社団法人国立大学協会九州地区支部 九州地区国立大学間の連携に係る企画委員会 リポジトリ部会・編集委員会（編），
研究論文集－教育系・文系の九州地区国立大学間連携論文集－，Vol. 6，No. 2. 2013 年 3 月

線形代数と原価配賦

LINEAR ALGEBRA AND COST ALLOCATIONS

立石雅俊 ＊

はじめに

組織内の各部門が相互にサービス等[1]を提供し合う相互依存の関係にある場合、第 2 次集計の際に問題となるのは、補助部門間で相互に配賦される原価の測定である。

ある補助部門から他の補助部門へのアウトプット額は、ある補助部門にインプットされた原価額が判明した後に算出され得るものであり、他の補助部門においても同様である。つまり、お互いに相手のアウトプット額が判明しないと、自己のインプット額およびアウトプット額が算出できないことになる。ここで相互依存関係とは、ある部門が創造したサービス等を他の部門に提供すると同時に、この部門も他の部門よりサービス等の提供を受ける結果、お互いに部門として成り立つ関係をいう。つまり、相互補完的な関係である。

このような補助部門費を製造部門に配賦する方法として、直接配賦法、階梯式配賦法、相互配賦法がある。直接配賦法と階梯式配賦法は、相互配賦法の近似値を求めることを目的とした簡便法であり、実務では広く利用されている[2]。しかし、補助部門相互間の用役の授受を全部もしくは一部を無視して配賦を行う方法であることから、原価計算に対する部門管理者の理解・納得を得ることが困難となることが考えられる。相互配賦法には、簡便法としての製造工業原価計算要綱に規定する相互配賦法があるが、この方法でも補助部門相互間の用役の授受は、一部無視される。補助部門相互間の用役の授受を全て考慮する純粋な相互配賦法として連続配賦法、試行錯誤法、連立方程式法の 3 方法がある。純粋な相互配賦法のうち連続配賦法と試行錯誤法は、四則計算だけで算出可能となるように考案された方法であり、連立方程式と同じ値を求めるための別法である。しかし、これら 2 つの方法は部門数が多い場合、手計算の手間数が非常に多くなるという欠点があり、実際的ではない。一方、連立方程式を立てることは部門数に関わらず可能である。部門数が多い場合、連立方程式を手計算で解くことは困難となるが、連立方程式を行列の形に書き換え、

＊ 長崎大学大学院経済学研究科
1） 本稿において「サービス等」とは、「財貨の譲渡と用役の提供」をいう。
2） 廣本(1997)p.137。

係数行列の逆行列を計算し、これを両辺の左から乗ずることで方程式は解ける。係数行列の逆行列を計算することは市販されているコンピュータに付属のソフトウェアで可能である。したがって補助部門間相互依存の実態を反映し、かつ実行可能な配賦法として、部門別原価計算における相互配賦法を連立方程式法として考察することに意義はあると考えられる。

本稿では、線形代数（行列）による部門別原価計算の相互配賦法について考察する。第 1 節では、先行研究と歴史的経緯を紹介し、補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法の現在における学問的意義を確認する。第 2 節から第 4 節では、具体的数値例を用いて、Williams and Griffin(1964)が考案し Churchill(1964)により拡張されたモデル(以下 W&G/C モデル)、Manes モデル、Livingstone(1968)モデル、Minch and Petri(1972)モデルまでの 4 つのモデルについて検討を行う。第 5 節では、Manes(1965)が批判した「第 1 次集計後の補助部門費合計額と相互配賦後の補助部門費合計額が一致しないこと」について、数値例に基づく検討を通じて、この「一致しない額の意味」を考察する。第 6 節では、W&G/C モデルは Leontief の基本方程式と同形であること、および、この、W&G/C モデルには必ず非負解が存在することを証明する。

1. 先行研究と歴史的経緯

製造間接費もしくは共通費の配賦に関する数学的研究として、Williams and Griffin(1964)と、それを拡張した Churchill(1964)がある。これらを Manes(1965)が批判しており、これらを修正した Livingstone(1968)が発表されている、さらに Minch and Petri(1972)では別の方法が発表されている。また、Minch and Petri(1972)までに提唱された配賦法を Kaplan(1973)は比較検討している。日本においても佐藤(1972)、門田(1974)、片岡・井岡(1983)がいずれも Williams and Griffin(1964)から Minch and Petri(1972)までの論文を基に部門別原価計算の配賦について発表している。

しかし、Johnson and Kaplan(1987)は、次のように述べている。「1960 年から 1975 年の間に、論説の流れは（奔流あるいは洪水というように記述している者さえいる)、幅広い多様な経営意思決定や統制問題に適切な情報を提供するために、オペレーションズ・リサーチ（ O.R. (筆者加筆)）技法が原価データにどのように適用され得るのかの主張[3]があら

[3] これらの研究は、利用者意思決定モデル・アプローチ(user decision-model approach)と呼ばれている。

われた。その技法には、(途中略) 間接費、補助部門費を配賦するモデル [4] (途中略) などもある。(途中略) O.R.の文献は大学研究者のみでほとんど開発され、その他の学究者へは単に伝達されたに過ぎなかった。大学研究者は、その考え方を実行するためとか実務上の意義を現場管理者に効果的に伝えるためでさえ、実際の企業を対象とすることに実質的にほとんど注意を払わなかった。(途中略) 従って、1980 年までに不幸な状態に到達してしまった。大学の研究者は、単純で型にはまった生産環境において、管理会計の高度に精巧なモデルを開発することに忙しかった。研究者が実際の企業現象によって動機づけられることもなかったし、当今の企業からのデータで検証されることもなかったし、検証可能でさえなかった。」(pp.157-163) つまり当時、現場管理者と大学研究者の原価計算に対する認識の乖離が大きくなっていたのである。

小林(1993)によると、「1980 年代になると、それまでの伝統的な製品原価計算やコスト・マネジメントは、グローバルな競争の激化やそれに関連する経営意思決定環境の複雑化に対して十分に対応できていないという認識が一般的に広まってきた。」(p.72) Johnson and Kaplan(1987)では、60 年以上にわたって用いられてきた管理会計の諸技法が当時の経営環境下で適合性を失っていることを指摘するとともに、研究者も現場へ出かけ、創造的で革新的な経営が行っている実務を観察すべきことを主張している。その結果、「管理会計研究の流れが原価概念に関していえば、真実原価(true costs)を追求することに対する研究が減少する一方で、特定の意思決定状況に適合的な原価概念を利用することに重点が置かれるようになったのである。」(加登(1989)p.3)

「利用者意思決定モデル・アプローチが今日それほど評価されていないもっとも大きな原因は、計量的技法を用いて管理会計・原価計算問題を考察しようとする問題意識が受け入れられていないためではなく、実践のニーズを反映せずに机上の研究のみが先行した当時の研究方法にある。したがって、実践のニーズを反映した計量的技法の活用は否定されたわけではなく、今日でも遂行されるべき性質のものだと思われる。」(加登(1989)p.13)「計量的意思決定モデルを活用するにあたっては、コンピュータを利用した経営情報システム(computer-based management information systems)の使用が前提となるが、計量的技

