平面合同変換群の共役類について

梶本ひろし，川道伶生，西昭緑，村田誠一郎
長崎大学教育学部　数理情報講座　数学教室

Conjugacy Classes of Plane Congruence Group

Hiroshi KAJIMOTO, Reo KAWAMICHI, Shoen NISHI and Seiichiro MURATA
Mathematical Department, Faculty of Education, Nagasaki University

概要

Let's E_2 be group of all congruent transformations in a plane, called plane congruence group for short. It is evident that for $\alpha, \beta \in E_2$, the conjugate $\beta\alpha\beta^{-1}$ of α by β is a congruent transformation of the same type with α. That is analogous to the fact that for a linear transformation $A : V \to V$, $P^{-1}AP$ is merely a base change of A in V. We give the conjugate for each type of plane congruence transformation:translations, rotations, reflections and glide reflections. And so we give the decomposition to conjugacy classes of plane congruence group E_2.　We also show that E_2 is not a nilpotent group, but a solvable group.

1　合同変換の定義

ここでは n 次元座標空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点 $\mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と n 次元ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と同一視する。
点 $\boldsymbol{x}$ と原点との距離をノルムといい，

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

と表す。また，点 $\boldsymbol{x}$ と点 $\boldsymbol{y}$ との距離は $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ と表すことができる。

定義 1.1

n 次元座標空間の変換 $T : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が合同変換であるとは

$$|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|,\ {}^{\forall}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$$

が成り立つことをいう。

合同変換 T は直交行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を用いて $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表せる。この $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ と表された形を合同変換の座標系または標準形という。$T = \tau(\boldsymbol{b}) \circ A$ とも書ける。

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の合同変換は鏡映，平行移動，回転，滑り鏡映の 4 種である。平面 $\boldsymbol{R}^2$ における合同変換の記号，標準形，不動点，向きについて以下の表のようになる。向きとは変換前に対して表裏の向きが変わっていなければ +，変わっていればーとする。この向きは行列式 $|A|$ の正負によって決まる。

合同変換	記号	標準形	不動点	向き
(i) 鏡映	m_ℓ	$m_\ell(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} = M(\theta)\boldsymbol{x} + (E - M(\theta))\boldsymbol{c}$	鏡映軸 ℓ	−
(ii) 平行移動	$\tau(\boldsymbol{b})$	$\tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$	なし	+
(iii) 回転	$R(\boldsymbol{c} : \theta)$	$R(\boldsymbol{c} : \theta)(\boldsymbol{x}) = R(\theta)\boldsymbol{x} + (E - R(\theta))\boldsymbol{c}$	回転中心 $\boldsymbol{c}$	+
(iv) 滑り鏡映	$m_{\ell,\boldsymbol{p}}$	$m_{\ell,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} + 2d\boldsymbol{a} + \boldsymbol{p}$	なし	−

(補足)

(i) 直線 $\ell : ax + by = d$ の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{a}|^2 = a^2 + b^2 = 1$ とし，ℓ に関しての鏡映を m_ℓ とする。$M(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ である。また ℓ と x 軸の正の方向となす角を θ とすると，$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -2\sin\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

(ii) 原点中心回転角 θ の回転行列は，$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ である。

(iii) 滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ は鏡映 m_ℓ と ℓ に平行な移動ベクトル $\boldsymbol{p}$ の合成 $m_{\ell,\boldsymbol{p}} = \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_\ell = m_\ell \circ \tau(\boldsymbol{p})$ である。

2 平面の合同変換群

平面 $\boldsymbol{R}^2$ の合同変換全体を E_2 とすると，変換の合成に関して E_2 は群になる。

合同変換の合成について考えていく。

定理 2.1

$A, \tau(\boldsymbol{b}) \in E_2$，$A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ とする。
$A, \tau(\boldsymbol{b})$ の合成 $A \circ \tau(\boldsymbol{b})$ は

$$A \circ \tau(\boldsymbol{b}) = \tau(A\boldsymbol{b}) \circ A$$

となる。

(証明)

$$A \circ \tau(\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{b} = \tau(A\boldsymbol{b}) \circ A(\boldsymbol{x})$$

