 1$ では振幅は約 2/5 程度に制振されていることがわかる。しかし、不均一性の総質量が等しい図 5.2 の不均一性が1つの場合と比較すると制振効果は小さくなっている。これは、不均一性が制振したい振動モードの腹と腹の間隔以外に分布して作用しているために不均一性の質量による効果が薄れたためである。また、 $\theta = 0^\circ \sim 45^\circ$ の範囲について動吸振器の設置位置を数点変えて計算を行い、不均一性の設置位置と動吸振器の設置位置が制振したい振動モードの腹と節の間隔に近づくにつれて $\nu = 1$ 付近のピークの振動数が低減されることにより、 $\nu = 1$ の振幅は小さくなる傾向にあることを確認している。

$\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 22.5^\circ$ の位置に $\mu_i = 0.025$ の不均一性があり、動吸振器を2個設置したときの共振曲線を図 5.10 に示す。図(a)に一对の動吸振器の設置間隔が $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 22.5^\circ$ の場合、図(b)に一对の動吸振器の設置間隔が $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$ の場合、図(c)に一对の動吸振器の設置間隔が $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 67.5^\circ$ の

場合、図(d)に一对の動吸振器の設置間隔が $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ の場合の共振曲線を示している。不均一性がない場合である第3章の結果と前節の結果同様に一对の動吸振器を制振したいモードの腹と節の間隔で設置しなくても、いずれの主系の共振曲線においても $\Omega_2 = \omega_{02}$ の共振点では振幅が零となって制振できていることがわかる。共振点付近の制振領域の広さは振動モードの腹と節の間隔に近づくときと広がっている。ここで、動吸振器の設置間隔が等しい図(a)と図(c)を比較すると、2個の不均一性の位置が制振したい振動モードの腹と節の間隔以外の場合に、動吸振器を制振したい振動モードの腹と節の間隔以外で設置した計算結果から、2個の動吸振器の設置間隔だけでなく不均一性の相対的角度によって応答が異なることがわかった。

図 5.9, 図 5.10 は主系と不均一性の位置 $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$ の場合の共振曲線を示したが、図 5.11, 図 5.12 は主系と不均一性の位置 $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$ の場合の共振曲線を示す。図 5.11 の結果から、2個の不均一性の位置が振動モードの腹と節の間隔であるため、動吸振器1個をどの位置に設置しても制振効果は同じことがわかった。しかし、図 5.11(b)を図 5.9(b)と比較すると制振効果は小さくなっている。これは、 α_2 に位置する不均一性が、前者では sin モードのみに作用し、後者では cos モードと sin モードに作用するためである。電動機に不均一性を2個設置し、併せて動吸振器1個を用いて制振する場合、不均一性は電動機の円周方向に制振したい振動モードの腹と腹の間隔に分布して与えることが望ましい。そのとき、動吸振器と不均一性の位置は振動モードの腹と節の間隔にすると制振効果がもっとも高い。図 5.12 の不均一性の位置が振動モードの腹と節の間隔の場合の結果から、図 5.10 の不均一性の位置が振動モードの腹と節の間隔でない場合の結果と異なり、動吸振器の設置間隔が等しければ、それらの位置が固定子円周上のどの位置であれ、共振曲線の応答は等しいことがわかった。

図 5.9, 図 5.10 は主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.025$ の場合の共振曲線を示したが、図 5.13, 図 5.14 は主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.05$ の場合の共振曲線を示す。また、図 5.11, 図 5.12 は主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.025$ の場合の共振曲線を示したが、図 5.15, 図 5.16 は主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.05$ の場合の共振曲線を示す。主系と不均一性の質量比が変化しても、共振曲線の応答に変化はあるものの共振点付近における動吸振器の制振効果の傾向は変わらないことがわかった。2個の不均一性を考慮した場合の計算結果から、電動機に不均一性が複数箇所あったとしても、動吸振器を2個設置することで完全に制振できると言える。

5.2 有限要素解析

本節では、有限要素解析ソフト Marc を使用して、電動機の共振問題において不均一性の影響を調べるとともに、そのときの動吸振器による制振効果を検証する。本解析では、固有モード解析と過渡応答解析の2つの解析方法でその応答を考察する。

5.2.1 解析モデル

三相誘導電動機を想定した仮想的な固定子鉄心を解析対象とする。3.2節と同様に電磁力の振動モード $s=2$ の外力を考え、その外力のモードの腹と腹の間隔になるようにモデルは3.2節で示したモデルに $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ の角度に重りを分布させ配置し、それを不均一性として再現した。理論解析では1点に不均一性を作用させていたが、点で作用させることは現実的ではないのでここでは不均一性を4ヶ所に分けて配置している。不均一性の重りと主系との質量比 μ は次式で定義した。また、式(5.21)に主系である円環の質量を定義している。

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_{M.S.}} \quad (5.20)$$

$$m_{M.S.} = \left\{ \left(\frac{d_o}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_i}{2} \right)^2 \right\} \pi \times b \times \rho \quad (5.21)$$

ここで、

m_i	: 不均一性の質量	$m_{M.S.}$: 円環の質量
d_o	: 円環の外径	d_i	: 円環の内径
b	: 円環の厚さ	ρ	: 円環の密度

図 5.17 に有限要素解析モデルを示す。図(a)に不均一性の総質量が主系の質量の5%の場合、図(b)に不均一性の総質量が主系の質量の10%の場合を示している。図(a)のモデルでは要素数 224、節点数 824、図(b)のモデルでは要素数 232、節点数 856 である。

動吸振器と主系の質量比 μ は 3.2 節と同様に次式とした。

$$\mu = \frac{m_{D.A.}}{m_{M.S.}} = 0.02 \quad (5.22)$$

動吸振器の剛性はその固有振動数が主系のそれと同じになるように調節し、円環を構成する各要素は四角形 8 節点要素とし、境界条件はフリーとした。動吸振器は簡単のためマス、バネ型としてモデル化した。

ここに、固定子に作用する電磁力と主系の減衰については、3.2.2 節と 3.2.3 節に示している。

5.2.2 モード解析

図 5.18 に固有モード解析結果を示す。それぞれのモード図は Marc の Auto Scale 機能を用いて、変形を目視で確認できる適度なスケールにした。また、各図の要素の色は青→赤→黄の順にその要素の変位の絶対値が大きくなり、黄色が最も変位が大きいことを示している。また、各図では元の固定子の形状をピンク色の実線で示している。

図 5.18(a), (b)に、動吸振器を設置していない場合の不均一性と主系の質量比 $\mu=0.05$ における $i=2$ の固有モードと固有振動数を示し、図(c), (d)に動吸振器を設置していない場合の不均一性と主系の質量比 $\mu=0.1$ における $i=2$ の固有モードと固有振動数を示す。不均一性のある位置が腹となる cos モードは不均一性の影響を受けて、不均一性のある点が節となる sin モードよりも固有振動数が低くなっている。また、不均一性のない場合の固有振動数は 3.4 節から 765.6Hz であり、不均一性のある点が節となって不均一性の影響をほぼ受けない sin モードの固有振動数と比較すると、後者のほうが少しだけ低い結果となった。これは、理論解析では不均一性を点で作用させていたが、有限要素解析では円周方向に分布させているため、不均一性のある点が節となる sin モードに関しても不均一性の影響が少しあったためである。不均一性の質量が大きくなると cos モードの固有振動数が低減することがわかり、この傾向は理論解析と定性的に一致した。

5.2.3 過渡応答解析

本節では、応答シミュレーションを行い、実際の固定子は複数の振動モードを含んでおり、それが動吸振器の制振効果に及ぼす影響を調べる。

図 5.19 から図 5.25 に不均一性がない場合の共振点 ($f=765.6\text{Hz}$) における応答シミュレーションを示す。ここで、0~0.2 秒間の約 153 周期分の応答を見る。刻み幅は電磁力の一周期を約 256 等分した。図

(a)～(i)は任意の初期状態から十分時間が経過し定常状態となったときの一周期間の振動状態について、その 1/8 周期毎のモード形状や動吸振器の位置を示している。各図の要素の色は図(j)に示すように青→赤→黄の順にその要素の変位振幅の絶対値が大きくなり、黄色が最も変位振幅が大きいことを示している。なお、図(j)に各色が切り替わるときの変位振幅の値を示しているが、これらは FEM モデルの応答シミュレーションで得られた動的変位を不均一性がない場合の静的荷重が与えられたときの静的変位で除した無次元の値である。また、振動モード形状を目視で確認できる適度なスケールにし、図 5.19 から図 5.25 のスケール倍率は統一している。各図では元の固定子の形状をピンク色の実線で示している。

図 5.19 に不均一性がなく動吸振器を設置していない場合の応答シミュレーションを示す。4 節を有する振動モード $s=2$ の外力が時間の経過によって時計回りに回転しているために図 5.19 で示すように振動モードも回転する。モードが回転しているため固定子の円周方向全てが振動の腹や節となり、平均振幅は場所によらず一様となる。

図 5.20 に $\alpha=l\pi/2$ ($l=0,1,2,3$) の角度に不均一性としての重りを設置した場合 ($\mu_l = 0.05$) の応答シミュレーションを示す。時計回りに回転していたモードが不均一性のある位置で節となるようなやや空間に固定されたモードとなった。これは \cos モードの固有振動数が低下するとともに、元の共振点（固有振動数）における振幅が低減したためである。理論解析と同様の結果が得られたが、制振されているとは言い難い。

図 5.21 に $\alpha=l\pi/2$ ($l=0,1,2,3$) の角度に不均一性としての重りを設置し、動吸振器を $\theta=45^\circ$ に設置した場合 ($\mu_l = 0.05$) の応答シミュレーションを示す。 $\theta=45^\circ$ の位置に動吸振器を設置することで、 \sin モードが完全に制振されている。一方、 \cos モードは少し振動しているが、図 5.18 の場合と比較して全体的に青系色となり、ある程度制振できていることがわかる。

図 5.20, 図 5.21 では主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.05$ の場合の共振曲線を示したが、図 5.22, 図 5.23 は主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.1$ の場合の応答シミュレーションを示す。主系と不均一性の質量比が変化しても、変位の値に差はあるものの制振の傾向は変わらないことがわかる。主系と不均一性の質量比 $\mu_l = 0.1$ の場合、全体的に変位が小さくなり青系色の割合が大きくなっている。

図 5.24 に $\alpha=l\pi/2$ ($l=0,1,2,3$) の角度に不均一性としての重りを設置し、動吸振器を $\theta_1=30^\circ$, $\theta_2=345^\circ$ の 45° 間隔で 2 カ所に設置した場合 ($\mu_l = 0.1$) の応答シミュレーションを示す。動吸振器を 2 個設置

することにより、ほぼ振動変位が零となり、完全に制振できていることがわかる。また、図 5.25 に $\alpha=l\pi/2$ ($l=0,1,2,3$) の角度に不均一性としての重りを設置し、動吸振器を $\theta_1=15^\circ$, $\theta_2=345^\circ$ の 30° 間隔で 2 か所に設置した場合 ($\mu_l=0.1$) の応答シミュレーションを示す。制振したい振動モードの腹と節の間隔以外でも、動吸振器を 2 個設置することにより、ほぼ振動変位が零となり、完全に制振できていることがわかる。図 5.24 と図 5.25 を比較すると、制振したい振動モードの腹と節の間隔に動吸振器を 2 個設置した図 5.24 の方が、動吸振器の変位がやや小さいことがわかる。

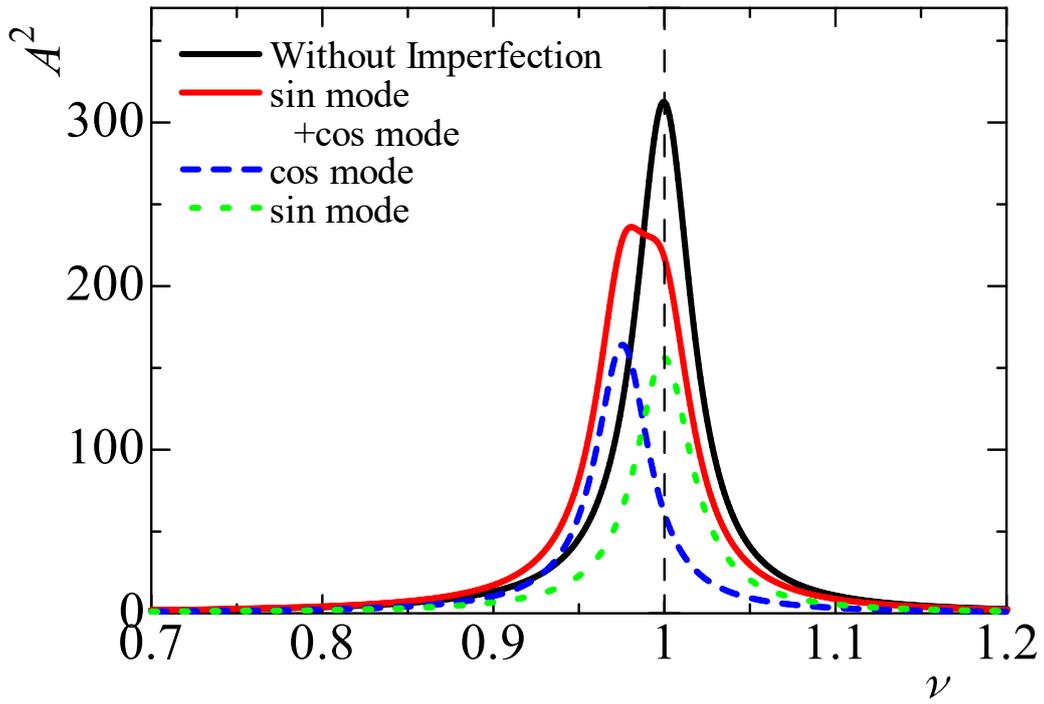
これより、電動機が不均一性を持っていたとしても、振動モードの腹と腹の間隔以外に 2 か所設置することで完全に制振できることがわかった。さらに、図 5.23 と図 5.24 を比較してもわかるように不均一性を制振に利用する場合、不均一性と動吸振器をそれぞれ 1 個、振動モードの腹と節の間隔に設置することで、大きな制振効果が期待できることがわかる。ただし、不均一性の質量はある程度の大きさは必要となる。このように理論解析と同様の結果を数値シミュレーションにより証明することが出来た。

5.2.4 円環理論と有限要素法による固有振動数解析の比較

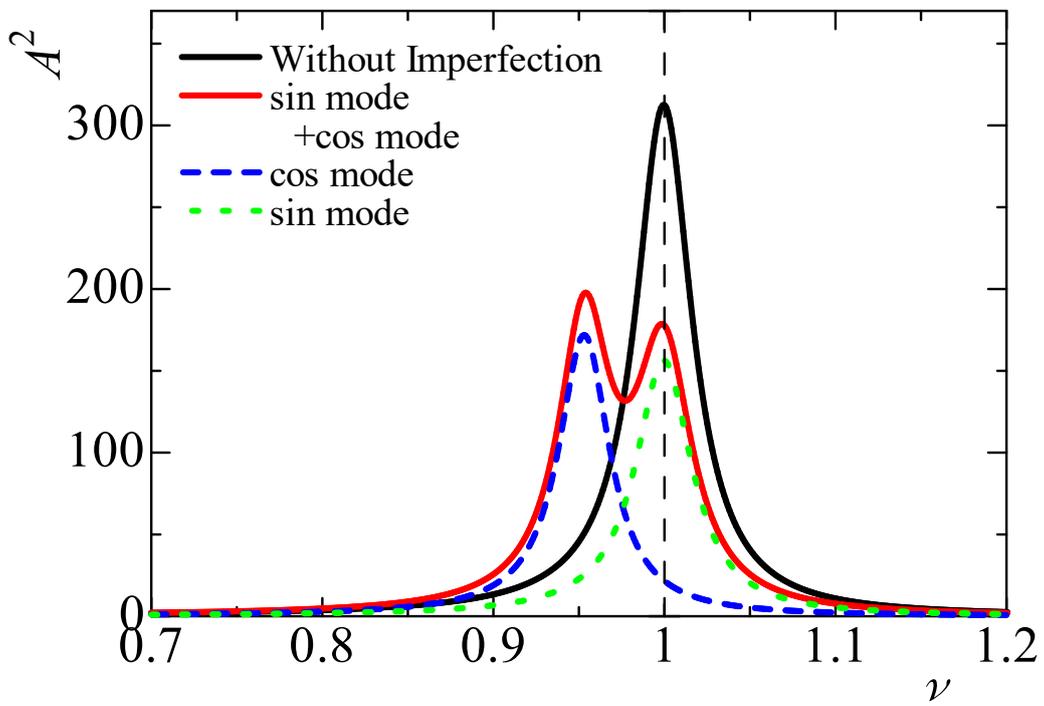
5.1 節の理論解析において「不均一質量はそれほど大きくなく、単に慣性力として作用する」と仮定して得た式(5.1)と(5.2)の近似の精度を確認するために、この円環理論と FEM による結果を比較検討する。すなわち、5.1 節の円環理論において円環の外周上に動吸振器はなく、不均一質量のみが存在する場合を考え、不均一質量があるときの式(5.1)、(5.2)から求まる固有振動数と有限要素法から求まる固有振動数を比較することで式(5.1)と(5.2)の近似の精度を調べる。