[4] 補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法もそのひとつである。利用者意思決定モデル・アプローチで開発されたモデルとその手法としては、他に次のものがある。製品組み合わせ決定(線形計画法、数理計画法)、多品種製品の CVP 分析(線形計画法、数理計画法)、不確実性下の CVP 分析(統計・確率、決定理論)、差異調査意思決定モデル(ベイズ統計学、管理図表、回帰分析)、共通費の配分(数理計画法、ゲーム理論)、コスト・ビヘイビアの分析モデル(回帰分析、時系列分析)(加登(1999)p.19)

法・経営情報システム・管理会計および原価計算の相互関係を分析した研究は実施されずに放置されている。」(加登(1989)p.70)

しかし、パソコンが普及した今日において、計量的技法と原価計算とを結び付ける経営情報システムの構築は、1970 年代前後に比べ困難なものではなくなっている。利用者意思決定モデル・アプローチにおける「補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法」を再考し、よりどころとなる数学的基礎を確認することは、一つの礎石となりうるのではないかと考える。

2. 本稿における数値例

本稿で展開する議論は、以下の設例によっている。

・当該企業は、製造部門 P_1、P_2 、P_3 と補助部門 S_1、S_2 、S_3 から成っている。

・第 1 次集計は適切に行われ、第 1 次集計後における各部門費は、表 2-1 とする。

・配賦基準、配賦率は所与とし、配賦率は、表 2-2 とする。

・配賦率は原価計算の期間中変動しないものとし、また、自家消費はないものとする。

表 2-1　第 1 次集計後における各部門の部門費

製造部門	部門費	補助部門	部門費
P_1	2,000,000 円	S_1	400,000 円
P_2	1,200,000 円	S_2	200,000 円
P_3	800,000 円	S_3	50,000 円
$\sum P_i$	4,000,000 円	$\sum S_i$	650,000 円

（出典）筆者作成

表 2-2　配賦率（%）

		補　助　部　門		
		S_1から	S_2から	S_3から
補助部門	S_1に対し	0	5	40
	S_2に対し	5	0	30
	S_3に対し	10	10	0
製造部門	P_1に対し	40	20	20
	P_2に対し	20	60	5
	P_3に対し	25	5	5
%		100	100	100

（出典）筆者作成

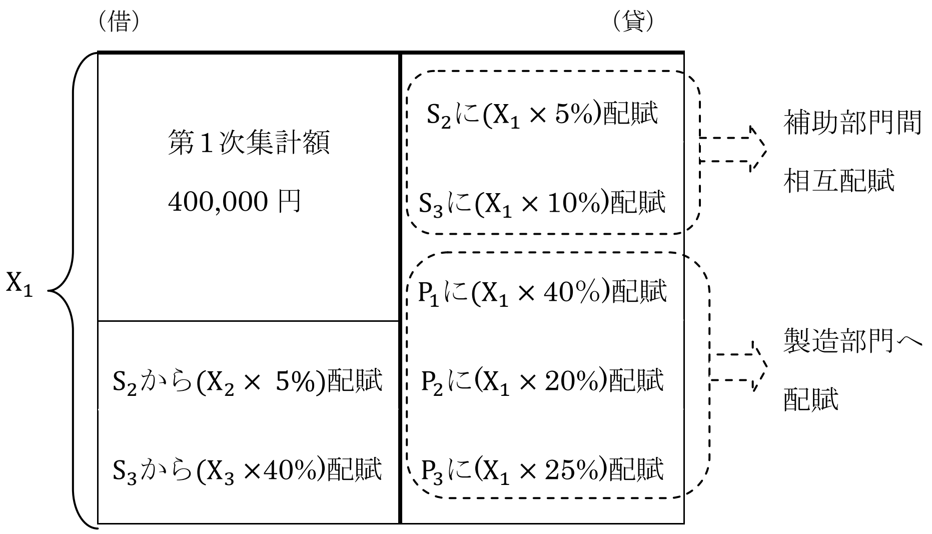
補助部門 S_1を例に表 2-1、表 2-2 の見方を説明すると以下のようになる。

表 2-1 より S_1には第 1 次集計により 400,000 円の配賦額が部門費として認識される。

表 2-2 の補助部門の「S_1から」の列を見ると、補助部門 S_2、S_3に対しそれぞれ 5%、10%配賦され、製造部門P_1、P_2、P_3に対しそれぞれ 40%、20%、25%が配賦されていることがわかる。また、補助部門「S_1に対し」の行を見るとS_2、S_3からそれぞれの 5%、40%が配賦されることがわかる。また配賦率は、各補助部門S_iにインプットされた相互配賦後の借方原価の総額である X_i を基準とした比率である。

ここで、相互配賦後のS_i（$i = 1,2,3$）の借方合計額を X_i（$i = 1, 2, 3$）とすると、S_1 部門費 T 勘定は図 2-1 のようになる。

図 2-1　S_1部門費



（出典）筆者作成。

3.　Williams and Griffin および Churchill のモデル

ここで示す計算法は、連立方程式として多くのテキスト等に紹介されている標準的な解法[5)]であって、Williams and Griffin(1964)がはじめて提示したもの[6)]とされている。 この配賦法はChurchill(1964)によって拡張されている。以下W&G/Cモデルとする。W&G/Cモデルは以下のとおりである。

いま、X_i (i = 1,2,3)は、他の補助部門からのサービス等の提供[7)]に係る原価配賦を受け取った後における補助部門S_iの原価を表すものとする。すると、S_i 部門へインプットされた原価総額X_i は以下の式で表わされる。

X_i =（第 1 次集計されたS_i部門費）＋（他の補助部門からS_i 補助部門への配賦額）

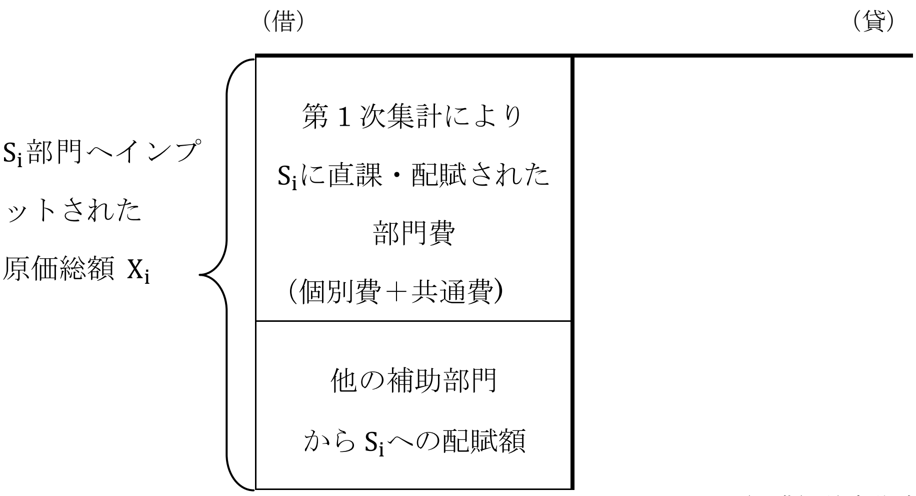
これを T 勘定で示したのが図 3-1 である。

5）門田(2002)pp.83-86、岡本(2000)pp.237-239, 廣本(1997)pp.143-144、小林(1996)pp.97-98、小林(1988)pp.316-318、櫻井(1993)pp.90-91、における連立方程式の解法は W&G/C モデルである。