以上の計算から，$A \circ \tau(\boldsymbol{b}) = \tau(A\boldsymbol{b}) \circ A$ が成り立つ。

ある変換 α から $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}$ という合成変換をつくることを α を β によって共役に移すという。
E_2 に含まれる 4 種類の合同変換を，平行移動の変換 $\tau(\boldsymbol{c})$ によってそれぞれ共役に移した場合，次の定理が成り立つ。

定理 2.2

(1) $\tau(\boldsymbol{c}) \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = \tau(\boldsymbol{a})$
(2) $\tau(\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = R(\boldsymbol{c}; \theta)$
(3) $\tau(\boldsymbol{c}) \circ m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell}$
(4) $\tau(\boldsymbol{c}) \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell,\boldsymbol{p}}$

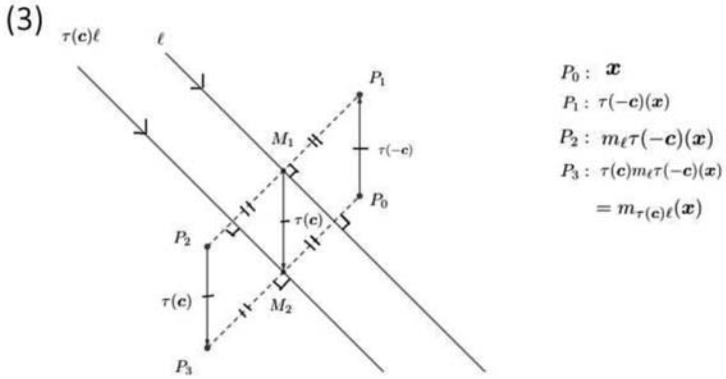
(証明)
(1) は平行移動のみの合成のため移動ベクトルの和として，$\tau(\boldsymbol{c}) \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = \tau(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) = \tau(\boldsymbol{a})$。平行移動同士の合成は可換である。

(2) 原点中心の θ 回転の変換を，平行移動によって共役に移すと，回転の中心が $\boldsymbol{c}$ に移動した θ 回転になることを示す。

$$\begin{aligned}
\tau(\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) &= \tau(\boldsymbol{c}) \circ \tau(-R(\theta)\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \\
&= \tau(\boldsymbol{c} - R(\theta)\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \\
&= \tau(\{E - R(\theta)\}\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \\
&= R(\boldsymbol{c}; \theta)
\end{aligned}$$

(3) 直線 ℓ を鏡映軸とした鏡映の変換 m_ℓ を平行移動の変換によって共役に移すと，鏡映軸が $\tau(\boldsymbol{c})$ によって移動した新たな鏡映変換となることを示す。

$\tau(\boldsymbol{c}) \circ m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c}) = m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell}$ について，図のように $\boldsymbol{x}$，$\tau(-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x})$，$m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x})$，$\tau(\boldsymbol{c}) \circ m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x})$ をむすぶ平行四辺形がある。この平行四辺形の上辺の中点をそれぞれの鏡映軸が通っていて，それに着目すると直線 ℓ は $\tau(\boldsymbol{c})\ell$ に平行移動していることがわかる。



(4) (3) で示したことを利用して示す。

$$\begin{aligned}\tau(\boldsymbol{c}) \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ \tau(-\boldsymbol{c}) &= \tau(\boldsymbol{c}) \circ \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c}) \\ &= \tau(\boldsymbol{p}) \circ \tau(\boldsymbol{c}) \circ m_\ell \circ \tau(-\boldsymbol{c}) \\ &= \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell} \\ &= m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell,\boldsymbol{p}}\end{aligned}$$

E_2 に含まれる 4 種類の合同変換を，直交変換 A によってそれぞれ共役に移した結果は以下のようになる。

定理 2.3

(1) $A \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ A^{-1} = \tau(A\boldsymbol{a})$
(2) $A \circ R(\theta) \circ A^{-1} = R(\pm\theta)$ ($|A| = 1$ のとき $+\theta$, $|A| = -1$ のとき $-\theta$)
(3) $A \circ m_\ell \circ A^{-1} = m_{A\ell}$
(4) $A \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ A^{-1} = m_{A\ell,A\boldsymbol{p}}$