四角形 8 節点要素を用い、固定子本体は半径方向は 3 分割とし、円周方向は 144 分割、288 分割、576 分割の 3 種類を対象とする。不均一質量については、固定子の質量の 2.5%の質量とし、その形状として、円周方向の長さが異なる A, B, C, 3 つのタイプを考える。固定子の分割数に応じて 8, 16, 32 要素に分割する。タイプ A は不均一質量が外周方向に最も広く約 $\pi/12\text{rad}$ 分布している形状、タイプ B は不均一質量の円周方向分布長さが約 $\pi/18\text{rad}$ と中程度であり、タイプ C は不均一質量の円周方向分布長さが約 $\pi/24\text{rad}$ と最も短い形状である。図 5.26 の下段に固定子の円周方向を 576 分割したときの有限要素モデルを示す。不均一質量がないときの $n=2$ のモードの固有振動数は cos モード, sin モードともに 765.6Hz である。図 5.26 の上段に不均一質量があるときの cos モードの形状とその固有振動数を示し、中段に sin

モードの形状とその固有振動数を示している。図 5.26 から不均一質量の位置が腹となる \cos モードの固有振動数は 5Hz~9Hz 程度減少し、 \sin モードの固有振動数は 3Hz 程度減少していることがわかる。図 5.27 に A, B, C 各タイプの固有振動数の減少率を示す。図(a), (b)はそれぞれ \cos モードと \sin モードの場合である。各図の縦軸は固有振動数の減少率 (%) であり、横軸は不均一質量のタイプを表している。図の黒、橙、緑の各丸印はそれぞれ円周方向の分割数 144, 288, 576 の場合と対応している。一方、図の赤い点線は円環理論による式(5.1), (5.2)から求めた固有振動数の減少率である。有限要素解析から求めた減少率は円周方向の分割数が 576 のときにほぼ収束していると考えられる。図 5.27 から、分割数が 576 のとき有限要素解析から求めた固有振動数の減少率は、 \cos モードの場合、不均一質量と円環の円周方向接触長さの最も短いタイプ C の場合に円環理論による減少率とほぼ一致していることがわかる。一方、 \sin モードの場合、いずれのタイプも有限要素モデルの方が約 0.4%と固有振動数がわずかに低くなっている。これは振動の節に不均一質量がある場合でもわずかに固有振動数が減少することを意味する。以上から、不均一質量が円環の外周方向に $\pi/24\text{rad}$ 程度の長さ以下で分布しているのならば、不均一質量の $i=2$ のモードへの影響は小さく、単に慣性力として作用するとする近似的な取り扱いの誤差は小さいと考えられる。なお、不均一質量の質量が固定子の 10%と大きい場合、式(5.1), (5.2)による固有振動数の減少率と有限要素解析（不均一質量の形状は Type C と同様）による減少率は、 \cos モードではそれぞれ 4.6%と 4.1%であり、 \sin モードでは 0%と 0.6%であった。このとき、近似的な取り扱いによる数値計算結果の誤差はやや大きくなると思われる。なお、式(5.1), (5.2)から求めた固有振動数の減少率と有限要素解析による減少率について、図 5.27 で示した不均一質量が 1 個の場合と同様に、図 5.7(c), (d)のパラメータである不均一質量が 2 個でそれぞれの質量比が $\mu_i = 0.05$ の場合を調べた結果、2 個の不均一質量の開き角 $\Delta\alpha$ が 0° の場合が両者の差が最大であり開き角 $\Delta\alpha$ が腹と節の間隔である 45° に近づくほど両者の差は減少し、開き角 $\Delta\alpha$ が腹と節の間隔である 45° のときは両者はほぼ一致することを確認しているので、式(5.1), (5.2)から求めた図 5.7 の数値計算結果の近似精度はある程度高いものと考えられる。

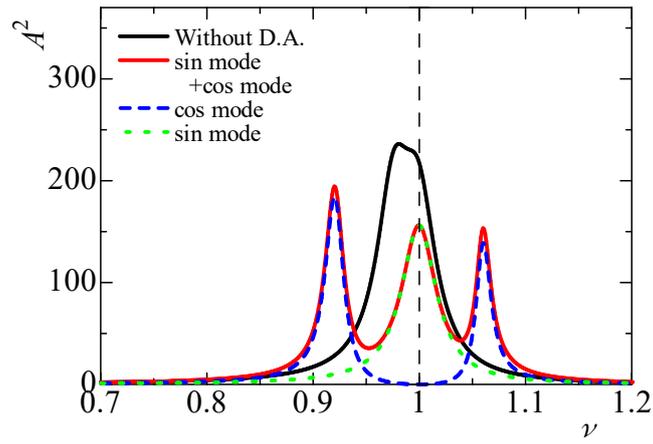


(a) $\mu_l = 0.05$

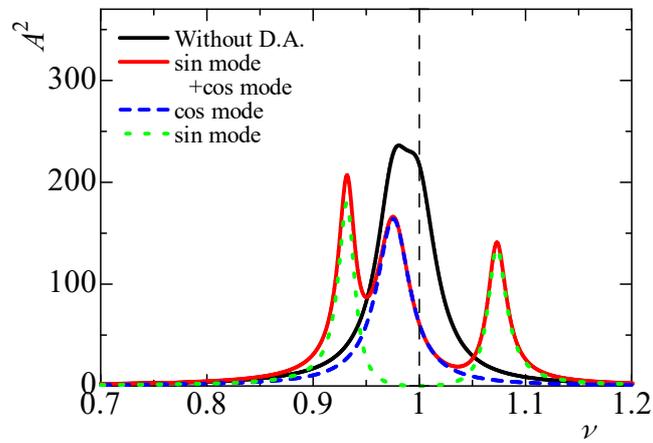


(b) $\mu_l = 0.1$

図 5.1 不均一性が 1 個あり動吸振器を設置していない場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$)



(a) $\theta_1 = 0^\circ$



(b) $\theta_1 = 45^\circ$

図 5.2 不均一性と動吸振器を各 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\mu_l = 0.05$)

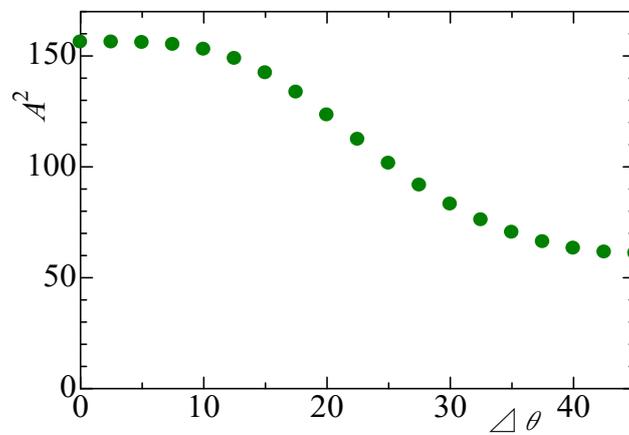
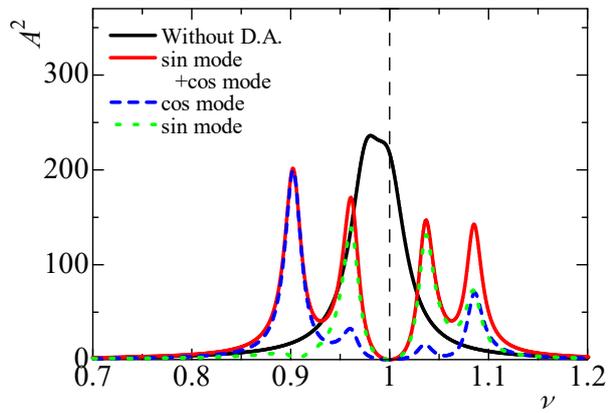
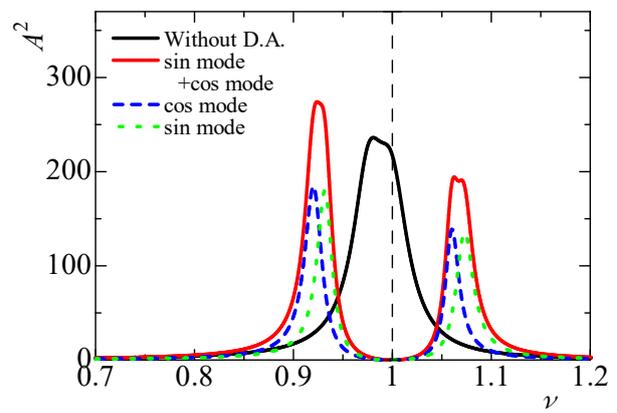


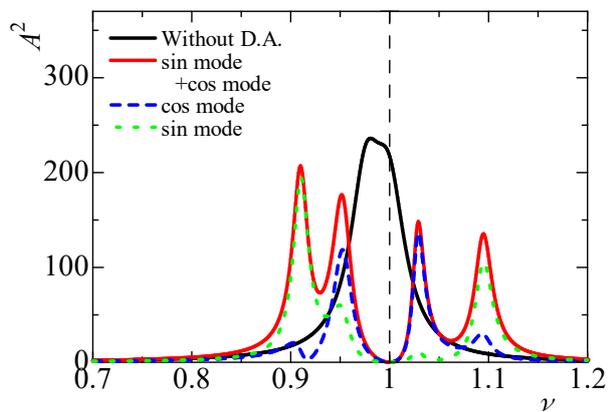
図 5.3 不均一質量と動吸振器の設置間隔と $\nu=1$ における振幅との関係



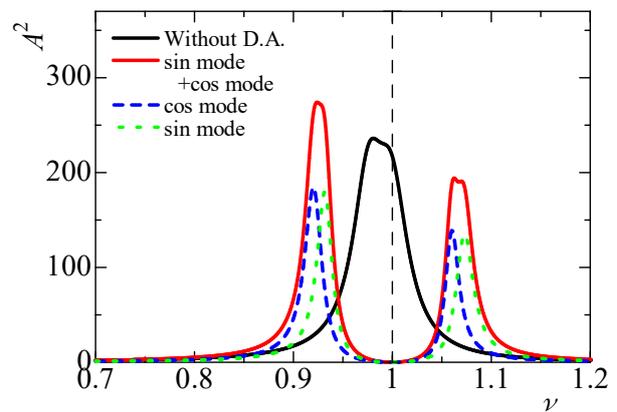
(a) $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 22.5^\circ$



(b) $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$

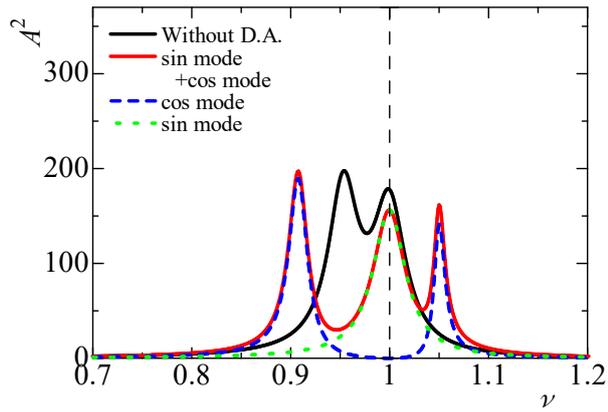


(c) $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 67.5^\circ$

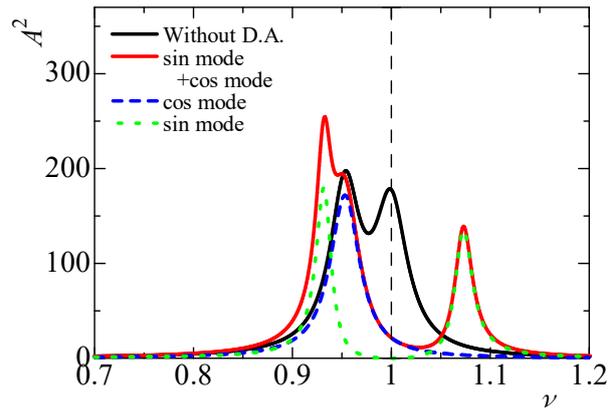


(d) $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 90^\circ$

図 5.4 不均一性が 1 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ, \mu_1 = 0.05$)

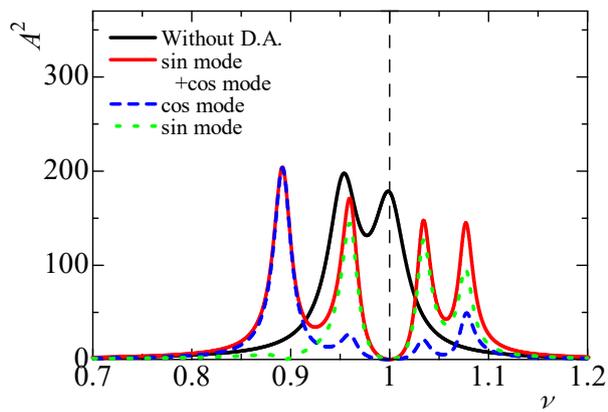


(a) $\theta_1 = 0^\circ$

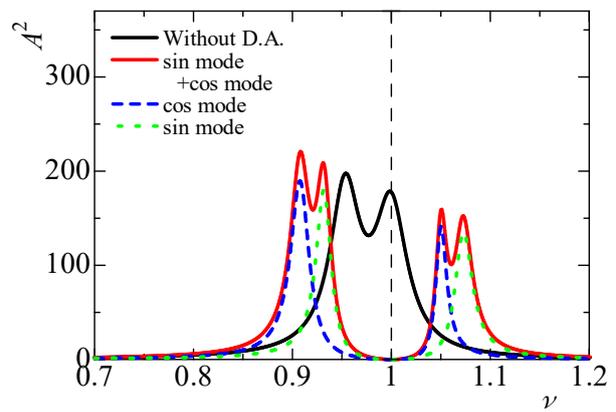


(b) $\theta_1 = 45^\circ$

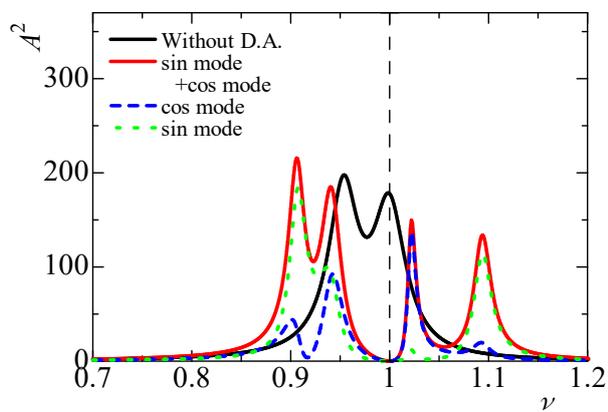
図 5.5 不均一性と動吸振器を各 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\mu_l = 0.1$)



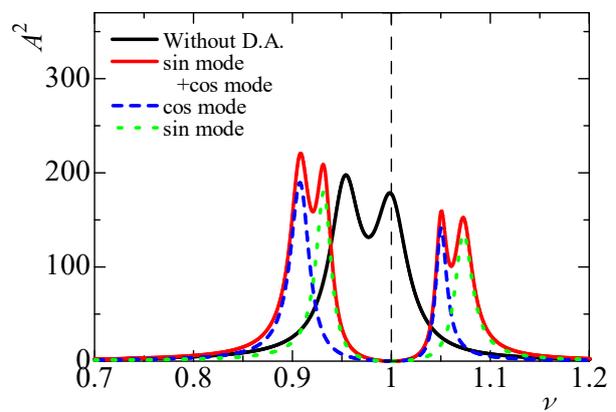
(a) $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 22.5^\circ$