6）門田 (1974)p.59。

7）第 1 次集計において企業外部から提供されたサービスのうち、当該部門に直課・配賦されるべきものはすでに配賦済みであることから、他の部門よりの配賦は、外部から提供されたサービス等の直接の割当ではなく、当該他の部門で創造されたサービス等の提供である。

図 3-1　S_i部門費



（出典）筆者作成

そこで、表 2-1、表 2-2 より以下の連立方程式が成立する。

S_1 ： $X_1 = 400{,}000 + 0.05X_2 + 0.40X_3$ ・・・ (1)

S_2 ： $X_2 = 200{,}000 + 0.05X_1 + 0.30X_3$ ・・・ (2)

S_3 ： $X_3 = 50{,}000 + 0.10X_1 + 0.10X_2$ ・・・ (3)

この(1)～(3)の連立方程式を解いて X_i ($i = 1,2,3$) の値を求める。

次に、この $X_i(i = 1,2,3)$ の値を用いて、製造部門 $P_i(i = 1,2,3)$ の原価 $Y_i(i = 1,2,3)$ を求める。ここで、

Y_i =（第 1 次集計されたP_i 部門費）＋（各補助部門からP_i製造部門への配賦額）

という関係が成り立つことから以下の連立方程式が成立する。

P_1 ： $Y_1 = 2{,}000{,}000 + 0.40X_1 + 0.20X_2 + 0.20X_3$ ・・・ (4)

P_2 ： $Y_2 = 1{,}200{,}000 + 0.20X_1 + 0.60X_2 + 0.05X_3$ ・・・ (5)

P_3 ： $Y_3 = 800{,}000 + 0.25X_1 + 0.05X_2 + 0.05X_3$ ・・・ (6)

式(1)～(3)より算出した $X_i(i = 1,2,3)$ の値を式(4)～(6)に代入し $Y_i(i = 1,2,3)$ の値を求めることができる。以下、方程式を解きやすくするために行列を用いて考察を行う。

式(1)～(3)を行列で記述すると、

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.40 \\ 0.05 & 0 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}}}_{\text{補助部門間相互配賦額の計算部分}} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (7)$$

ここで、$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{F}$を列ベクトル、$\boldsymbol{A}$を行列として、

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix}、\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & 0.40 \\ 0.05 & 0 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、式(7)は次のようになる。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (8)$$

$\boldsymbol{I}$を単位行列として式(8)を変形すると、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (9)$$

となることから式(9)は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.05 & -0.40 \\ -0.05 & 1 & -0.30 \\ -0.10 & -0.10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400{,}000 \\ 200{,}000 \\ 50{,}000 \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (10)$$

式(9)の両辺に左側から逆行列$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$を掛けると

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot \quad (11)$$

ここで、

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.049784 & 0.097403 & 0.449134 \\ 0.08658 & 1.038961 & 0.34632 \\ 0.113636 & 0.113636 & 1.079545 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.049784 & 0.097403 & 0.449134 \\ 0.08658 & 1.038961 & 0.34632 \\ 0.113636 & 0.113636 & 1.079545 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400,000 \\ 200,000 \\ 50,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 461,850.6 \\ 259,740.3 \\ 122,159.1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \sum X_i = 843,750$$

となる。次に、式(4)～(6)を行列で表したのが、式(12)である。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,000,000 \\ 1,200,000 \\ 800,000 \end{pmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 0.40 & 0.20 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.05 \\ 0.25 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}}}_{\text{補助部門から製造部門への配賦額の計算部分}} \cdot \cdot \cdot \quad (12)$$

X_i のそれぞれの値を式(12)に代入するとY_iが求められる。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,261,120.1 \\ 1,454,322.2 \\ 934,557.6 \end{pmatrix} \qquad \therefore \sum Y_i = 4,650,000$$

表 2-1 より第 1 次集計後における各部門の部門費の合計額は、

$$\sum P_i = 4,000,000 \qquad \sum S_i = 650,000$$

であることより、

$$\sum P_i + \sum S_i = 4,650,000 \qquad \therefore \sum Y_i = \sum P_i + \sum S_i$$

以上の説明から、第 1 次集計された各補助部門の部門費全額が製造部門 P_i $(i = 1,2,3)$へ配賦されていることがわかる。

第 2 次集計の計算は、補助部門間の相互配賦額を計算する式(1)、(2)、(3)の連立方程式（行列方程式(7)）と補助部門から製造部門への配賦額を計算する式(4)、(5)、(6)の連立方程式（行列方程式(12)）の二段階を経て行われる。

補助部門から製造部門への配賦結果を表にしたのが表 3-1 である。

表 3-1　配賦結果

	S_1から	S_2から	S_3から	P_iへの合計
P_1に対し	184,740.2	51,948.1	24,431.8	261,120.1
P_2に対し	92,370.1	155,844.2	6,108.0	254,322.3
P_3に対し	115,462.6	12,987.0	6,108.0	134,557.6
S_iからの合計	392,573.0 $= 0.85\,X_1$	220,779.3 $= 0.85\,X_2$	36,647.7 $= 0.30\,X_3$	650,000.0

（出典）筆者作成

ここで注目すべきことは、以下の関係が成立していることである。

$$\sum S_i < \sum X_i$$

本稿の設例でいえば、第 1 次集計後の補助部門費合計額$\sum S_i = 650{,}000$ と相互配賦後の補助部門費合計額 $\sum X_i = 843{,}750$の数値が一致せず、$\sum S_i < \sum X_i$ となっていることである。このことを批判したのが第 4 節で検討する Manes(1965)である。

なお、本稿では議論を容易にするために製造部門 P_i（$i = 1,2,3$）、補助部門 S_i（$i = 1,2,3$）の数を、それぞれ 3 部門とし、自家消費はないものとしたが、部門数をそれぞれ m、n とし、自家消費ありとしても同様である。W&G/C モデルの一般形について、および、X_i の非負解が存在することの証明は第 6 節で詳述している。

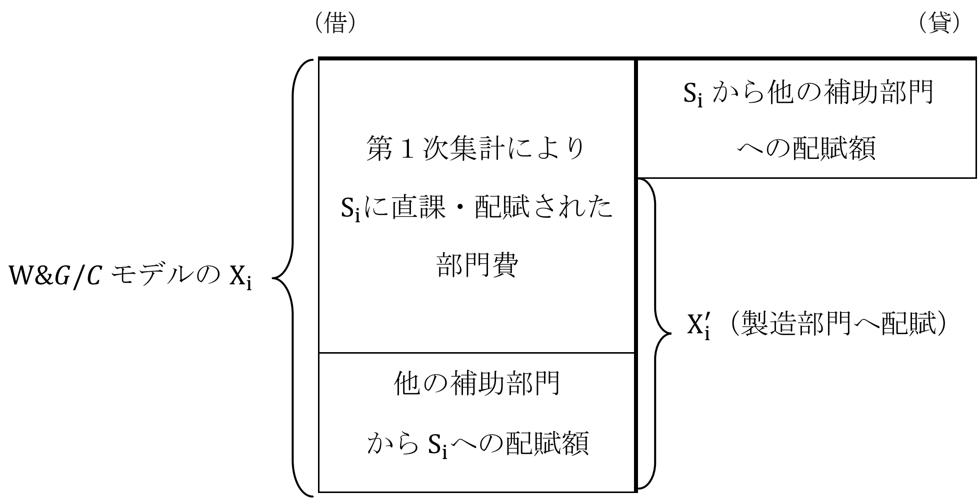
4.　Manes と Livingstone および Minch & Petri のモデル