(証明)

(1) 平行移動 $\tau(\boldsymbol{a})$ が直交行列による線形変換によって共役変換されると平行移動の大きさを変えず，方向のみ変換されることを示す。

$A \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ A^{-1} = \tau(A\boldsymbol{a}) \circ A \circ A^{-1} = \tau(A\boldsymbol{a})$

直行行列の性質として $|A\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$ が成り立つので，平行移動のベクトルの大きさを変えず方向のみ変換されている。

(2) を証明するために以下の補題を示す。

補題 2.3.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(-\theta)$$

(証明)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)$$

補題 2.3.2

$$R(2\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(\theta)$$

(証明)

$$R(2\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = M(\theta)$$

(2) 原点を中心として θ 回転する変換を直交行列による線形変換で共役変換をすると，原点を中心とする $\pm\theta$ 回転の変換となることを示す。(回転の向きは直交行列の正負によって決まる。)

$|A|$ の正負によって場合分けして考える。

$|A| = 1$ のとき，A は回転行列 $R(\theta')$ である。よって

$A \circ R(\theta) \circ A^{-1} = R(\theta') \circ R(\theta) \circ R(-\theta') = R(\theta)$

$|A| = -1$ のとき，A は鏡映行列 $M(\theta')$ である。補題 2.3.2 より

$$M(\theta') = \begin{pmatrix} \cos 2\theta' & \sin 2\theta' \\ \sin 2\theta' & -\cos 2\theta' \end{pmatrix} = R(2\theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と回転行列と簡単な鏡映行列の積の形で表せることを利用し，

$A \circ R(\theta) \circ A^{-1} = M(\theta')R(\theta)M(\theta')$

$$= R(2\theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\theta) R(2\theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R(2\theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R(\theta + 2\theta') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= R(2\theta')R(-\theta - 2\theta') = R(-\theta)$

ここで補題 2.3.1 を用いた。

補題 2.3.3

原点を通り法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(|\boldsymbol{n}|^2 = 1)$ を持つ直線 $\ell : ax + by = 0$ を軸とする鏡映変換 $m_\ell = M(\boldsymbol{n})$ を，直交行列 A によって共役に移すと，ℓ を A で線形変換した新たな鏡映軸 $A\ell$ についての鏡映となる。

$$A \circ M(\boldsymbol{n}) \circ A^{-1} = M(A\boldsymbol{n}),\ \ m_{A\ell} = M(A\boldsymbol{n})$$

(証明)

$|\boldsymbol{n}|^2 = a^2 + b^2 = 1$ より，

$$M(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & 1 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(a, b) = E - 2\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{n}$$

$M(\boldsymbol{n}) = E - 2\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{n}$ より，

$$\begin{aligned} A \circ M(\boldsymbol{n}) \circ A^{-1} &= A \circ (E - 2\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{n}) \circ A^{-1} \\ &= E - 2A\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{n}A^{-1} \\ &= E - 2(A\boldsymbol{n})^t(A\boldsymbol{n}) \\ &= M(A\boldsymbol{n}) \end{aligned}$$

(3) 原点を通り法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(|\boldsymbol{n}|^2 = 1)$ とする直線 ℓ' を $\tau(\boldsymbol{c})$ で平行移動した直線を ℓ とする。$(\ell = \tau(\boldsymbol{c})\ell')$ この ℓ を鏡映軸とする変換 m_ℓ について，直交行列によって共役変換を行うと，その直交行列で鏡映軸を線形変換した新たな鏡映軸についての鏡映変換となることを示す。