(b) $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$

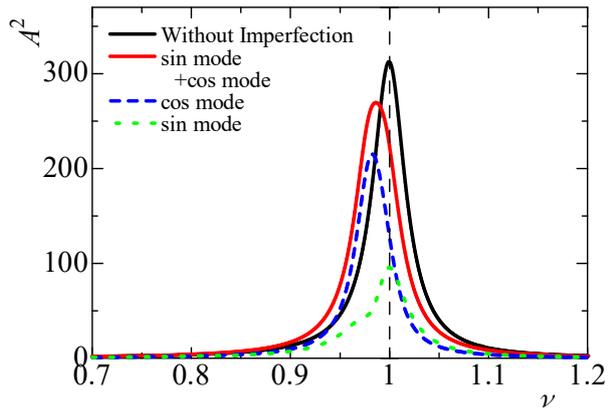


(c) $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 67.5^\circ$

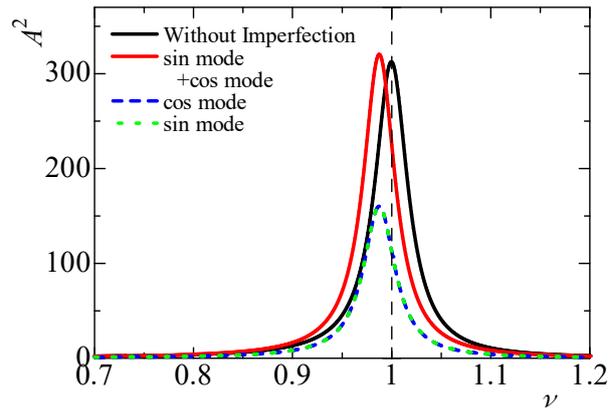


(d) $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$

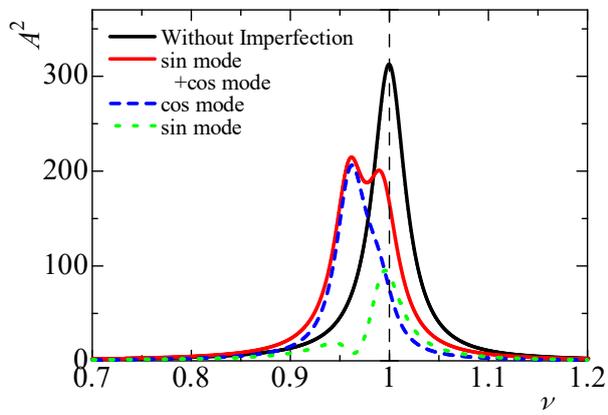
図 5.6 不均一性が 1 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\mu_l = 0.1$)



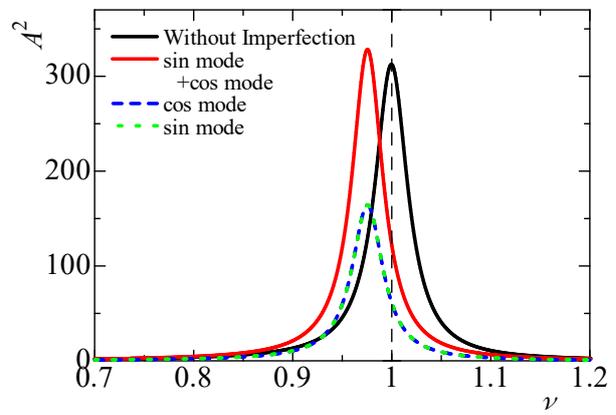
(a) $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 22.5^\circ$ ($\mu_l = 0.025$)



(b) $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ ($\mu_l = 0.025$)

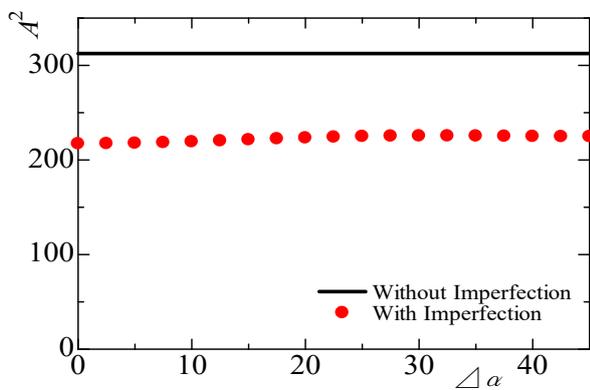


(c) $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 22.5^\circ$ ($\mu_l = 0.05$)

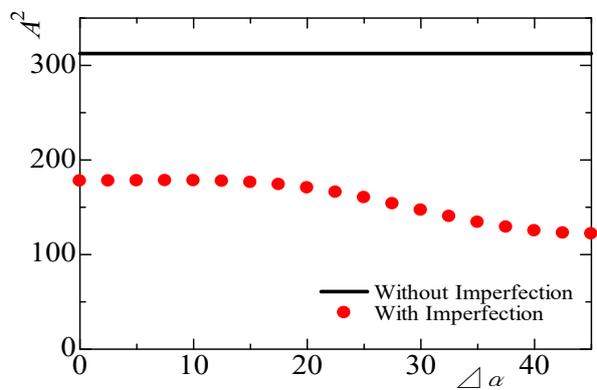


(d) $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 45^\circ$ ($\mu_l = 0.05$)

図 5.7 不均一性が 2 個あり動吸振器を設置していない場合の共振曲線



(a) $\mu_l = 0.025$



(b) $\mu_l = 0.05$

図 5.8 不均一質量の設置間隔と $\nu=1$ における振幅との関係

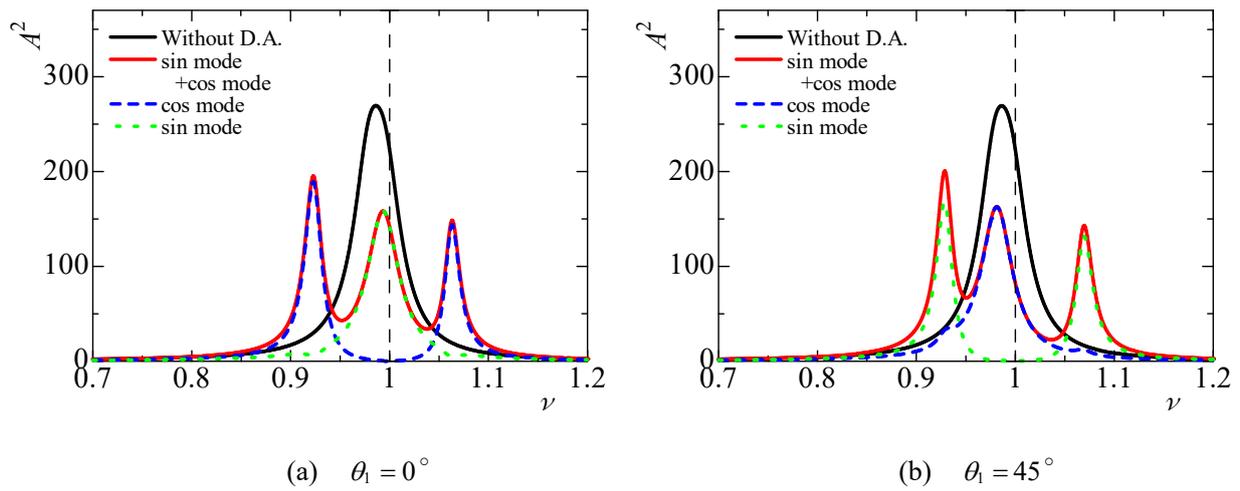


図 5.9 不均一性が 2 個あり動吸振器を 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$, $\mu_1 = 0.025$)

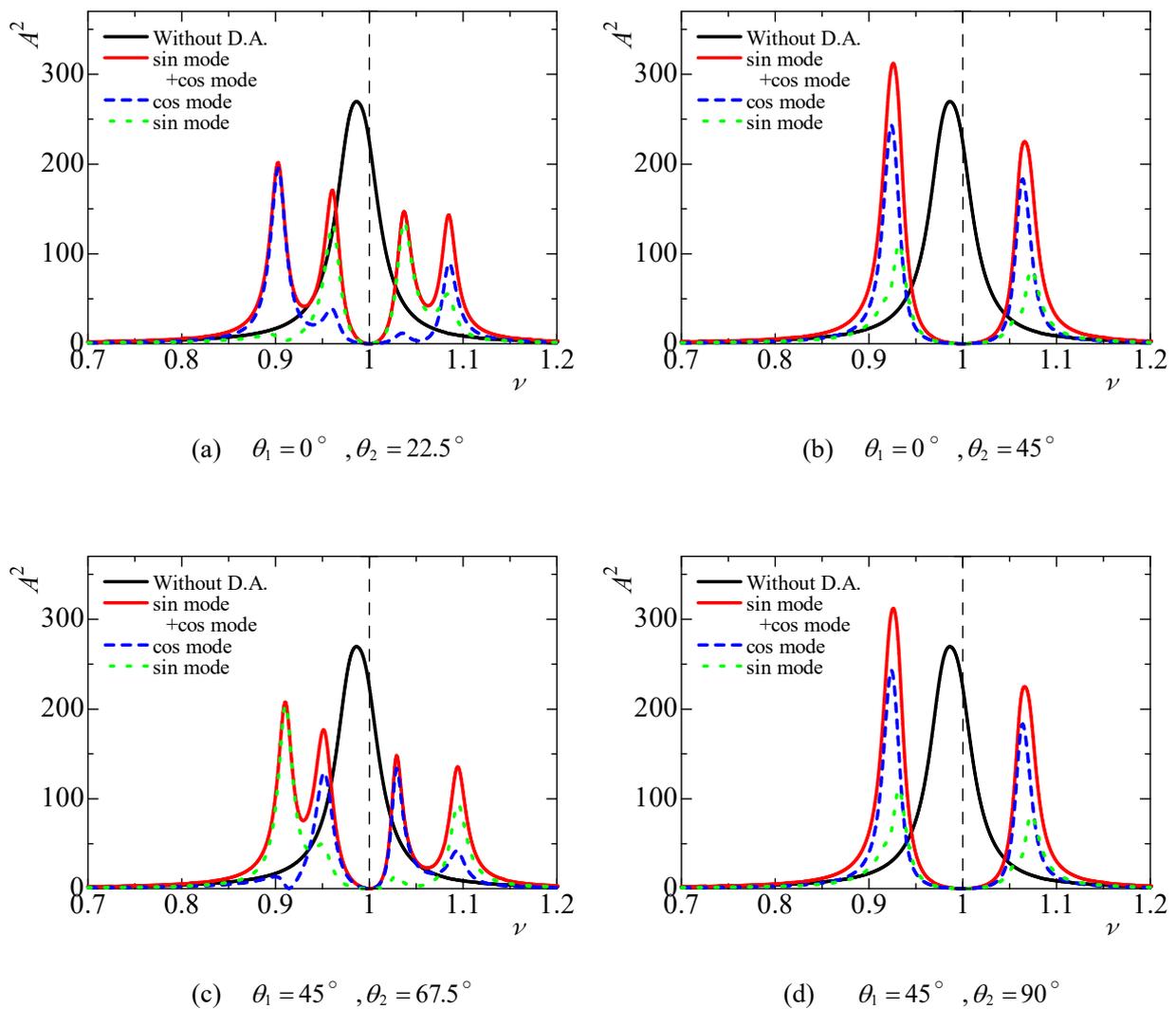


図 5.10 不均一性が 2 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$, $\mu_1 = 0.025$)

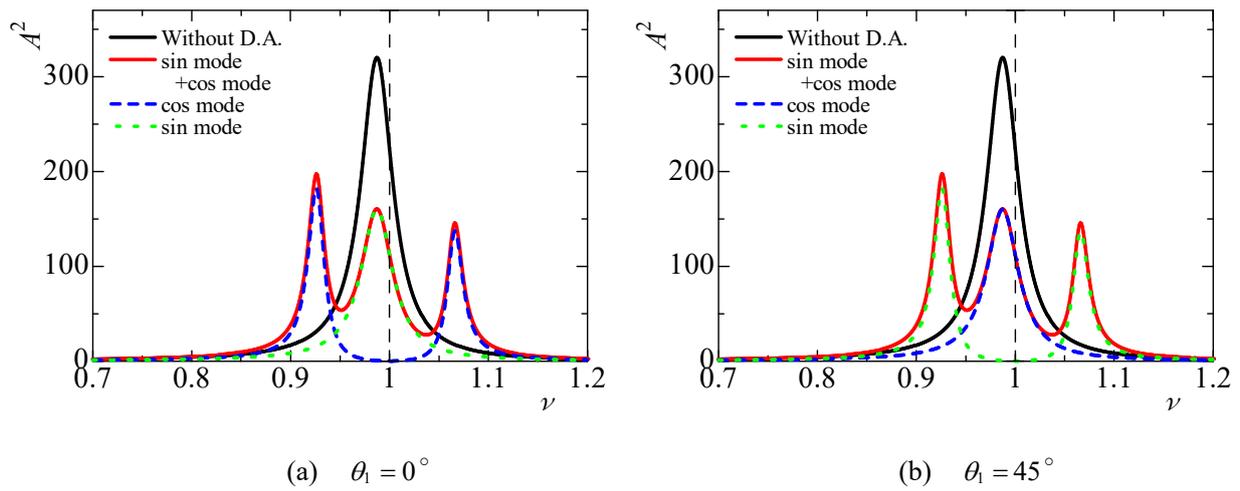


図 5.11 不均一性が 2 個あり動吸振器 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\mu_1 = 0.025$)

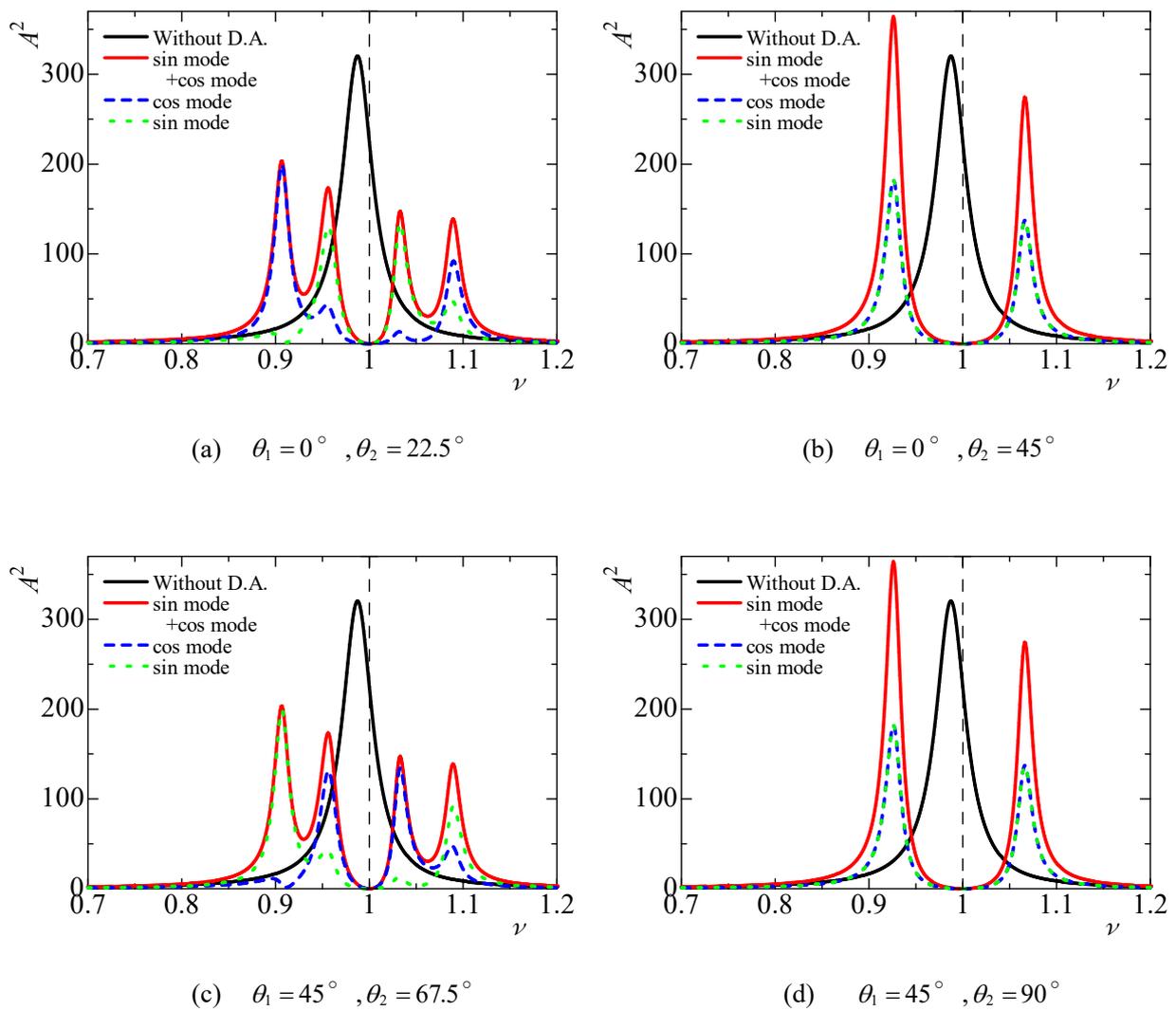


図 5.12 不均一性が 2 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\mu_1 = 0.025$)