(1)　Manes のモデル

W&G/C モデルに対して、Manes(1965)は第 1 次集計後の補助部門費の総計$\sum S_i$の額と相互配賦後の補助部門費の総計$\sum X_i$の額が一致せず、$\sum X_i$の額が $\sum S_i$の額を上回っていることを批判し、別の配賦法を提示している。

Manes の考え方によると、補助部門S_i の製造部門に配賦されるべき補助部門費X_i' は、他の補助部門からの原価受取を借記し、かつ他の補助部門に対する原価割当を貸記した後にはじめて確定できるものである、と仮定している。T 勘定で示すと図 4-1 のようになる。

図 4-1　$\mathrm{S_i}$部門費



（出典）筆者作成

W&G/C モデルにおける式(1)～(3)を Manes(1965)は次のように置き換えている。

$$\mathrm{X_1'} = 400{,}000 + (0.05\mathrm{X_2'} + 0.40\mathrm{X_3'}) - (0.05\mathrm{X_1'} + 0.10\mathrm{X_1'}) \quad \cdots \quad (13)$$

$$\mathrm{X_2'} = 200{,}000 + (0.05\mathrm{X_1'} + 0.30\mathrm{X_3'}) - (0.05\mathrm{X_2'} + 0.10\mathrm{X_2'}) \quad \cdots \quad (14)$$

$$\mathrm{X_3'} = 50{,}000 + (0.10\,\mathrm{X_1'} + 0.10\mathrm{X_2'}) - (0.40\mathrm{X_3'} + 0.30\mathrm{X_3'}) \cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

式(13)～(15)のそれぞれの式の前のカッコは他の補助部門から$\mathrm{S_i}$への配賦額を表し、後ろのカッコは$\mathrm{S_i}$から他の補助部門への配賦額を表している。

式(13)～(15)の両辺を辺々加算すると、

$$\sum \mathrm{X_i'} = 650{,}000$$

となり、第 1 次集計後・相互配賦前の補助部門費合計額の$\sum \mathrm{S_i} = 650{,}000$と一致する。

$$\sum \mathrm{S_i} = \sum \mathrm{X_i'}$$

Manes(1965)は、式(13)～(15)で$\mathrm{X_i'}$を「補助部門$\mathrm{S_i}$の製造部門に配賦されるべき補助部門費$\mathrm{X_i'}$は、他の補助部門からのサービス享受として原価受取を借記し、かつ他の部門へのサービス提供の原価割当を貸記した貸方残額である。」と定義している。そして、乗じている配賦率(表 2-2)は、各補助部門$\mathrm{S_i}$にインプットされた借方原価の総額である $\mathrm{X_i}$ を基準とし

た比率である。

具体的にS_1部門費の T 勘定を用いて示すと図 4-2 のようになる。

図 4-2　S_1部門費

（借）	（貸）
第 1 次集計後（部門間相互配賦前）の部門費 400,000 円	S_2 へ　(5/100)X'_1 配賦
	S_3 へ　(10/100)X'_1 配賦
S_2から　(5/100)X'_2 配賦	
S_3から　(40/100)X'_3配賦	

$W\&G/C$ モデルのX_1（基準 100）

X'_1（製造部門へ配賦）

（出典）筆者作成

ここで、借方合計 ＝ 貸方合計であることより、

$$X_1 = \frac{115}{100} X'_1$$

$X_1 \geq 0$ 、$X'_1 \geq 0$であることから、

$$X_1 \geq X'_1$$

貸方S_2への配賦についてみると、

$$\therefore \frac{5}{100} X_1 \geq \frac{5}{100} X'_1$$

となり、他部門への配賦額は、理論上配賦すべき額より過少となる。X_i を基準とした比率を貸方残額の X'_i に乗じても意味のない数値が算出される結果となるだけである。したがって、Manes(1965)においては、相互配賦後の補助部門 S_iから製造部門 P_i へ配賦される合計額 X'_i を基準とした配賦率を適用すべきところを、相互配賦後の借方原価の総額である X_i を基準とした配賦率を適用したことが誤りである。Manes(1965)の式(13)~(15)の配賦率を修正したのが Livingstone モデルの式(16)~(18)である。

(2)　Livingstone のモデル

Livingstone(1968) は、Manes(1965) の考え方「補助部門 S_i の製造部門に配賦されるべき補助部門費 X'_i は、他の補助部門からの原価受取を借記し、かつ他の補助部門に対する原価割当を貸記した後にはじめて確定できるものである。」を基に、適用する配賦率を修正して計算を行っている。Livingstone(1968) は、表 2-2 を基に、製造部門に配賦されるX'_iを基準とした配賦率、表 4-1 を用いている。

表 4-1 配賦率

		補　助　部　門		
		S_1から	S_2から	S_3から
補助部門	S_1に対し	0	5/85	40/30
	S_2に対し	5/85	0	30/30
	S_3に対し	10/85	10/85	0
製造部門	P_1に対し	40/85	20/85	20/30
	P_2に対し	20/85	60/85	5/30
	P_3に対し	25/85	5/85	5/30
		100/85	100/85	100/30

（出典）筆者作成。

表 2-2 の比率は第 1 次集計後の各補助部門 S_iにインプットされた原価の借方総額を基準としたものであるのに対し、表 4-1 の比率は部門内相互配賦後の補助部門 S_iから製造部門 P_iへ配賦される合計額を基準としている。

表 4-1 の配賦率を用いて Manes の連立方程式(13)～(15)を書換えると次のようになる。

$$X'_1 = 400{,}000 + \{(5/85)X'_2 + (40/30)X'_3\} - \{(5/85)X'_1 + (10/85)X'_1\} \quad \cdots (16)$$

$$X'_2 = 200{,}000 + \{(5/85)X'_1 + (30/30)X'_3\} - \{(5/85)X'_2 + (10/85)X'_2\} \quad \cdots (17)$$

$$X'_3 = 50{,}000 + \{(10/85)X'_1 + (10/85)X'_2\} - \{(40/30)X'_3 + (30/30)X'_3\} \quad \cdots (18)$$

式(16)～(18)の両辺を辺々加算すると、

$$\sum X_i' = 650{,}000$$

となり、Manes と同様、第 1 次集計後・相互配賦前の補助部門費合計額の$\sum S_i = 650{,}000$となり一致する。

$$\therefore \quad \sum S_i = \sum X_i'$$

S_1 部門とS_2 、S_3 部門間の相互配賦を表 4-1、表 2-2 の配賦率でそれぞれ配賦した場合を T 勘定で比較すると図 4-3、図 4-4 のようになる。

図 4-3　S_1部門費（配賦率は表 4-1 より）

（借）	（貸）
第 1 次集計後（部門間相互配賦前）の部門費 400,000 円	S_2 へ　$(5/85)X_1'$
	S_3 へ　$(10/85)X_1'$
S_2から　$(5/85)X_2'$	
S_3から　$(40/30)X_3'$	