まず $m_\ell = m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell'}$ であり，定理 2.2(3) より，$m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell'} = \tau(\boldsymbol{c}) \circ m_{\ell'} \circ \tau(-\boldsymbol{c})$。$m_{\ell'}$ は原点を通る直線 ℓ' に関する鏡映なので，$m_{\ell'} = M(\boldsymbol{n})$，したがって，

$$\begin{aligned} A \circ m_\ell \circ A^{-1} &= A \circ m_{\tau(\boldsymbol{c})\ell'} \circ A^{-1} \\ &= A \circ \tau(\boldsymbol{c}) \circ M(\boldsymbol{n}) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) \circ A^{-1} \\ &= A \circ \tau(\boldsymbol{c}) \circ A^{-1} \circ A \circ M(\boldsymbol{n}) \circ A^{-1} \circ A \circ \tau(-\boldsymbol{c}) \circ A^{-1} \\ &= \tau(A\boldsymbol{c}) \circ M(A\boldsymbol{n}) \circ \tau(-A\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

ここで $M(A\boldsymbol{n})$ という変換は補題 2.3.3 より，原点を通り，法線ベクトルが $A\boldsymbol{n}$ の直線に関する鏡映であり，$m_{A\ell'}$ と表せる。

$$\begin{aligned} A \circ m_\ell \circ A^{-1} &= \tau(A\boldsymbol{c}) \circ M(A\boldsymbol{n}) \circ \tau(-A\boldsymbol{c}) \\ &= \tau(A\boldsymbol{c}) \circ m_{A\ell'} \circ \tau(-A\boldsymbol{c}) \\ &= m_{A\tau(\boldsymbol{c})\ell'} \\ &= m_{A\ell} \end{aligned}$$

(4) 軸 ℓ に対する鏡映変換に鏡映軸に平行なベクトル $\boldsymbol{p}$ による平行移動を合成した滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ について，直交行列 A によって共役変換を行うと，A で鏡映軸と平行移動を線形変換した新たな滑り鏡映となることを示す。(3) の結果を利用して，

$$\begin{aligned} A \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ A^{-1} &= A \circ \tau(\boldsymbol{p}) \circ m_\ell \circ A^{-1} \\ &= A \circ \tau(\boldsymbol{p}) \circ A^{-1} \circ A \circ m_\ell \circ A^{-1} \\ &= \tau(A\boldsymbol{p}) \circ m_{A\ell} \\ &= m_{A\ell,A\boldsymbol{p}} \end{aligned}$$

E_2 に含まれる 4 種類の合同変換を，E_2 の任意の変換 β によってそれぞれ共役に移したした場合以下のようになる。

定理 2.4

${}^\forall\beta \in E_2,\ \beta = \tau(\boldsymbol{b}) \circ B$ ($\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^2$, B は 2 次直交行列) とすると

(1) $\beta \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ \beta^{-1} = \tau(B\boldsymbol{a})$

(2) $\beta \circ R(\boldsymbol{c};\theta) \circ \beta^{-1} = R(\beta\boldsymbol{c};\pm\theta)$ ($|B| = 1$ のとき $+\theta$, $|B| = -1$ のとき $-\theta$)

(3) $\beta \circ m_\ell \circ \beta^{-1} = m_{\beta\ell}$

(4) $\beta \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ \beta^{-1} = m_{\beta\ell,B\boldsymbol{p}}$

(証明)

基本的に定理 2.2，定理 2.3 を利用することによって導く。

(1) 平行移動 $\tau(\boldsymbol{a})$ が任意の合同変換によって共役変換されたとき，任意の合同変換の線形変換部分によってのみ大きさを変えず方向のみ変換されることを示す。

$$\begin{aligned} \beta \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ \beta^{-1} &= \tau(\boldsymbol{b}) \circ B \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ B^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{b}) \circ \tau(B\boldsymbol{a}) \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{b} + B\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= \tau(B\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

(2) 点 $\boldsymbol{c}$ を中心とする θ 回転の変換が任意の合同変換 β によって共役変換されたとき，回転の中心は $\beta\boldsymbol{c}$，回転角は $\pm\theta$ の回転となることを示す。(回転の向き $\pm$ は直交行列 B の正負 $|B| = \pm 1$ によって決まる)

$$\begin{aligned} \beta \circ R(\boldsymbol{c};\theta) \circ \beta^{-1} &= \tau(\boldsymbol{b}) \circ B \circ \tau(\boldsymbol{c}) \circ R(\theta) \circ \tau(-\boldsymbol{c}) \circ B^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{b}) \circ \tau(B\boldsymbol{c}) \circ B \circ R(\theta) \circ B^{-1} \circ \tau(-B\boldsymbol{c}) \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(B\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) \circ B \circ R(\theta) \circ B^{-1} \circ \tau(-B\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