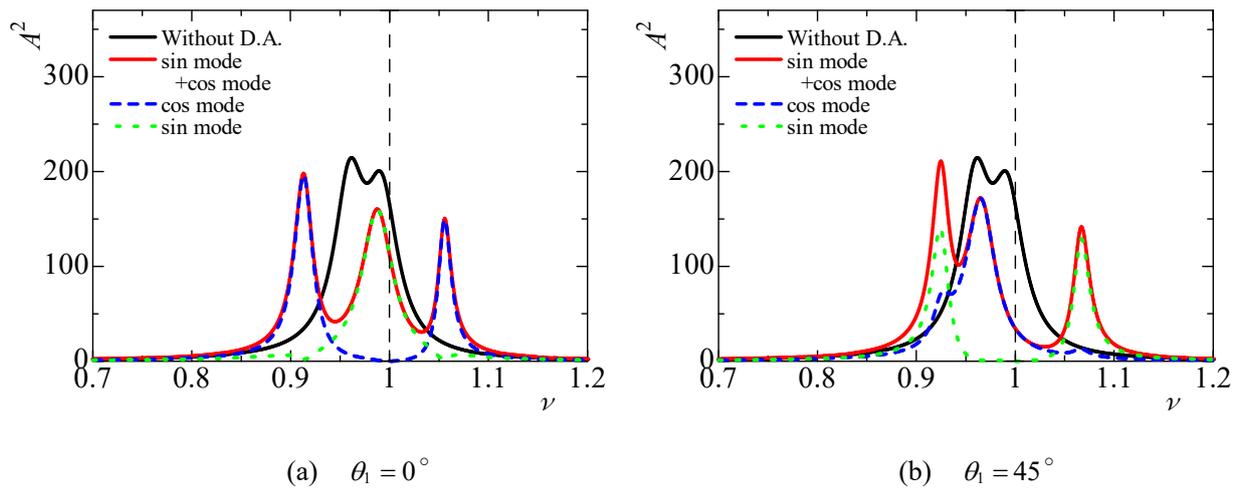


図 5.13 不均一性が 2 個あり動吸振器 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$, $\mu_1 = 0.05$)

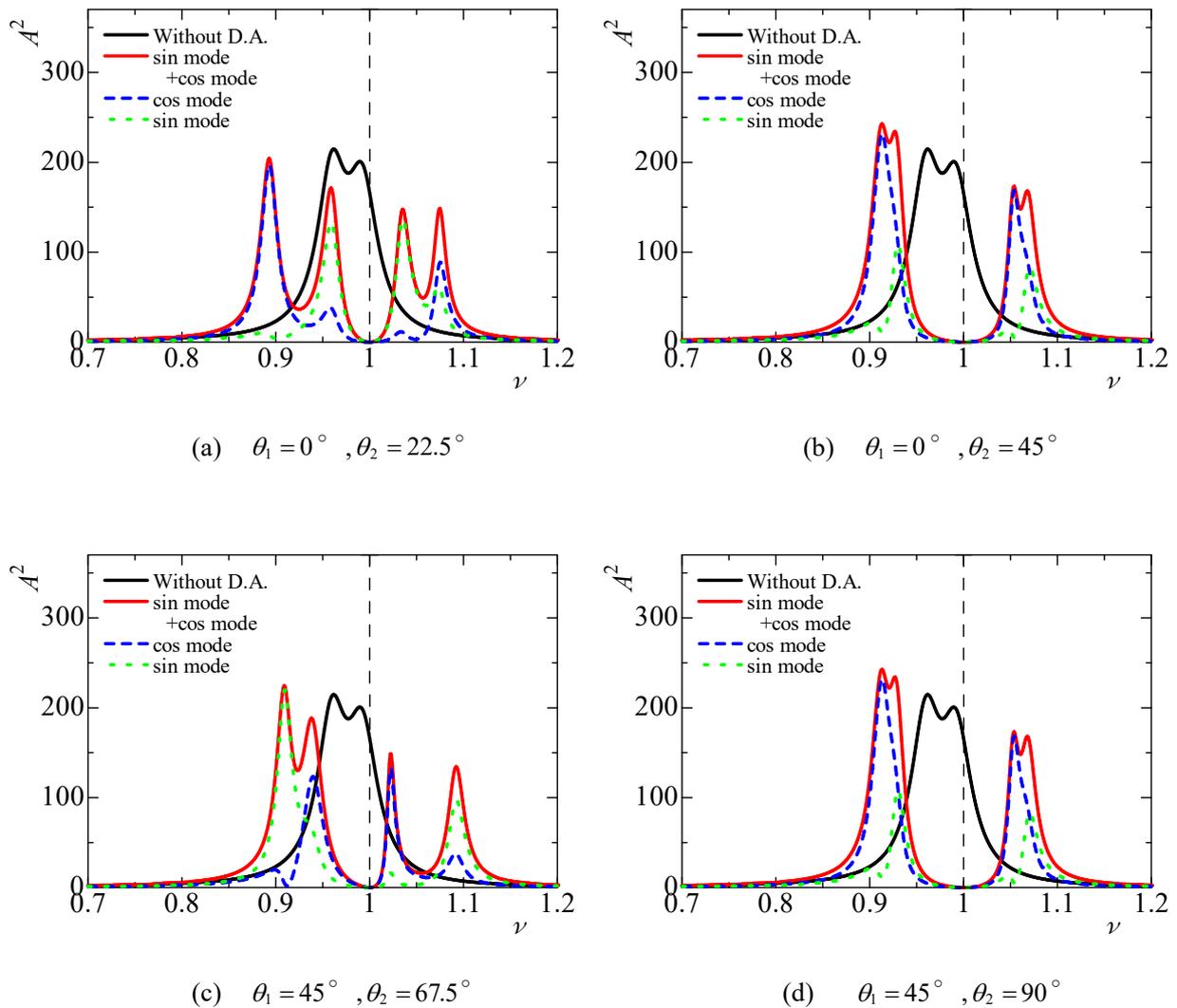


図 5.14 不均一性が 2 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 22.5^\circ$, $\mu_1 = 0.05$)

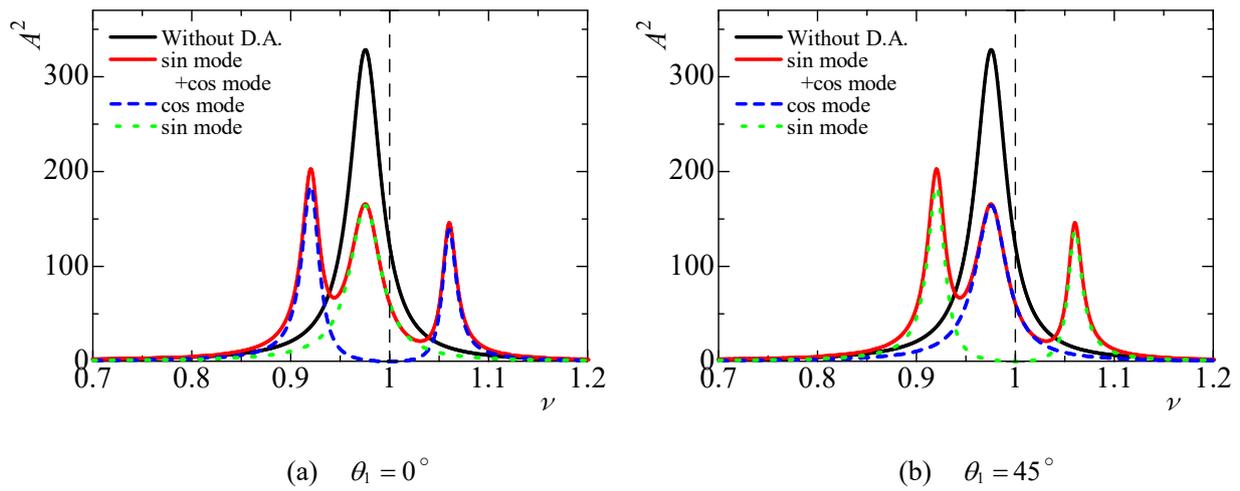


図 5.15 不均一性が 2 個あり動吸振器 1 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\mu_l = 0.05$)

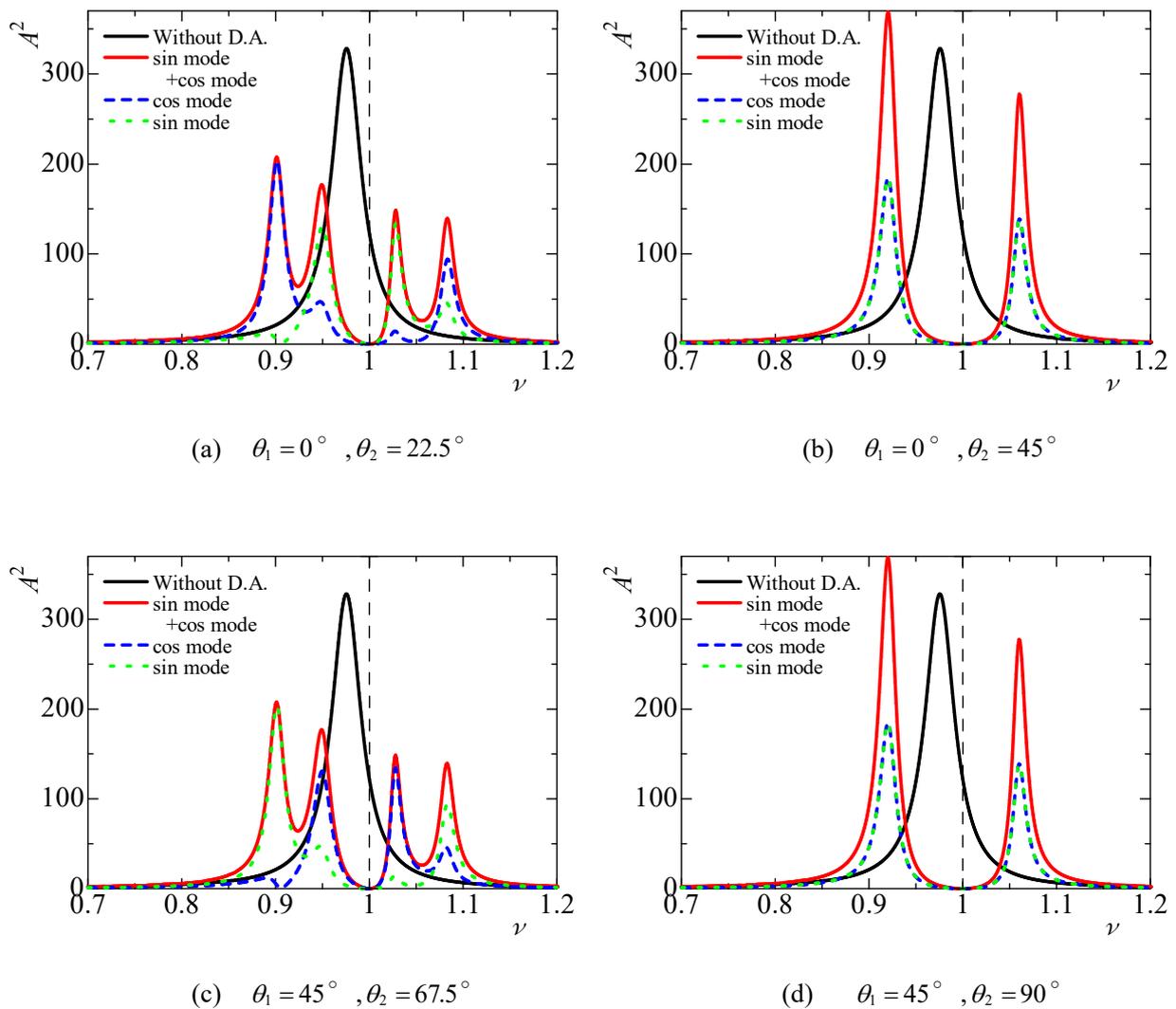
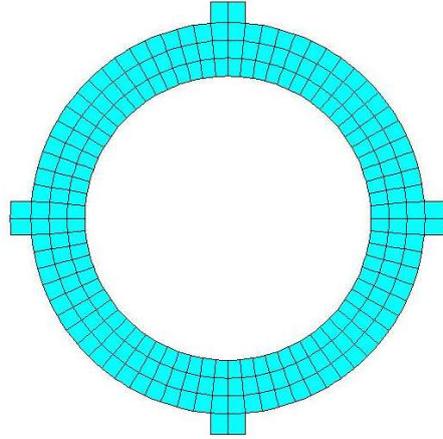
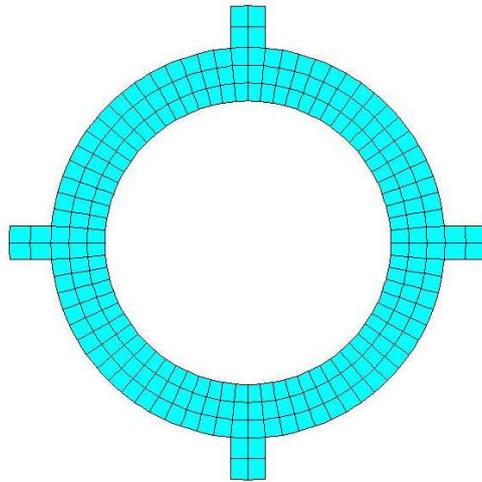


図 5.16 不均一性が 2 個あり動吸振器を 2 個設置した場合の共振曲線 ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$, $\mu_l = 0.05$)

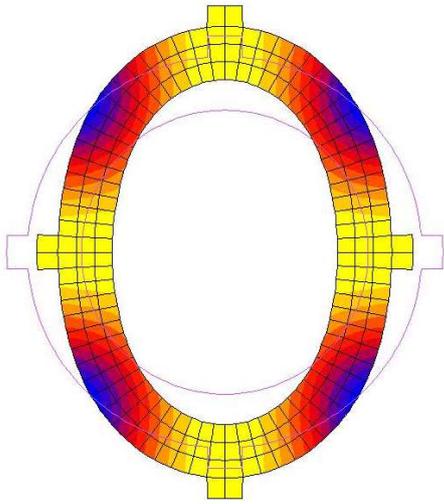


(a) $\mu_l = 0.05$

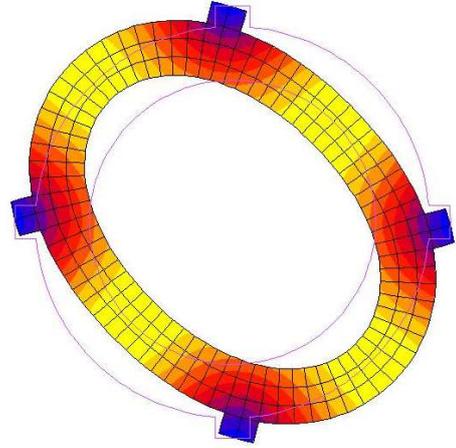


(b) $\mu_l = 0.1$

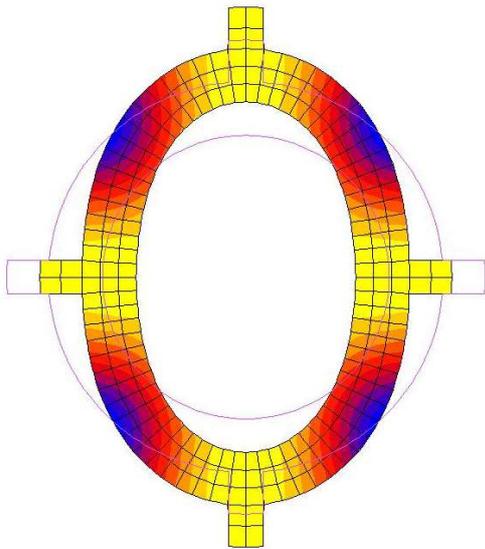
図 5.17 有限要素解析モデル



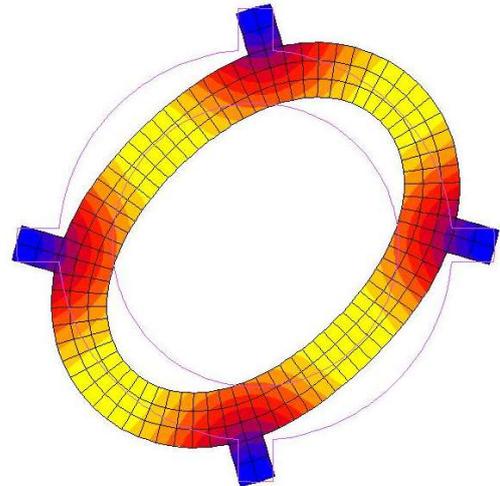
(a) 751.8Hz ($\mu_l = 0.05$, cos モード)