Livingstone 配賦法の
X_1'：基準 85

（出典）筆者作成

貸方における、S_1 より S_2 、S_3への配賦額と製造部門に配賦される額の割合は、

$\frac{5}{85}$ ： $\frac{10}{85}$ ： $\frac{85}{85}$ となる。

図 4-4 S_1部門費（配賦率は表 2-2 より）

（借）	（貸）
第 1 次集計後（部門間相互配賦前）の部門費 400,000 円	S_2 へ$(5/100)X_1$配賦
	S_3 へ$(10/100)X_1$配賦
S_2から$(5/100)X_2$配賦	
S_3から$(40/100)X_3$配賦	

W&G/C モデルのX_1
（基準 100）

製造部門へ$(85/100)X_1$配賦

（出典）筆者作成

貸方における、S_1よりS_2 、S_3への配賦額と製造部門に配賦される合計額の割合は、

$\frac{5}{100}$ ： $\frac{10}{100}$ ： $\frac{85}{100}$となる。

ここで、

$$\frac{5}{85} : \frac{10}{85} : \frac{85}{85} = \frac{5}{100} : \frac{10}{100} : \frac{85}{100}$$

であることから、W&G/C モデルと Livingstone のモデルの配賦割合は同じである。

また、図 4-3、図 4-4 より

$$X_1' = \frac{85}{100} X_1$$

であることがわかる。

同様にして、

$$X_2' = \frac{85}{100} X_2 \qquad X_3' = \frac{30}{100} X_3$$

これらを式(16)～(18)に代入すると以下のようになる。

$$\frac{85}{100} X_1 = 400{,}000 + \left(\frac{5}{85}\cdot\frac{85}{100} X_2 + \frac{40}{30}\cdot\frac{30}{100} X_3\right) - \left(\frac{5}{85}\cdot\frac{85}{100} X_1 + \frac{10}{85}\cdot\frac{85}{100} X_1\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (16')$$

$$\frac{85}{100} X_2 = 200{,}000 + \left(\frac{5}{85}\cdot\frac{85}{100} X_1 + \frac{30}{30}\cdot\frac{30}{100} X_3\right) - \left(\frac{5}{85}\cdot\frac{85}{100} X_2 + \frac{10}{85}\cdot\frac{85}{100} X_2\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (17')$$

$$\frac{30}{100} X_3 = 50{,}000 + \left(\frac{10}{85}\cdot\frac{85}{100} X_1 + \frac{10}{85}\cdot\frac{85}{100} X_2\right) - \left(\frac{40}{30}\cdot\frac{30}{100} X_3 + \frac{30}{30}\cdot\frac{30}{100} X_3\right) \cdot\cdot\cdot\cdot (18')$$

式(16')～(18')を整理すると以下のようになる。

$$X_1 = 400{,}000 \qquad + \frac{5}{100} X_2 + \frac{40}{100} X_3 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

$$X_2 = 200{,}000 + \frac{5}{100} X_1 \qquad + \frac{30}{100} X_3 \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

$$X_3 = 50{,}000 + \frac{10}{100} X_1 + \frac{10}{100} X_2 \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (3)$$

つまり、式(16)～(18)と式(1)～(3) は、同じ問題の未知数を換えてたてた連立方程式であることがわかる。

そこで、式(1)～(3) と同様にして、式(16)～(18) を解くと、

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 392{,}573.1 \\ 220{,}779.2 \\ 36{,}647.7 \end{pmatrix} \qquad \sum X'_i = 650{,}000$$

となり、表 3-1 最下段「 S_i からの合計」の行と同じ値になっていることがわかる。

同様に、

$$\begin{pmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}261{,}120.1 \\ 1{,}454{,}322.2 \\ 934{,}557.6 \end{pmatrix} \qquad \sum Yi = 4{,}650{,}000$$

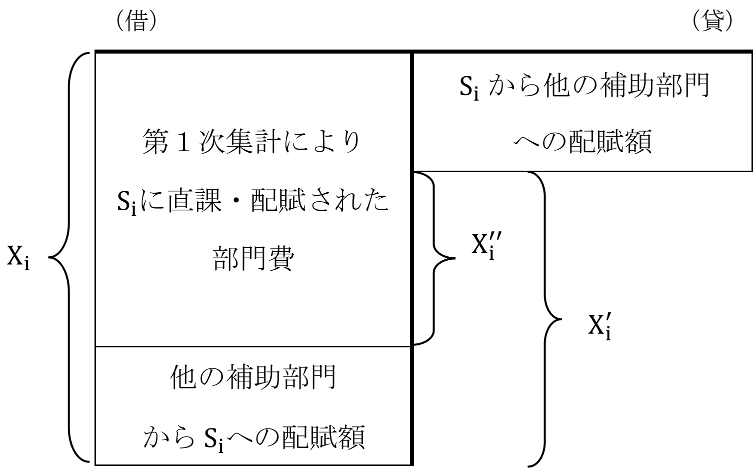
となる。これは式(12)に X_i のそれぞれの値を代入した結果と同じである。このように W&G/C モデルと Livingstone モデルは、未知数を換えただけの同じ内容の方程式であることから、同じ結果となる。

ここで注目すべきことは、第 1 次集計の額 (650,000)と第 2 次集計額つまり製造部門へ配賦される額 (650,000)は一致しているけれども、Manes(1965)が指摘した「第 1 次集計後の補助部門費の総計額と相互配賦後の補助部門費の総計額が一致せず、相互配賦後の額が第 1 次集計後の額を上回っている」問題は依然として存在することである。

(3)　Minch & Petri のモデル

Minch and Petri(1972)は、Manes(1965)と同様に、W&G/C 配賦法では$\sum S_i < \sum X_i$ となっていることは望ましくないとし、第 1 次集計額から他の部門への配賦額を控除した額を未知数 X_i''としている。W&G/C 配賦法の X_i、Manes(1965)の X_i'、および Minch and Petri(1972)のX_i''として、これらの関係を図に示すと、図 4-7 の関係となる。

図 4-7　X_i、X_i'、X_i''の関係



(出典)筆者作成

Minch and Petri(1972)は、Manes(1965)の式(13)～(15) について右辺のプラス項をすべて取り除いた連立方程式を考案している。

$$X_1'' = 400{,}000 \quad - \ (0.05X_1'' + 0.10X_1'') \quad \cdots \quad (19)$$

$$X_2'' = 200{,}000 \quad - \ (0.05X_2'' + 0.10X_2'') \quad \cdots \quad (20)$$

$$X_3'' = \ \ 50{,}000 \quad - \ (0.40X_3'' + 0.30X_3'') \quad \cdots \quad (21)$$