(b) 764.2Hz ($\mu_l = 0.05$, sin モード)

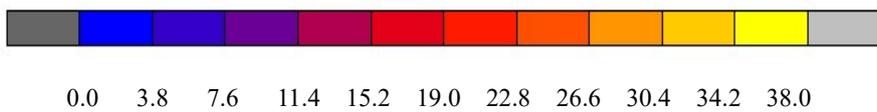
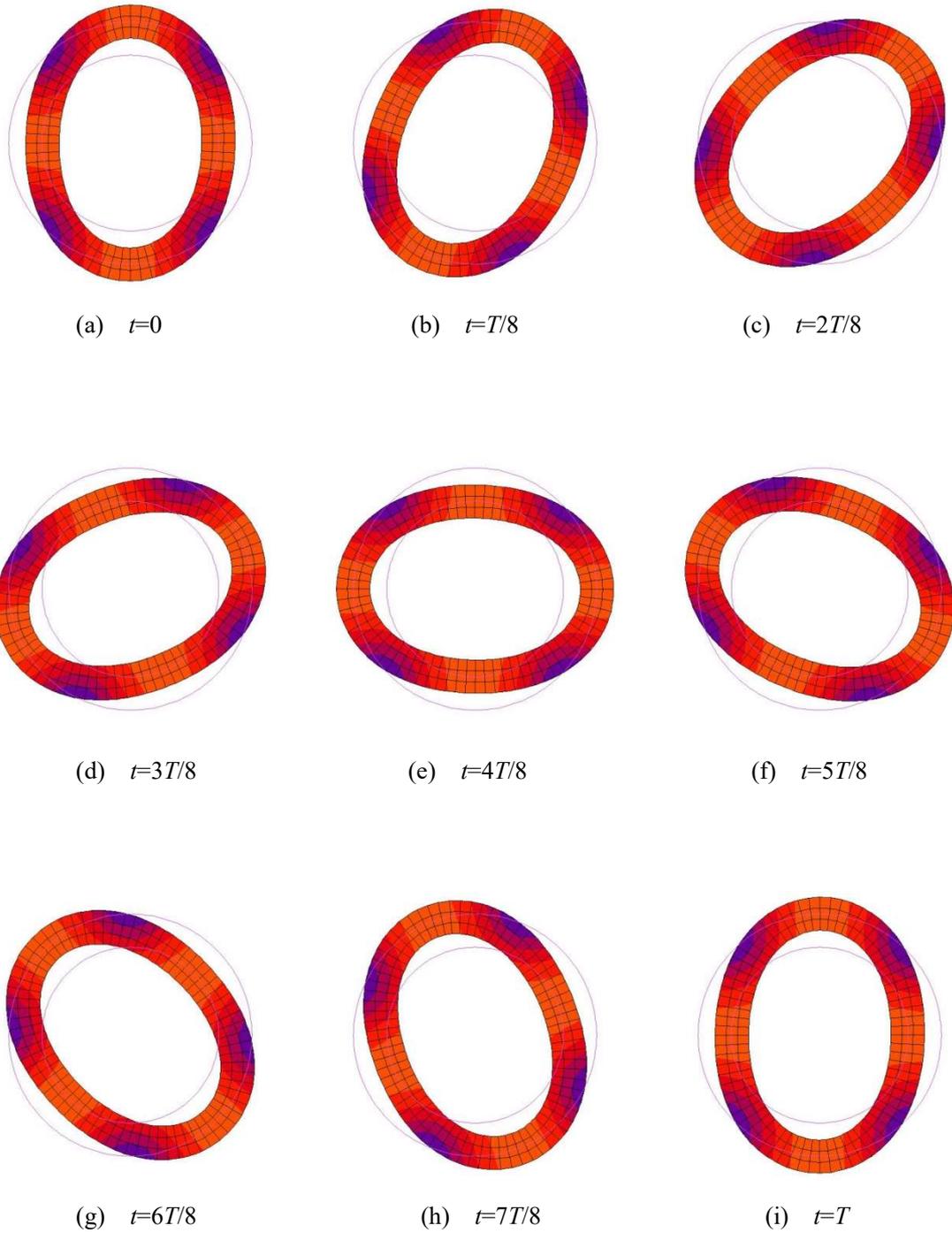


(c) 727.7Hz ($\mu_l = 0.1$, cos モード)



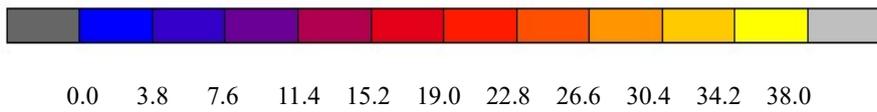
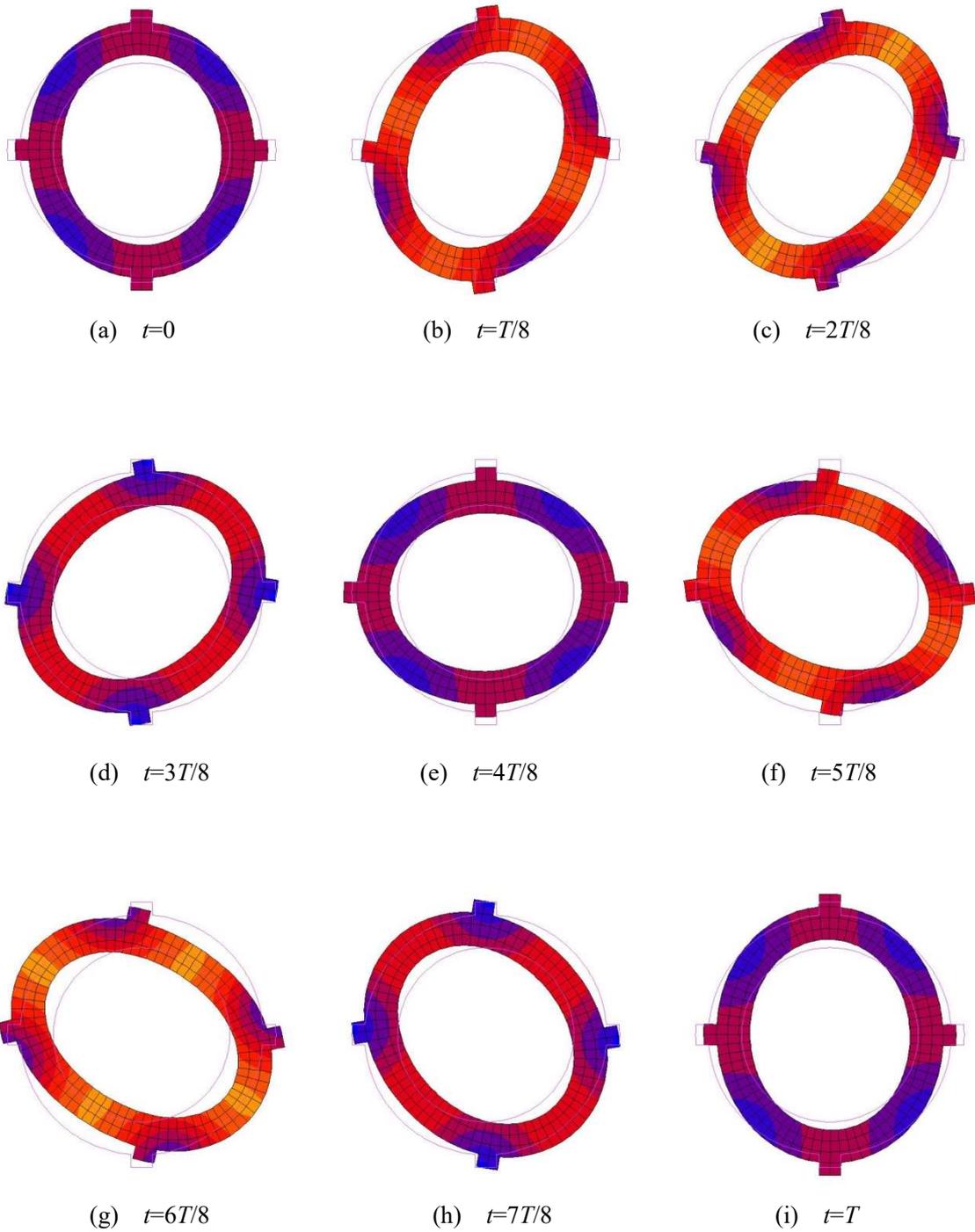
(d) 763.9Hz ($\mu_l = 0.1$, sin モード)

図 5.18 不均一性がある場合のモード特性 ($i=2$)



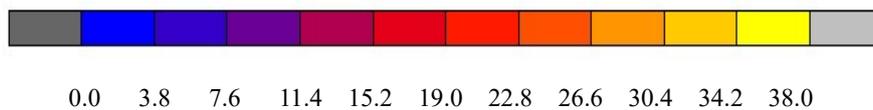
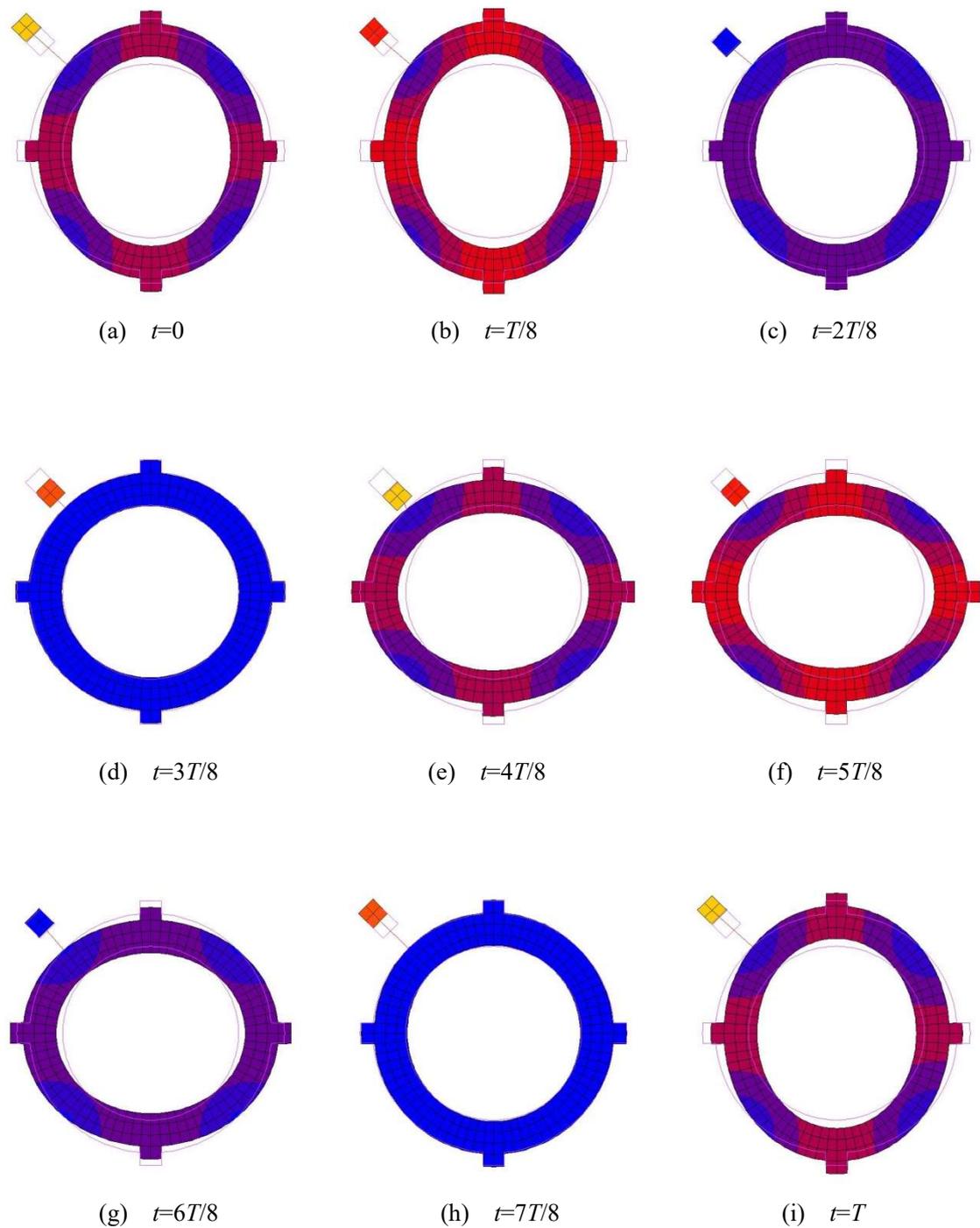
(j) 変位振幅の定義

図 5.19 不均一性がない場合の応答シミュレーション ($f=765.6\text{Hz}$)



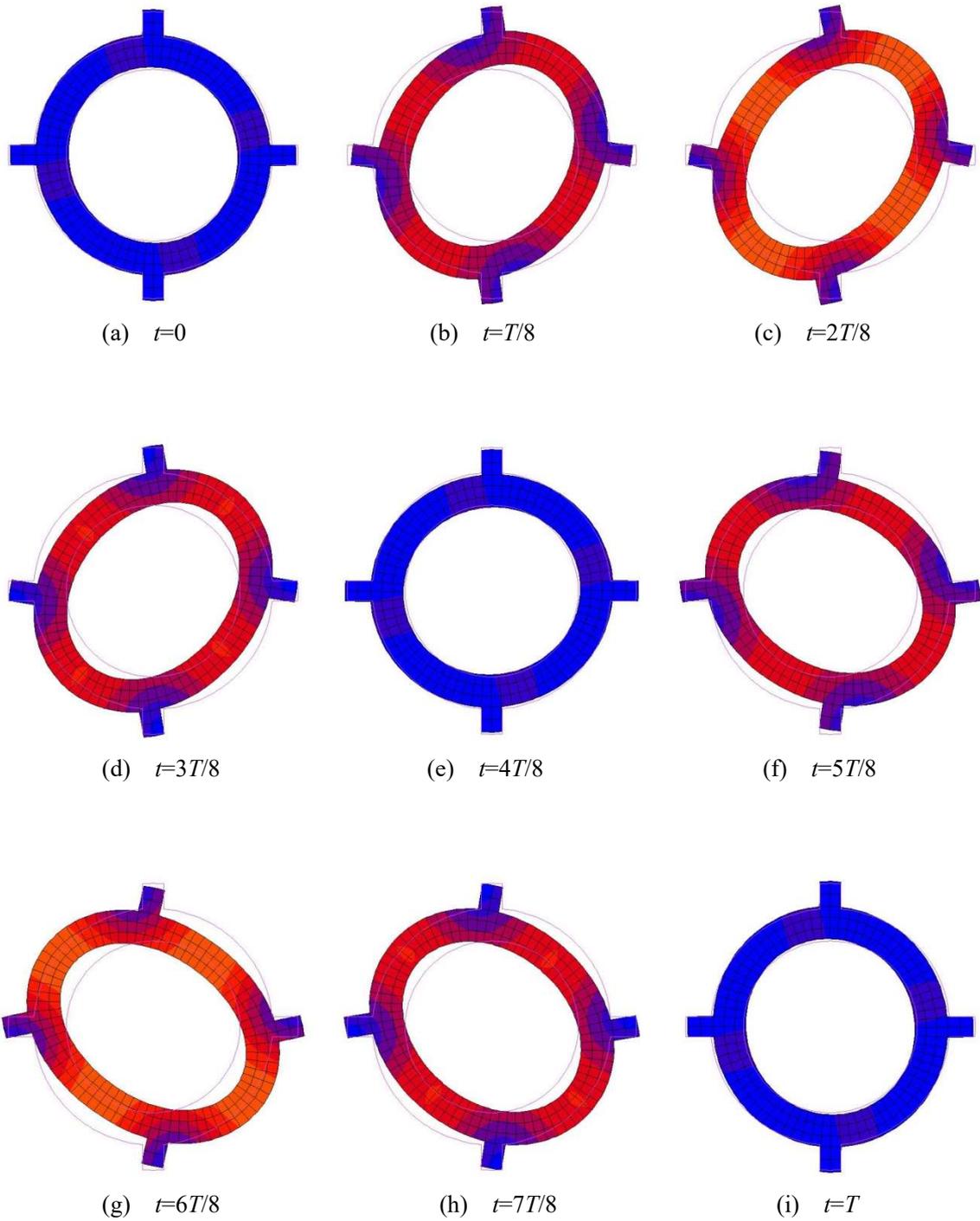
(j) 変位振幅の定義

図 5.20 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を設置していない場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\mu_l = 0.05$)