式(19)～(21)において、Minch and Petri(1972)も Manes(1965)と同様に表 2-2 の配賦率を適用している。先述したように、表 2-2 の配賦率は X_i を基準としたものである。図 4-7 より、

$$X_i \ \geq \ X_i' \ \geq \ X_i''$$

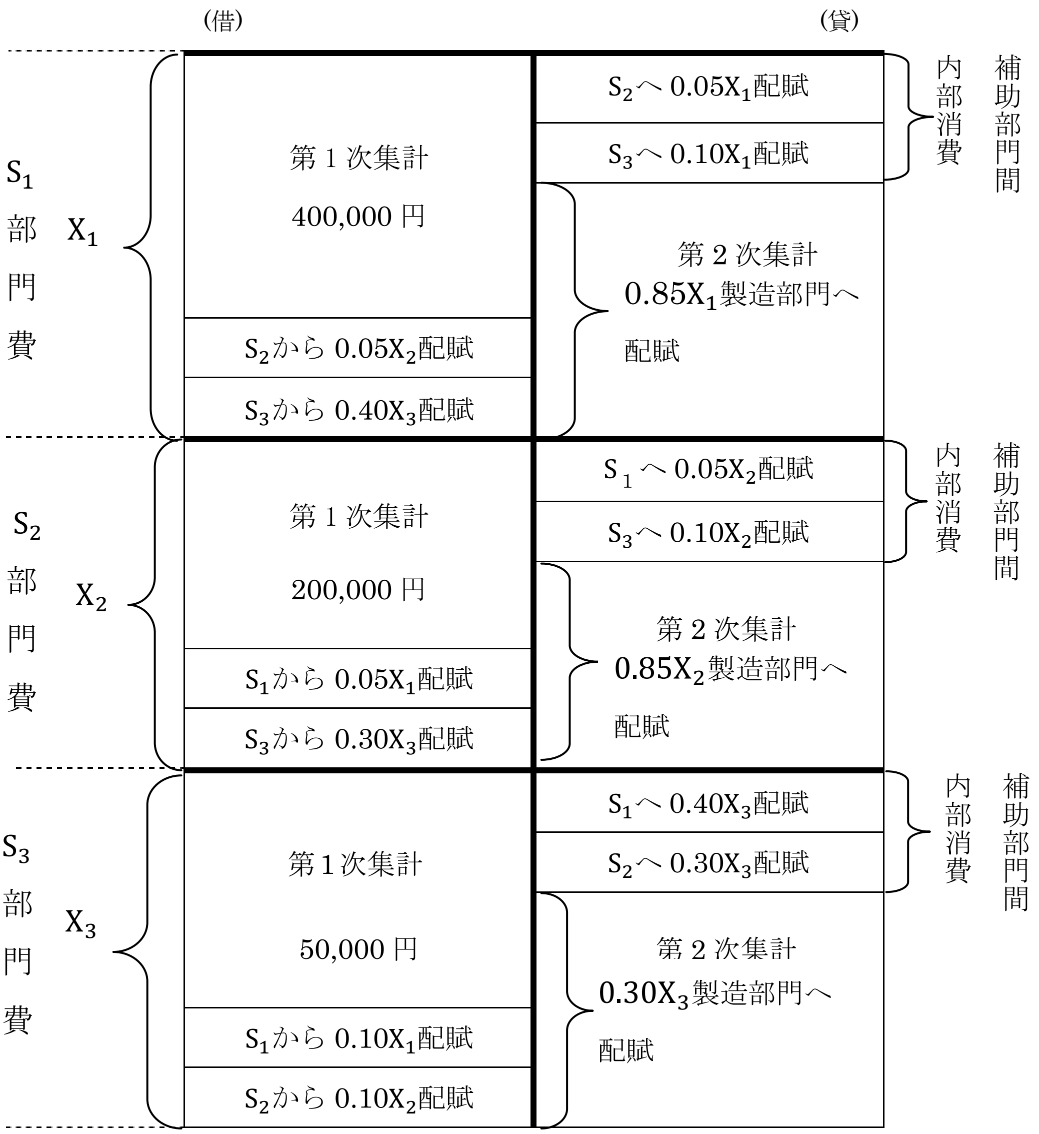
であることから、Minch and Petri(1972)の相互配賦額は理論上の配賦すべき額より過少となる。

5. 一致しない額の意味

Williams and Griffin(1964)から Minch and Petri(1972)まで、および佐藤(1972)、門田(1974)、片岡・井岡(1983)の論文に共通する論点は、「第 1 次集計後の補助部門費合計額と相互配賦後の補助部門費合計額が一致しないこと」にある。しかし、いずれの論文もこの一致しない額が何を意味しているかについて議論がなされていない。そこで本節では、これらの論文を基に、この「一致しない額の意味」について考察を行う。

W&G/C モデルと Livingstone モデルを比較した場合、W&G/C モデルで適用する配賦率が基準を 100 としていることから単純である。そこで、ここからは W&G/C モデルを用いて考察をおこなう。第 1 次集計と第 2 次集計、補助部門相互間の配賦額の関係を各々の補助部門の T 勘定を縦につなげてみると、図 5-1 の関係となる。

図 5-1 第 1 次集計と第 2 次集計の関係



（出典）筆者作成

図 5-1 でわかるように、補助部門相互間のサービス等の授受の対価に相当する額は、互いに内部消費されることにより相殺される。したがって、第 2 次集計により製造部門に 配賦される合計額は、第 1 次集計の総額と一致する。これを証明すると次のようになる。

式(1)～(3)を辺々加算すると、

$$X_1 = 400{,}000 + 0.05X_2 + 0.40X_3 \quad \cdots (1)$$

$$X_2 = 200{,}000 + 0.05X_1 + 0.30X_3 \quad \cdots (2)$$

$$X_3 \;=\; 50{,}000 + 0.10X_1 + 0.10X_2 \qquad \cdots \quad (3)$$

$$0.85X_1 + 0.85X_2 + 0.30X_3 = 650{,}000 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)$$

式(22)が意味するのは、製造部門へ配賦される第 2 次集計の合計額（$0.85X_1+0.85X_2+0.30X_3$）と第 1 次集計後の補助部門費合計額（650,000 円）が同じ値であることを示している。

第 1 次集計後の補助部門費合計額は、組織外部から提供されたサービス等の対価として組織外に流出した財貨の額の割当分、つまり、「組織外に実際に支払われた費用（原価）の割当額」である。これに対し、相互配賦後の補助部門費合計額 X_i は、第 1 次集計された額に、他の補助部門からのサービス等の対価としての額を加えたものである。これは、「その部門で実際に消費された費用の額」を示している。組織外部から提供されたサービス等の対価の額（原価額）のうち、当該部門に直課・配賦されるべき額は第 1 次集計においてすでに配賦済みであることから、「他の部門からの配賦額」は、外部から提供されたサービス等の額（原価額）の直接の割当ではなく、他の部門で新たに創造されたサービス等の提供に対する対価の額である。

自家発電の場合の動力部門を例に考えてみる。動力部門には第 1 次集計により、燃料費、労務費、発電機等施設設備の原価償却費などの合計額が配賦される。動力部門はこれら燃料、人員、施設設備などを消費・使用することにより発電し、これを供給する。つまり動力部門には、燃料、人員、施設設備などがインプットされ、これらはその対価として組織外部に流出した財貨の額として、第 1 次集計にて認識される。そして、動力部門よりアウトプットされるサービス等は、電力である。したがって、インプットされるサービス等とアウトプットされるサービス等には、質の変化が起きている。動力部門より電力の提供を受ける部門が相互配賦で認識する額は、当該部門における消費電力量の対価の額であって、動力部門に第 1 次集計された燃料費、労務費、発電機等施設設備の減価償却費などの割当額ではない。

これまでの計算式からわかるように、補助部門間の相互配賦の額は、第 1 次集計の額と配賦率によって決まる。相互配賦法を W&G/C モデルで解く場合、未知数はその部門で実際に消費された費用の額 X_i である。配賦率を所与としているので方程式の係数は確定する。また、第 1 次集計の額により定数項が決まることで、方程式の解 X_i は算出され一定の数値に決まる。算出された X_i と第 1 次集計額との差額として、補助部門間の相互配賦の額も一