(j) 変位振幅の定義

図 5.21 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を 1 個設置した場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\mu_l = 0.05$)



(a) $t=0$

(b) $t=T/8$

(c) $t=2T/8$

(d) $t=3T/8$

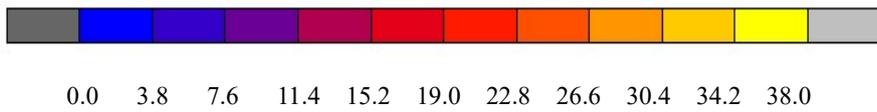
(e) $t=4T/8$

(f) $t=5T/8$

(g) $t=6T/8$

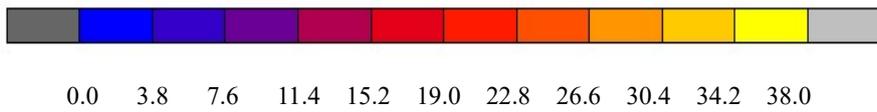
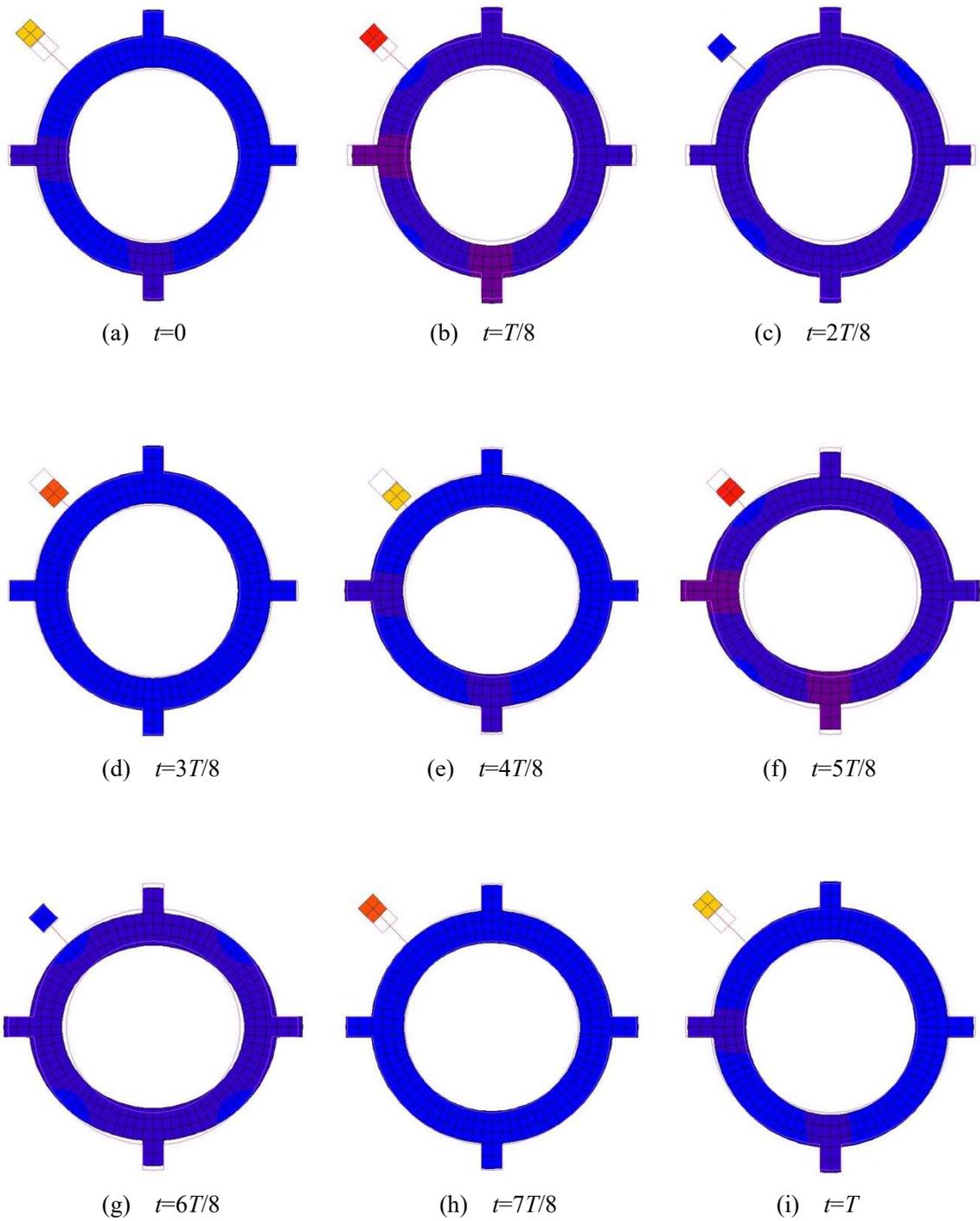
(h) $t=7T/8$

(i) $t=T$



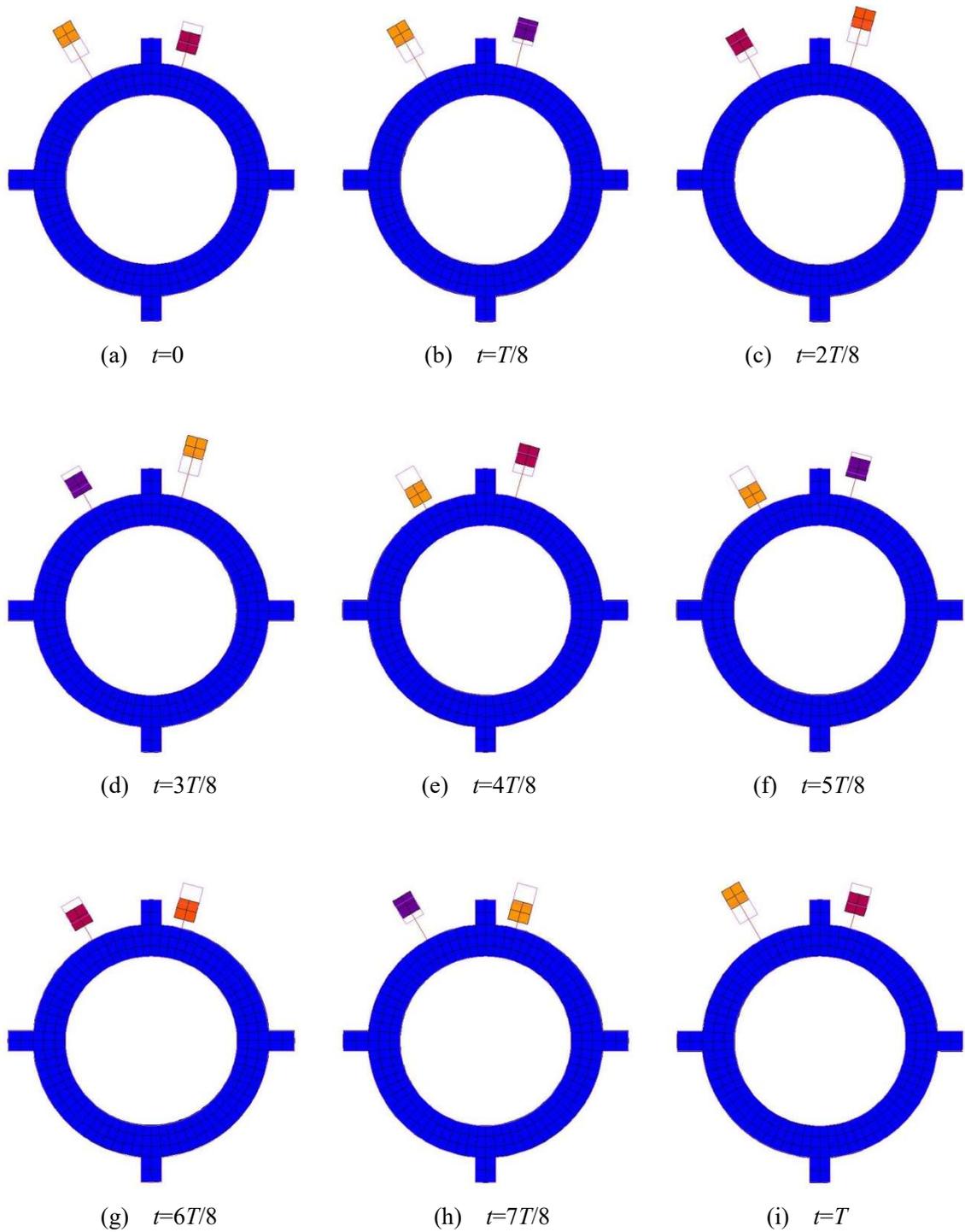
(j) 変位振幅の定義

図 5.22 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を設置していない場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\mu_l = 0.1$)



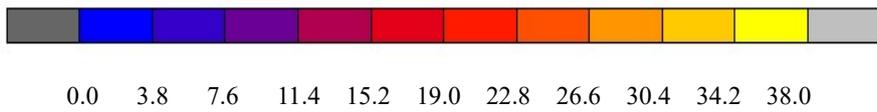
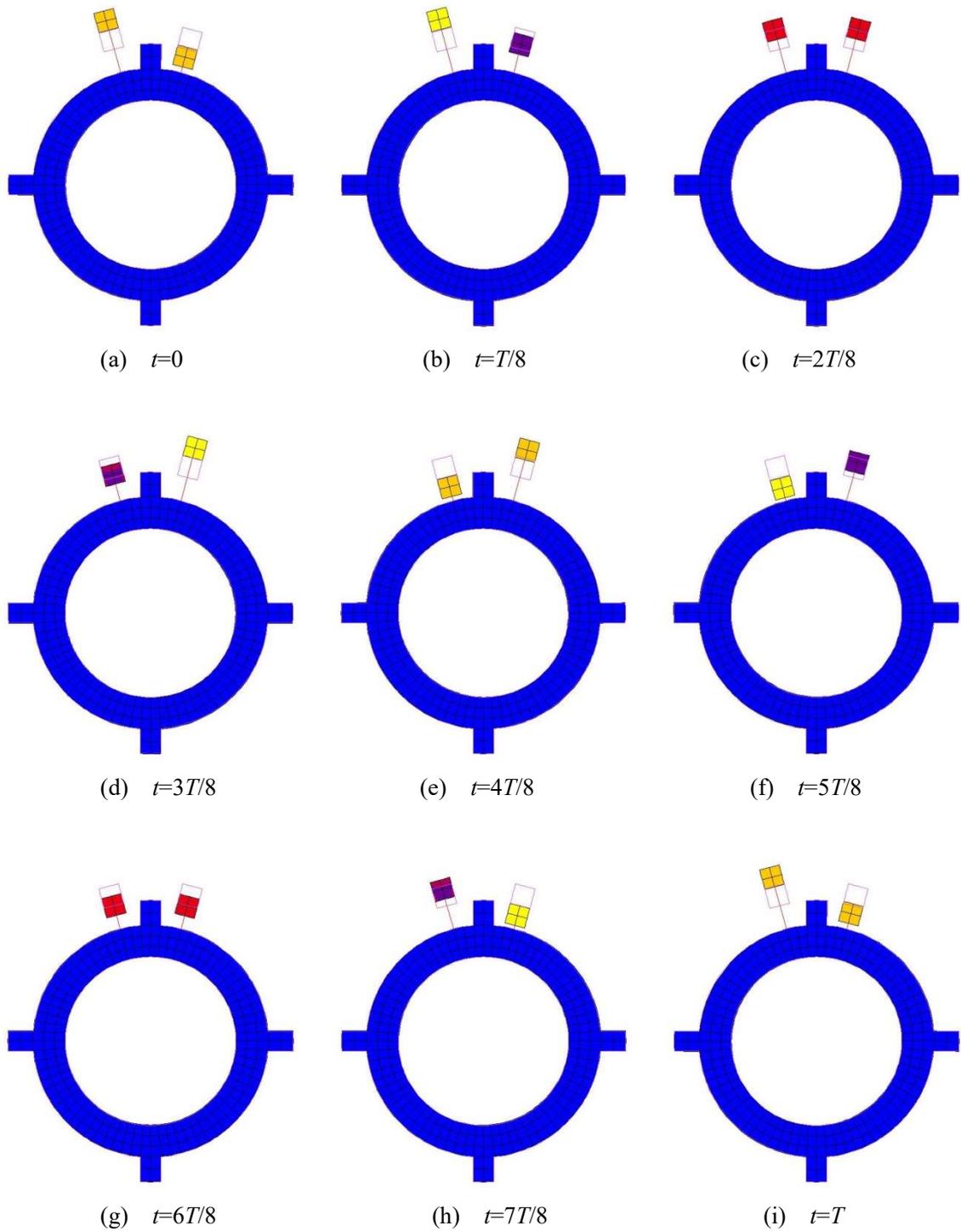
(j) 変位振幅の定義

図 5.23 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を 1 個設置した場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\mu_l = 0.1$)



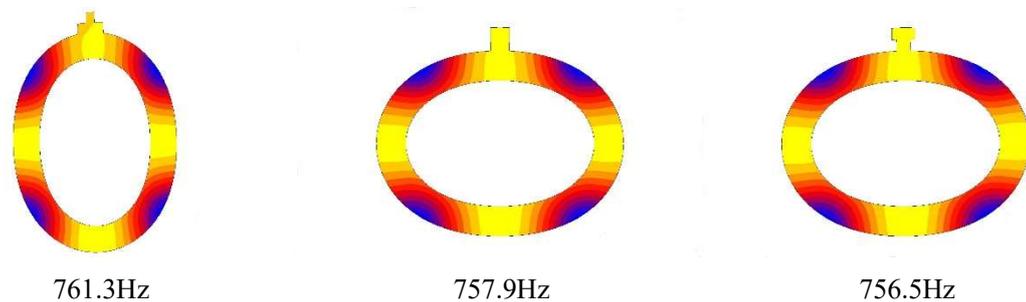
(j) 変位振幅の定義

図 5.24 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 345^\circ$, $\mu_l = 0.1$)

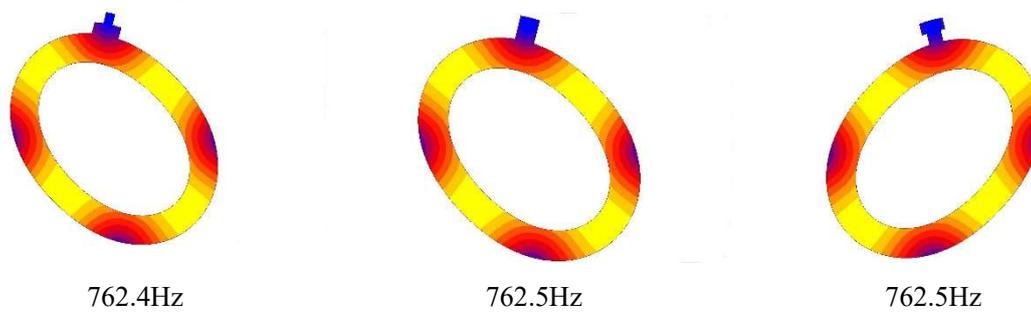


(j) 変位振幅の定義

図 5.25 腹と腹の間隔に不均一性を設置し動吸振器を 2 個設置した場合の応答シミュレーション
 ($f = 765.6\text{Hz}$, $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 345^\circ$, $\mu_l = 0.1$)