定の数値に決まる。つまり、「他の部門からの配賦額」は、部門間サービス等の対価として実際に財貨が組織外に支出された額ではなく、第 1 次集計額との相対的価額として決まる。

Manes(1965)は、第 1 次集計後の補助部門費の総計 $\sum S_i$ の額と相互配賦後の補助部門費の総計 $\sum X_i$ の額が一致せず、$\sum X_i$ の額が $\sum S_i$ の額を上回っていることを批判したが、これらの差額の有無は「他の補助部門からのサービスの対価としての額」の認識の有無と同じ意味をもつ。部門間の関係が相互依存の関係にあるとするのであれば、互いにサービス等の授受を認識することは当然であり、部門間サービス等の授受の対価を第 1 次集計の額の相対的価額として認識しても、W&G/C モデルは第 1 次集計後の補助部門費合計額と製造部門へ配賦される第 2 次集計の合計額が一致していることから、原価計算上何ら不都合はない。したがって Manes の指摘は不適切といわざるを得ない。

6. W&G/C モデルの一般形と H/S 条件の成立

本節では、W&G/C モデルが、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって一般的にも表現されることを示し、産業連関分析と同様の分析が可能となること、および、部門間の協働による利得の相対的値が「Leontief の逆行列」によって算出されることを示す。また「Hawkins - Simon の条件(H/S 条件)」が、W&G/C モデルに非負解が存在するための必要十分条件であることを証明する。また、本稿第 3 節 W&G/C モデルでは議論を容易にするために、製造部門 P_i（ i = 1,2,3 ）、補助部門 S_i（ i = 1,2,3)の数を 3 とし、自家消費はないものとして考察したが、本節では、部門数を一般的にそれぞれ m、n とする。自家消費ありとしても同様である。

(1) W&G/C モデルと Leontief 行列

まず、W&G/C モデルが、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって一般的にも表現されることを示し、産業連関分析と同様の分析が可能となること、および、部門間の協働による利得の相対的値が「Leontief の逆行列」によって算出されることを示す。

部門間の配賦率は以下のとおり与えられているとする。

表 6-1 配賦率表

		補助部門			
		S_1から	S_2から	・・・	S_nから
補助部門	S_1に対し	a_{11}	a_{12}	・・・	a_{1n}
	S_2に対し	a_{21}	a_{22}	・・・	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	S_nに対し	a_{n1}	a_{n2}	・・・	a_{nn}
製造部門	P_1 に対し	b_{11}	b_{12}	・・・	b_{1n}
	P_2に対し	b_{21}	b_{22}	・・・	b_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	P_mに対し	b_{m1}	b_{m2}	・・・	b_{mn}
$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}$		1.00	1.00	1.00	1.00

（出典）筆者作成。

いま、X_i（i =1,⋯,n）は、他の補助部門からのサービス等の提供に係る原価配賦を受け取った後における補助部門S_iの原価、F_i（i=1,⋯,n）は、第 1 次集計後の補助部門S_iの原価、a_{ij}（i =1,⋯,n、j =1,⋯,n）は配賦率を表すものとすると、W&G/C モデルは次のように表わせる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

相互配賦後の各補助部門の借方合計額をベクトル $\boldsymbol{X}$ 、第 1 次集計額をベクトル $\boldsymbol{F}$、補助部門間の配賦率を行列 $\boldsymbol{A}$、補助部門から製造部門への配賦率を $\boldsymbol{B}$ とすると、

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}、\qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}、$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}、\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

となるが、これらのベクトル、行列の要素は定義された意味からすべて非負である。
W&G/C モデルの補助部門に関する一般形は以下のようになる。

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{AX} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (1)$$

$\boldsymbol{I}$を単位行列として式(1)を$\boldsymbol{X}$について整理すると、

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (2)$$

W&G/C モデルの行列方程式(2)は産業連関分析の基本モデルである、「Leontief の基本方程式」とよばれる式と同形である。また行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$は「Leontief の行列」とよばれる。

仮に $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$ であれば、行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$に逆行列が存在するので、

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{F} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \quad (3)$$

となり Leontief の基本方程式の解として W&G/C モデルの相互配賦後の借方合計額である、ベクトル$\boldsymbol{X}$をもとめることができる。

この逆行列$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$は「Leontief の逆行列」とよばれる。このように W&G/C モデルは Leontief の基本方程式と同形であることから産業連関分析と同様の分析が可能となる。たとえば特定の補助部門において設備投資をするなど、第 1 次集計額の一部が増額されることによる他の部門に及ぼす経済効果が、事前に評価可能となる。また $\sum_{i=1}^{n} X_i$ と $\sum_{i=1}^{n} F_i$ との差額が、部門間の協働による利得の相対的値として算出されることは第 5 節で指摘した。

(2) Hawkins - Simon の条件

ここでは、「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって表現される W&G/C モデルが、

「Hawkins - Simon の条件(H/S 条件)」を満たし、W&G/C モデルに必ず非負解が存在することを証明する。

命題：　「Leontief 行列」と呼ばれる行列によって表現される W&G/C モデルには必ず非負解が存在する。

証明：　Leontief の基本方程式が以下のように与えられているとき、

$$
\begin{array}{l}
(1-a_{11})X_1 \quad -a_{12}X_2 - \quad \cdots \quad -a_{1n}X_n = F_1 \\
-a_{21}X_1 + (1-a_{22})X_2 - \quad \cdots \quad -a_{2n}X_n = F_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-a_{n1}X_1 \quad -a_{n2}X_2 - \quad \cdots \quad (1-a_{nn})X_n = F_n
\end{array}
$$

この線型方程式系に、

$$X_1 = X_2 = \cdots X_n = 1$$

を代入して得られる左辺値は正値になる。このことは、係数行列が優対角性をもつことから自明である。したがって、この正値を右辺に持つような線型方程式系は、

自明解：$X_1 = X_2 = \cdots X_n = 1$

を持つ。二階堂(1960)によれば、このことから、この線型方程式系は、任意の右辺値（すべて正値）にたいして非負解をもつことが、det（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）＞ 0（Hawkins - Simon の条件）との同値性を利用することにより、証明されている。（二階堂(1960)（pp.11-19）を参照）なお、解の存在そのものは、優対角行列の正則性からただちに明らかである。

証了

(3) 2 部門ケースにおける直接証明

前節における、二階堂(1960)の証明は数学的帰納法によっているため、会計学的な条件との対比を容易には行うことができない。そこで、ここでは、このことを直截的に明示する目的から、n = 2 のケースについて、直接証明を与える。以下、その証明部分のみを示す。

証明：　表 6-1 配賦率表より、

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$　（j = 1 ,・・・,n）　であることから、

補助部門間の配賦行列 $\boldsymbol{A}$ の第 j 列和、$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ が 1 以上はないことは、$\boldsymbol{A}$ が補助部門の配賦率であることからありえない。したがって、

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \quad (j = 1,・・・,n)$$

この補助部門間の配賦行列 $\boldsymbol{A}$ の列和条件は Solow の（列和）条件とよばれる。

ここからは、議論を簡素化させるために補助部門をS_1 、S_2 の 2 部門とする。

Leontief 行列($\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$) は、

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{pmatrix}$$

となるので、式(2) ($\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$)$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}$ は、

$$\begin{pmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad ・・・・ \quad (4)$$

（$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$）に逆行列が存在するには正則条件、det ($\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$) $\neq 0$ をみたさなければならない。つまり、

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) \end{vmatrix}$$

$$= (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} \neq 0$$

であると($\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$)に逆行列が存在する。

そこで Solow の（列和）条件より、$a_{11} + a_{21} < 1$， $a_{12} + a_{22} < 1$ であるから、

$$1 - a_{11} > a_{21} > 0, \quad 1 - a_{22} > a_{12} > 0$$

$$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) > a_{12}a_{21} > 0$$

となるので、

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0 \quad ・・・・ \quad (5)$$

$$\therefore \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \neq 0$$

よって、正則条件がみたされることから($\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$)に逆行列が存在する。

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22}) & a_{12}\\ a_{21} & (1-a_{11})\end{pmatrix}$$

となり、式(4) の行列方程式は以下のように解ける。

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22}) & a_{12}\\ a_{21} & (1-a_{11})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix}(1-a_{22})F_1+a_{12}F_2\\ a_{21}F_1+(1-a_{11})F_2\end{pmatrix}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\quad(6)$$

第 1 次集計額 F_i 、配賦率 a_{ij} はともに非負である。配賦率が 1 を超えることはないので、$(1-a_{ij})$ も正値である。したがって、式(6)における右辺のベクトルの各要素は非負であることから、相互配賦後の各補助部門の借方合計額 $\boldsymbol{X}$ の解が非負であるための必要十分条件は、以下で与えられる。

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})>0\quad\cdot\cdot\cdot\cdot\quad(7)$$

証了

式(7)は、Leontief 行列が正則であるための条件の $\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$ を含んだ上で、より強い条件になっている。これは Hawkins‐Simon の条件（H/S 条件）とよばれる。

以上の直接証明において明らかになることは、Solow の（列和）条件成立が決定的に重要であるということである。したがって、Solow の（列和）条件が成立する限り H/S 条件は成立する。補助部門、製造部門が複数存在するという、部門別原価計算の構造から常に、

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}<1\qquad(j=1,\cdot\cdot\cdot,n)$$

となり、Solow の（列和）条件は成立する。つまり「W&G/C モデルは常に非負解が存在することになる。」ということを意味している。

おわりに

本稿では、Williams and Griffin(1964)から Minch and Petri(1972)までの４つのモデルについて検討を行った。その結果、Manes モデルと Minch & Petri モデルは、設定する未知数に対して適用する配賦率が適切ではないことが判明した。Livingstone(1968) は、Manes(1965) の考え方「補助部門 S_i の製造部門に配賦されるべき補助部門費 X_i' は、他の補助部門からの原価受取を借記し、かつ他の補助部門に対する原価割当を貸記した後にはじめて確定できるものである。」を基に使用する配賦率を適正にして計算を行っている。W&G/C モデルと Livingstone モデルは未知数を換えただけの同じ解法であることから同じ結果となる。W&G/C モデルと Livingstone モデルを比較した場合、W&G/C モデルで適用している配賦率が、基準を 100 とするなど単純で明快であることから W&G/C モデルが優れているといえよう。

Manes(1965)が批判した「第１次集計後の補助部門費合計額と相互配賦後の補助部門費合計額が一致しないこと」について、数値例に基づく検討を通じてこの「一致しない額の意味」を考察した。その結果、この一致しない額は、「その部門で実際に消費された費用の額（相互配賦後）」と「組織外に実際に支払われた費用の割当額（第１次集計後）」との差額であり､その具体的数値は第１次集計額との相対的数値として算出されることを指摘した。

相互のサービス等の授受を数値で認識することで、部門間のサービス等の流れを跡付けでき、各部門が協働することによる支出の伴わない部門間内部消費量を具体的数値で把握することが可能となる。協働による部門間内部消費量を部門管理者が互いに認識することで、部門間の意思の疎通、協力が得られると同時に原価計算に対する理解・納得が深まるものと思える。

補助部門間相互依存の実態を反映した原価を算出することは、これまで十分に議論されてきたといえない。逆行列を求める際、手計算 [8)] は困難であり、コンピュータ処理が必要となる。W&G/Cモデルが提唱された 40 年前と比べ、コンピュータが発達した今日において、「補助部門費配賦問題の行列代数による連立方程式の解法」を再考することには意義があるものと思える。

8）手計算で行う場合、未知数を一つずつ減らす（掃き出す）ことによって、未知数の少ない連立方程式にして解を求める「掃き出し法」という方法がとられる。しかしこの方法は３元以上の場合、逆行列を手計算で求めるのは非常に困難で実際的ではない。

参考文献

Johnson, H. T. and R. S. Kaplan. *Relevance Lost*：*The Rise and Fall of Management Accounting.* Harvard Business School Press, 1987.（鳥居宏史訳『レレバンス・ロスト－管理会計の盛衰－』白桃書房、1992 年）.

Kaplan, R. S. “Variable and Self-Service Costs in Reciprocal Allocation Models.” *The Accounting Review,* 1973, *48* (4), pp.738-748.

Livingstone, J. L. “Matrix Algebra and Cost Allocation.” *The Accounting Review*, 1968, *43* (3), pp.503-508.

Manes, R. P. “Comment on Matrix Theory and Cost Allocation.” *The Accounting Review*, 1965, *40* (3) pp.640-643.

Minch, R. and E. Petri. “Matrix Models of Reciprocal Service Cost Allocation.” *The Accounting Review*, 1972, *47* (3) pp.576-580.

Williams, T. H. and C. H. Griffin. “Matrix Theory and Cost Allocation.” *The Accounting Review*, 1964, *39* (3) pp.671-678.

太田哲三(1972)『実践原価計算』同文舘。

岡本清（2000)『原価計算　六訂版』国元書房。

片岡洋一・井岡大度(1983)「補助部門費配賦法と自部門用役の消費について」『原価計算』第 272 号 pp.21-37。

加登豊(1989)『管理会計研究の系譜－計量的意思決定モデルから意思決定支援システムへ－』税務経理協会。

加登豊(1999)『管理会計入門』日本経済新聞社。

小林哲夫(1988)『原価計算〔改訂版〕－理論と計算例－』中央経済社。

小林哲夫((1993)『現代原価計算論－戦略的コスト・マネジメントへのアプローチ－』中央経済社。

小林啓孝(1996)『現代原価計算講義』中央経済社。

櫻井通晴(1993)『原価計算－理論と計算－』税務経理協会。

佐藤精一(1972)「部門別原価計算への経済学的、数学的研究」『會計』第 102 巻第 5 号、pp.3-53。

二階堂副包(1960)『現代経済学の数学的方法』岩波書店。

番場嘉一郎(1963)『原価計算論』中央経済社。

廣本敏郎(1997)『原価計算論』中央経済社。

門田安弘(1974)「<研究ノート>行列代数による部門別原価計算」『大阪府立大學經濟研究』1974,19(4),pp.58-72。

門田安弘(2002)『原価計算〔第 2 版〕』税務経理協会。

山本哲朗(1976)『サイエンスライブラリ現代数学への入門＝14　数値解析入門』サイエンス社。