(a) cos mode



(b) sin mode

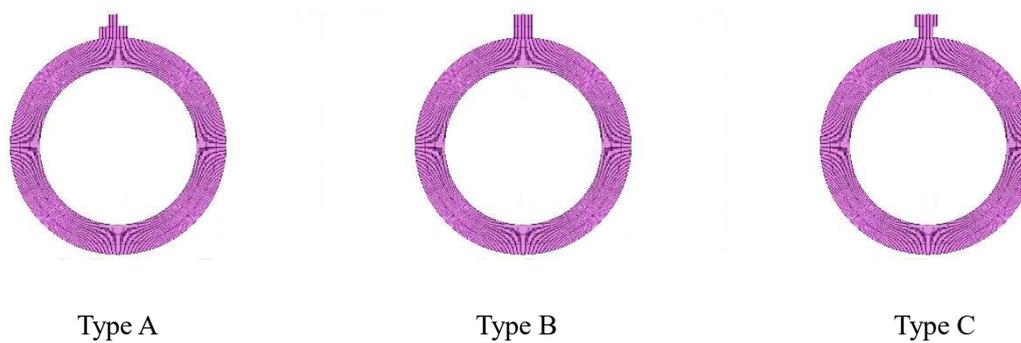
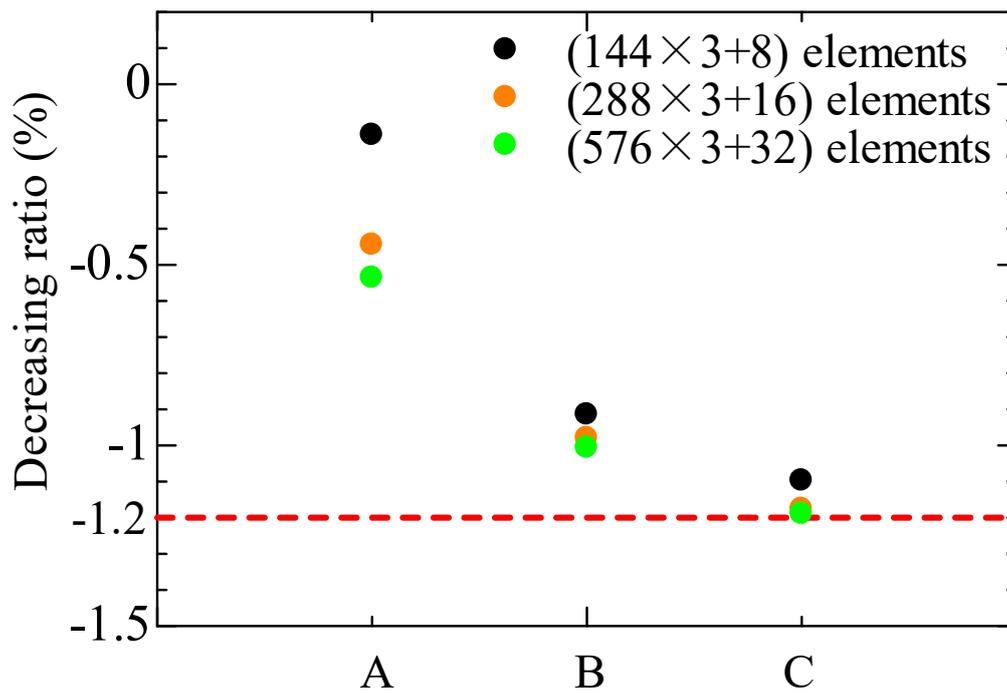
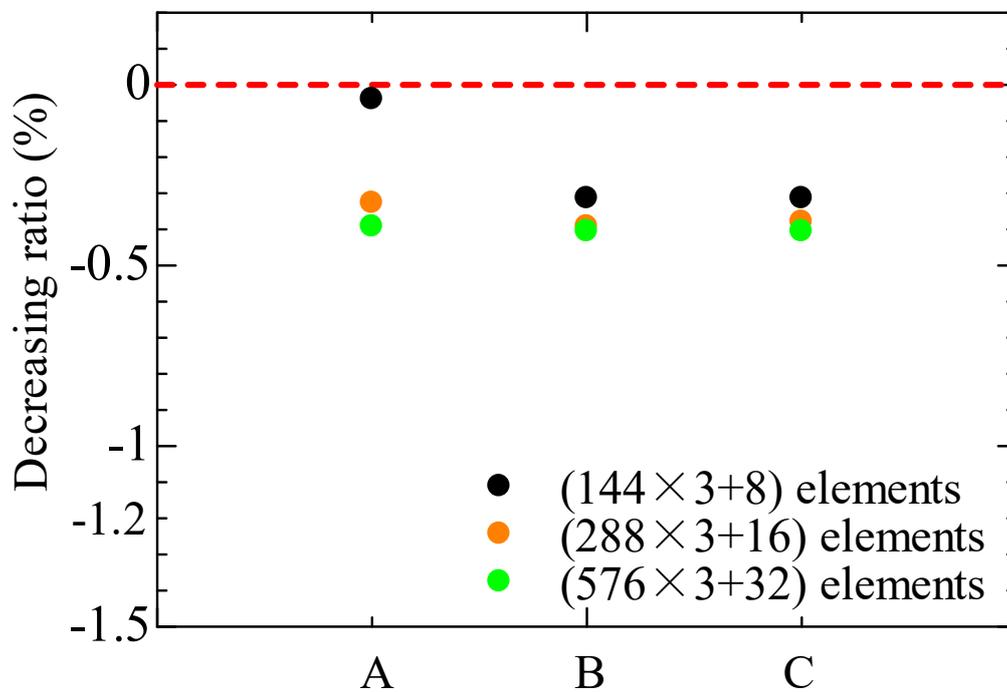


図 5.26 固有モードと有限要素解析モデル



(a) cos mode



(b) sin mode

図 5.27 固有振動数の減少率

第 6 章 結論

本論文では、動吸振器による電動機の制振について理論解析と有限要素解析から調べた。

第 2 章では、動吸振器を用いた電動機の制振の基礎となる電動機固定子と動吸振器のモデル化とその運動方程式の導出を行い、動吸振器による電動機の電磁振動の制振理論を確立した。得られた結論は以下のとおりである。

- (1) 電動機固定子と同じ固有振動数をもつ 2 つの動吸振器をそのモードの腹と節の間隔で設置することにより電磁振動の共振を完全に制振できる。

第 3 章では、電動機固定子と電磁力が共振した場合を対象とし、動吸振器の設置間隔の影響について調べた。また、共振点以外の制振効果や固定子の複数の固有モードを考慮した場合についても調べた。得られた結論は以下のとおりである。

- (1) 一对の動吸振器を制振対象の振動モードの腹と腹の間隔以外で設置すれば、共振点において固定子の振動は完全に制振され、一对の動吸振器を制振対象の振動モードの腹と節の間隔で設置したときが、共振点付近の広い振動数領域で制振効果が最も高い。
- (2) 共振点以外の制振については、動吸振器の振動数を電磁振動の振動数に一致させ、動吸振器を制振対象の振動モードの腹と腹の間隔以外で設置したときに振動は完全に制振されるが、動吸振器の製作誤差を考えると、電磁振動の振動数よりもわずかに高めの固有振動数で動吸振器を製作すると安全である。
- (3) 固定子に複数の固有モードがある場合、動吸振器によって固定子の制振対象以外のモードがわずかに励振される。
- (4) 有限要素解析とそれに基づくシミュレーションを行った結果は、円環理論による解析結果と定性的によく一致した。

第 4 章では、インバータモータのように駆動周波数が広範囲で変わる電動機を対象とし、減衰をもつ動吸振器の最適な設計について調べた。また、多重動吸振器による最適な設計についても調べた。得られた結論は以下のとおりである。

- (1) 一对の動吸振器の固有角振動数比と減衰比を最適化することでインバータモータのように回転数が増える場合も制振できる。さらに、多重動吸振器を用いることでさらに高い制振効果が得られる。
- (2) 振動モードの腹と節の間隔に動吸振器を設置した場合、一对の動吸振器の固有角振動数比と減衰比を等しくすることが最適設計条件であることがわかった。一方、振動モードの腹と節の間隔以外に動吸振器を設置するときは、互いに異なる減衰比や固有角振動数比をもつ動吸振器を用いることにより、同程度の制振を行えることがわかった。
- (3) 一对の動吸振器の質量を互いに異なる値とすることで制振効果はわずかに向上することがわかり、一对の動吸振器の質量比が異なるときの制振メカニズムを明らかにした。
- (4) 減衰比が最適減衰比に比べて小さい場合、2個の動吸振器の間隔として、およそ 20° から 30° の値が制振に適している。
- (5) 円環理論による解析結果と有限要素解析と数値積分によるシミュレーション結果は定性的に一致した。

第5章では、不均一性を考慮した電動機を対象とし、理論解析と有限要素解析から動吸振器を用いた制振への影響を検証している。

- (1) 不均一質量は固有振動数を下げる効果があるので、不均一質量の設置により共振点は低下する。
- (2) 2個の不均一質量の質量が大きい時は、その開き角が振動モードの腹と節の間隔に近いほど、元の共振点の振幅を低減できる。
- (3) 1つの不均一質量（質量比0.05）と1つの動吸振器（質量比0.02）の間隔を制振したい振動モードの腹と節の間隔に等しくなるように設置することにより、共振振幅の2乗値を不均一質量も動吸振器もないときの約1/6に制振することが可能である。
- (4) 不均一質量が存在しても、一对の動吸振器を用い、その設置間隔を制振対象モードの腹と節の間隔にし、動吸振器の固有振動数を強制力の振動数に等しくすることにより、不均一質量と動吸振器の相対的位置関係に係らず、固定子を完全に制振できる。
- (5) 有限要素解析とそれに基づくシミュレーションを行った結果は、円環理論による解析結果と定性的によく一致した。

A. 動吸振器の設計

ここでは、実際の誘導電動機に動吸振器を設置して実験を行うことを想定した動吸振器の設計について考える。対象とする電磁振動は比較的高い振動数域(1000Hz～3000Hz)で発生し、電動機固定子の総重量(1ton 以上)も非常に大きいことから、動吸振器には高い固有振動数と大きな質量という相反する条件が要求される。このような動吸振器の製作は、一般に困難である。そこで、ここでは電動機固定子の巻線を仕切るために配置されているティースに着目し、片持ち梁型動吸振器を提案する。

A.1 固定子の固有振動数に及ぼすティースの影響

研究室では、巻線が挿入されていない固定子のハンマリング試験と有限要素解析から固定子の円環部分とティースが連成振動していることを明らかにしており、志賀⁽⁷⁾⁽⁸⁾らも同様の結果を得ている。連成振動することにより、固定子の振動モードは低次モードと高次モードが現れる。連成振動する仕組みは、例として固定子の円環部分が円周方向に2波ある振動モードのとき、その振動モードの腹に位置するティースは曲げ変形することなく固定子の半径方向へ円環部分に変位するだけで固定子に影響を及ぼさないが、振動モードの節に位置するティースは固定子の円環部分の角変位によって円周方向に曲げ振動し、固定子と連成して振動する。

以上のような固定子とティースの連成振動の状態を考えると、ティースのような片持ち梁を円筒状の固定子の外側、かつ振動モードの節の位置に設置することで動吸振器として使用できると考えられる。また、放熱フィンとしての効果も得ることができると思われる。

A.2 動吸振器のモデル図

片持ち梁型動吸振器を設置した電動機のモデル図を図 A.1 に示す。図(a)に梁型動吸振器の腕のない通常タイプ、図(b)に梁型動吸振器の腕のある減衰付加タイプを示している。腕のある減衰付加タイプは、2つの動吸振器を円周方向で近接させ、互いに接触した状態での振動により摩擦減衰を得ることができる。この図では、腕の位置を比較的根元に近い位置で描いているが、梁型の動吸振器の長さ方向のどの場所に腕を設置するかは、固有振動数、放熱の両方の観点から決まると予想される。ここでは、円周方向に動吸振器を設置しているが、実際には固定子の軸方向にも数カ所設置することで動吸振器1個当たり

の質量を軽くできる。

A.3 有限要素法によるモード解析

有限要素解析ソフト Marc を用いて、固有モード解析を行った。簡単のため、図 A.1(a)の通常タイプを解析対象として図 A.2 にモデル図を示す。それぞれ動吸振器設置していない場合、動吸振器を 1 個設置した場合を示している。動吸振器を設置していないモデルにおけるモード解析の結果を図 A.3 に示す。ここでは、振動モード $i=2$ を示し、同じ振動数で 2 つのモードが得られた。これは、cos モードと sin モードの 2 つを意味する。次に、この振動モードを制振するために、図 A.2 に示した動吸振器のモデルについて一端固定、他端自由の境界条件で解析を行い、動吸振器の振動数を主系の振動数に合うように動吸振器の長さを調整した。ここで、主系と動吸振器の質量比は約 0.015 としている。

主系の振動数に合わせた動吸振器を 1 個設置した場合の固有モードを図 A.4 に示す。動吸振器を設置した位置が節となる sin モードが高次と低次の 2 つにわかれていることがわかる。一方、設置位置が腹にあたる cos モードは振動数が低減されているがモード形状は変化していない。ここで、第 3 章で示した動吸振器を単純なマスとバネでモデル化した場合の有限要素解析では動吸振器の設置位置が節となるモードの振動数は元の固有振動数と変わらなかった。これは、ばね型動吸振器ではそれが半径方向に変位し、梁型動吸振器ではその基礎が回転方向に変位するためである。また、動吸振器を設置したときに得られる新たな 2 つのモードの固有振動数は元の固定子の固有振動数を中間値となるようにわかれるが、得られた低次モードの固有振動数は元の固有振動数よりも 23Hz 低く、得られた高次モードの固有振動数は元の固有振動数よりも 0.8Hz 高い結果となりそれらの差が大きい結果となった。これより、動吸振器を主系に設置することで、動吸振器の固有振動数は一端固定、他端自由の境界条件で得られたものよりも低いことが考えられる。主系、動吸振器ともに連続体であるため、動吸振器を主系に設置した際に設置した面は完全な固定端とはならない。そこで、動吸振器は完全な固定端ではなく回転ばねなど設置位置に対応した境界条件をもつようにモデル化すべきであると考えられる。

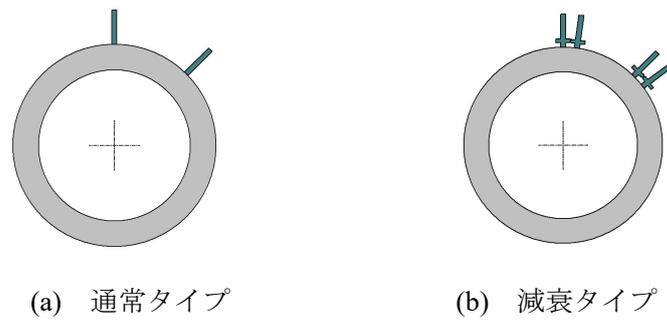


図 A.1 動吸振器を設置した電動機のモデル図

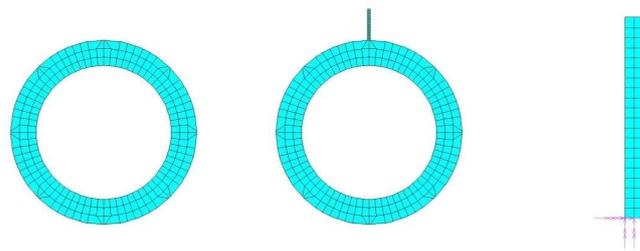


図 A.2 有限要素解析モデル図

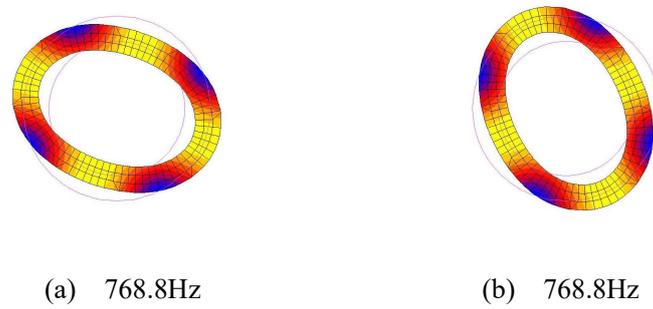


図 A.3 動吸振器を設置していない場合の固有モード

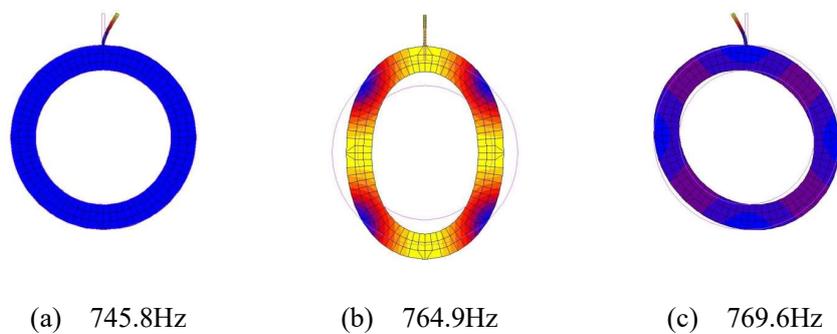


図 A.4 動吸振器を1個設置した場合の固有モード

B. 3次元モデルの有限要素解析

ここでは、動吸振器が電動機固定子の軸方向に及ぼす影響を考える。研究室では、実際の巻線が挿入された電動機固定子を対象にハンマリング試験を行い、軸方向に節のあるモードは得られないことを明らかにしている。電磁力も軸方向に節のあるモードはないので、軸方向は無視できるものとし、本論文では電動機固定子を円環として近似した。ここでは、本文で無視した軸方向長さの影響を、確認するため有限要素解析を行う。

B.1 解析モデル

円筒形状の解析モデルを図 B.1 に示す。このモデルの動吸振器無しモデルは節点数 4320、要素数 3024 とし、要素は 8 節点 6 立方体要素を用いている。主系の $n=2$ の固有振動数は 764.4Hz であった。ここで、境界条件はフリーとした。

B.2 過渡応答解析

過渡応答解析を行った結果、図 B.1(b)のモデルにおいても円周方向に動吸振器を 2 個設置することで、第 3 章と同様に円周方向の振動は十分に制振できることがわかった。ただし、主系の減衰は第 3 章と同じ値 0.02 を用いた。

軸方向長さの影響を確認するために、図 B.2 にほぼ定常状態になった変位 A と軸方向位置 b と時間 t の関係を示している。変位 A は動吸振器を設置していない場合の最大変位で除したもので定義し、軸方向位置 b は測定点 $\theta = 0^\circ$ において、軸方向を 15 点に分割し、端部の 1, 5, 中央 8 番目, 11, 端部 15 の 5 か所としている。時間 t は任意の初期状態から十分時間が経過し定常状態となった時の一周期間で定義している。軸方向において動吸振器の設置位置から離れると振幅が大きくなっているが、動吸振器を軸方向に 1 個設置するだけでも十分に制振できることがわかる。軸方向で振幅が最も大きい両端の振幅は制振しないときの約 1/6 であり、十分制振されている。ただし、より制振したい場合は、動吸振器の小型化を兼ねて軸方向に複数設置することが必要と思われる。

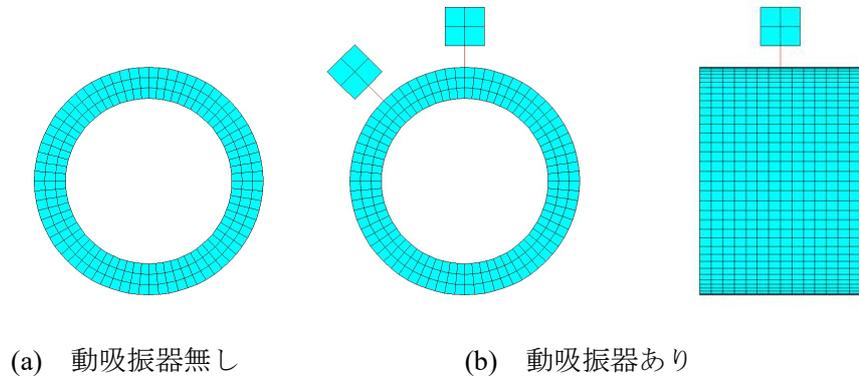


図 B.1 3次元モデル

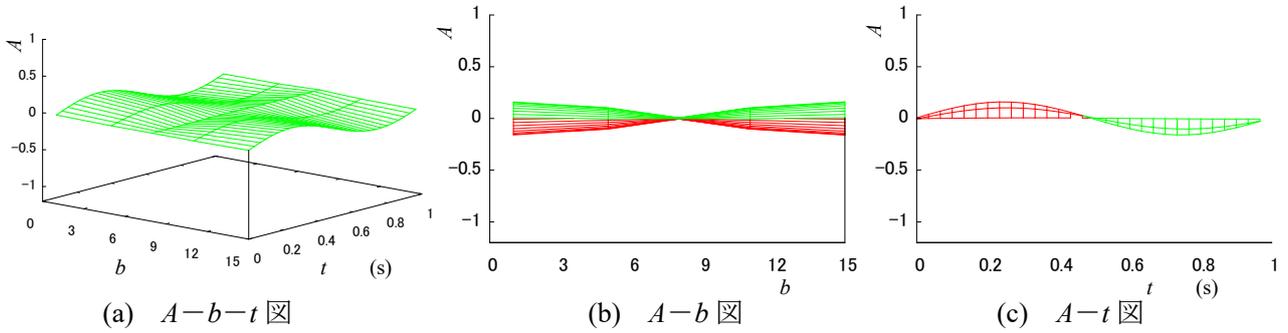


図 B.2 $\theta = 0^\circ$ の位置における振動特性

参考文献

- (1) 堀康郎, 田中基八郎, 電磁振動&騒音設計, (2010), 三松.
- (2) 野田伸一, リムチーション, 水野末良, 電動機の積層固定子鉄心に関する固有振動数と電磁振動応答解析, Dynamics and Design Conference, No.326(2007), pp.1-6.
- (3) 糸見和信, 野田伸一, 石橋文徳, 山脇久志, 有限要素法による電動機固定子鉄心の固有振動数解析における巻線の縦弾性係数, 機論 C, Vol.68, No.669(2002), pp.1343-1348.
- (4) 糸見 和信, 野田伸一, 鈴木功, 石橋文徳, 電動機固定子鉄心の固有振動数解析法, 機論 C, Vol.64, No.624(1998), pp.2833-2839.
- (5) 殿城賢三, 野田伸一, 松下真琴, 有限要素法による誘導電動機の固定子鉄心の固有振動数解析, Dynamics & Design Conference, No.341(2005), pp.1-6.
- (6) 岩田佳雄, 佐藤秀紀, 小松崎俊彦, 針江博史, 八十島慎介, 誘導電動機固定子の固有振動数, Dynamics and Design Conference, No.211(2000).
- (7) 志賀元弘, 誘導電動機固定子鉄心の固有振動数(第 1 報) 半径方向振動特性, 機論 C, Vol.50, No.451(1984), pp.464-469.
- (8) 志賀元弘, 誘導電動機固定子鉄心の固有振動数(第 2 報) 半径方向固有振動数解析, 機論 C, Vol.51, No.561 (1985), 26-34.
- (9) B.K. Korenev and L.M. Reznikov, Dynamic Vibration Absorbers, (1993), New York: John Wiley
- (10) 背戸一登, 動吸振器とその応用, (2010), コロナ社.
- (11) J.P.DEN Hartog, Mechanical Vibrations, (1956), New York: McGraw-Hill.
- (12) 城郁夫, 金子忠男, 永津省吾, 高橋千代丸, 木村正夫, 耐風照明柱の開発, 川崎製鉄技報, Vol.20, No.4 (1988), pp.308-314.
- (13) 吉武裕, 末岡淳男, インパクトダンパによる自励振動の防振, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.60, No.569(1994), pp.50-56.
- (14) 松崎実, 牛尾正之, 南条正洋, 独立状態の吊橋主塔の渦励振に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No.399 (1983), pp.13-22.

- (15) H.Matsuhisa, R.Gu, Y.Wang, O.Nishihara and S.Sato, Vibration control of a ropeway carrier by passive dynamic vibration absorber, JSME International Journal, Series C Vol.38, No.4(1995), pp.657-662.
- (16) 振動数調整機能付き動吸振器 (TMD), 昭和電線レビュー, Vol. 55, No. 1 (2005).
- (17) 石田幸男, 井上剛志, 賀川泰史, 上田元彦, 遠心振り子式動吸振器を取り付けた回転軸系の非線形振動解析とねじり振動の制振, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 71, No. 708 (2005), pp.2431-2438.
- (18) J.Mayeti, and H.Ulbrich, Tautochronic centrifugal pendulum vibration absorbers General design and analysis, Journal of Sound and Vibration, Vol.333(2014), pp.711-729.
- (19) 吉武裕, 原田晃, 隠崎雅浩, 山崎正則, 杉村泰司, 大石哲史, 2 スロット発電機と水平振り子からなる動吸振器型制振発電装置の研究 (第 1 報, 渦励振の制振), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.72, No.723(2006), pp.3467-3473.
- (20) 松岡太一, 藤井遊介, 発電式動吸振器による標識柱の振動低減, 日本機械学会論文集, Vol.81, No.826 (2015), pp. 14-00608 .
- (21) C.Y.Lee, J.H.Lin, Incorporating piezoelectric energy harvester in tunable vibration absorber for application in multi-modal vibration reduction of a platform structure, Journal of Sound and Vibration, Vol.389(2017), pp.73-88.
- (22) 中野寛, 高原弘樹, 河合謙吾, 多重動吸振器を用いたエンドミル加工時の強制びびりおよび再生びびり振動の抑制対策, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.818 (2014),DR0098.
- (23) B.Bergeot, S.Bellizzi, B.Cochelin, Passive suppression of helicopter ground resonance using nonlinear energy sinks attached on the helicopter blades, Journal of Sound and Vibration, Vol.392(2017), pp.41-55.
- (24) D.Gong, J.Zhou, W.Sun, Y.Sun, Z.Xia, Method of multi-mode vibration control for the carbody of high-speed electric multiple unit trains, Journal of Sound and Vibration, Vol.409(2017), pp.94-111.
- (25) J.S.Issa, S.W.Shaw, Synchronous and non-synchronous responses of systems with multiple identical nonlinear vibration absorbers, Journal of Sound and Vibration, Vol.348(2015), pp.105-125.
- (26) P.Gao, C. Xiang, H.Liu, H.Zhou, Reducing variable frequency vibrations in a powertrain system with an adaptive tuned vibration absorber group, Journal of Sound and Vibration, Vol.425(2018), pp.82-101.

- (27) S.-J.Jang, M.J.Brennan, E.Rustighi, A simple method for choosing the parameters of a two-degree-of-freedom tuned vibration absorber, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.331(2012), pp.4659-4667.
- (28) O.F.Tigli, Optimum vibration absorber (tuned mass damper) design for linear damped systems subjected to random loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.331(2012), pp.3035-3049.
- (29) J.S. Love, M.J.Tait, The peak response distributions of structure–DVA systems with nonlinear damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.348(2015), pp.329-343.
- (30) 富室崇志 , 田村晋司, 定点理論による二自由度系を対象とした動吸振器の設計(第2報, 異なる質量と剛性を持ち, 二次質量が励振を受ける系の場合), *日本機械学会論文集*, Vol.81, No.825 (2015), p. 14-00622
- (31) 谷口智之, 近藤孝広, 負性抵抗系に対する動吸振器の動作原理の解明と最適設計法の開発, *日本機械学会論文集*, Vol.82, No.833 (2016), p. 15-00586 .
- (32) Y.Hua, W.Wong, L.Cheng, Optimal design of a beam-based dynamic vibration absorber using fixed-points theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.421(2018), pp.111-131.
- (33) 末岡淳男, 金光陽一, 近藤孝広, 基礎機械工学シリーズ 機械振動学(2000), p.93, 朝倉書店.
- (34) 池田健 , 五百井俊宏, 主振動系に減衰がある場合のフードダンパについて, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.45, No.394(1979), pp. 663-670.
- (35) 長松昭男他編, *ダイナミクスハンドブック*, (1993), p.372, 朝倉書店.
- (36) D.KARNOPP, M.J.Crosby, and R.A.Harwood, Vibration Control Using Semi-Active Force Generators. *J. of Engineering for Industry, Trans. of ASME*, Vol.96, Issue2(1974),pp.619-626.
- (37) 背戸一登, 磁気ダンピングを有する定数可変形動的吸振器の研究 (可変長片持ばり構造物の防振への適用), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.45, No.397(1979), pp. 1010-1017.
- (38) 背戸一登, 滝田好宏, 可調整振子式制振装置の研究 (第1報, 固有振動数の変化する主系に対する適応条件について), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.51, No.471(1985), pp. p3043-3050.
- (39) 背戸一登, 滝田好宏, 可調整振子式制振装置の研究 (第2報, 固有振動数の変化する主系に対する適応条件について), *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.53, No.485(1987), pp. pp.52-58.

- (40) 佐々木君章 , 川崎治彦, 鉄道車両用セミアクティブ制振装置の開発, 日本機械学会誌 Vol.109, No.1050(2006), p358.
- (41) 長松昭男他編, ダイナミクスハンドブック, (1993), p.375, 朝倉書店.
- (42) 吉田和夫, 野波健蔵, 振動と運動の制御手法の展望, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.57, No.534(1991), pp.345-354.
- (43) 長松昭男他編, ダイナミクスハンドブック, (1993), p.946, 朝倉書店.
- (44) 古市崇, 福島直人, 萩原一郎, ランダム路面入力シミュレーションを用いた油圧アクティブサスペンションの最適設計手法, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 71, No. 701 (2005), pp.152-156.
- (45) 鎌田崇義, 藤田隆史, 畑山貴善, 有壁剛生, 村井信義, 相沢覚, 遠山幸太郎, ピエゾアクチュエータを用いたスマート構造による骨組構造物のアクティブ制振に関する研究 (第1報, 柱の曲げモーメント制御による場合), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 62, No. 599 (1996), pp.2577-2584.
- (46) 宇都宮健児, 消費電力低減を考慮したエレベータ用アクティブ制振技術の実用化, 日本機械学会誌 Vol.114, No.1115(2011), p769.
- (47) 山田啓介, 松久寛, 宇津野秀夫, 朴正圭, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 72, No. 716 (2006), pp.1145-1153.
- (48) 三菱地所編, 横浜ランドマークタワー, (1994), 影国社.
- (49) 一文字正幸, 平野俊夫, 池田和憲, 見村勇樹, 片山仁, 村田大輔, 動吸振器を利用したタービン発電機の電磁振動低減法の検討, 日本機械学会, Dynamics and Design Conference, No.528(2010).
- (50) 一文字正幸, 平野俊夫, 池田和憲, 見村勇樹, 片山仁, 村田大輔, 円筒型動吸振器によるタービン発電機の電磁振動低減法の検討, 日本機械学会, Dynamics and Design Conference, No.436(2011).
- (51) 一文字正幸, 平野俊夫, 池田和憲, 見村勇樹, 片山仁, 村田大輔, 円筒型動吸振器によるタービン発電機の電磁振動低減法の検討 (第2報), 日本機械学会, Dynamics and Design Conference, No.732(2012).
- (52) 江崎 雄也, 吉田 佳子, 片持ち梁型動吸振器による円筒形状構造物の振動低減方法の検討, 日本機械学会, Dynamics and Design Conference, No.637(2012).
- (53) 岩浪孝一, 背戸一登, 2個の複合動的吸振器の最適設計法とその効果, 機論 C, Vol.50, No.449(1984), pp.44-52.

- (54) 神谷圭二, 鎌形健太郎, 松本進, 背戸一登, 多重動吸振器の最適設計法, 機論 C, Vol.62, No.601(1996), pp.22-27.
- (55) 長松昭男, モード解析入門, (1994), コロナ社, pp.293-323.
- (56) Stephan P. Timoshenko, 工業振動学, (1974), コロナ社, pp.428-433.
- (57) 東芝三菱電機産業システム株式会社, 中型高圧かご形三相誘導電動機 TM21-M II シリーズ, <https://www.tmeic.co.jp/product/catalog/D-0012-0501-A.pdf>, (2020-04-28).
- (58) 長松昭男他編, ダイナミクスハンドブック, (1993), p.360, 朝倉書店.

— 謝辞 —

本論文を終わるに鑑み、本研究について終始懇切なご指導とご鞭撻を賜りました長崎大学大学院工学研究科吉武裕教授をはじめ、研究に関して多くのアドバイスをしていただきました長崎大学工学部工学科構造工学コース原田晃助教や諸先生方に心より御礼申し上げます。また、長崎大学工学部工学科構造工学コース吉武研究室のみなさま、社会人ドクターへの進学を快く承諾頂いた東芝三菱電機産業システム株式会社回転機システム事業部のみなさま、および日々の生活を支えて頂いている妻に心より感謝の意を表します。