ここで $B \circ R(\theta) \circ B^{-1} = R(\pm\theta)$($|B| = 1$ のとき $+\theta$,$|B| = -1$ のとき $-\theta$)，$\tau(B\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) = \tau(\beta\boldsymbol{c})$ より，

$$\begin{aligned} \tau(B\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}) \circ B \circ R(\theta) \circ B^{-1} \circ \tau(-B\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) &= \tau(\beta\boldsymbol{c}) \circ R(\pm\theta) \circ \tau(-\beta\boldsymbol{c}) \\ &= R(\beta\boldsymbol{c};\pm\theta) \end{aligned}$$

(3) 直線 ℓ を鏡映軸とする変換 m_ℓ が任意の合同変換 β によって共役に移されたとき，その ℓ を β によって変換した新たな鏡映軸 $\beta\ell$ についての鏡映変換となることを示す。

$$\begin{aligned}\beta\circ m_\ell\circ\beta^{-1} &= \tau(\boldsymbol{b})\circ B\circ m_\ell\circ B^{-1}\circ\tau(-\boldsymbol{b})\\ &= \tau(\boldsymbol{b})\circ m_{B\ell}\circ\tau(-\boldsymbol{b})\\ &= m_{\tau(\boldsymbol{b})B\ell}\\ &= m_{\beta\ell}\end{aligned}$$

(4) 軸 ℓ に対する鏡映変換に鏡映軸に平行なベクトル $\boldsymbol{p}$ による平行移動を合成した滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ ついて，任意の合同変換 β によって共役変換を行うと，β によって変換した新たな軸 $\beta\ell$ についての鏡映変換とその鏡映軸と平行な平行移動 $\tau(B\boldsymbol{p})$ の合成変換による新たな滑り鏡映となることを示す。このとき $B\boldsymbol{p}$ は元のベクトル $\boldsymbol{p}$ と大きさが等しい。

$$\begin{aligned}\beta\circ m_{\ell,\boldsymbol{p}}\circ\beta^{-1} &= \tau(\boldsymbol{b})\circ B\circ\tau(\boldsymbol{p})\circ m_\ell\circ B^{-1}\circ\tau(-\boldsymbol{b})\\ &= \tau(\boldsymbol{b})\circ\tau(B\boldsymbol{p})\circ B\circ m_\ell\circ B^{-1}\circ\tau(-\boldsymbol{b})\\ &= \tau(B\boldsymbol{p})\circ\tau(\boldsymbol{b})\circ B\circ m_\ell\circ B^{-1}\circ\tau(-\boldsymbol{b})\\ &= \tau(B\boldsymbol{p})\circ m_{\beta\ell}\\ &= m_{\beta\ell,B\boldsymbol{p}}\end{aligned}$$

定理 2.4 で示したことを下の表のように纏めてみると，共役により合同変換の種類（平行移動，回転，鏡映，滑り鏡映）は変わらず，鏡映や回転変換の基準の枠組となる鏡映軸や回転中心が変換されていることがわかる。また平行移動や滑り鏡映の移動ベクトルの大きさ，回転の角の大きさは変わらない。

合同変換	記号	枠
(i) 鏡映	$\beta\circ m_\ell\circ\beta^{-1}=m_{\beta\ell}$	鏡映軸 $\beta\ell$
(ii) 平行移動	$\beta\circ\tau(\boldsymbol{a})\circ\beta^{-1}=\tau(B\boldsymbol{a})$	平行移動ベクトル Ba
(iii) 回転	$\beta\circ R(\boldsymbol{c}:\theta)\circ\beta^{-1}=R(\beta\boldsymbol{c}:\pm\theta)$	回転中心 $\beta\boldsymbol{c}$
(iv) 滑り鏡映	$\beta\circ m_{\ell,\boldsymbol{p}}\circ\beta^{-1}=m_{\beta\ell,B\boldsymbol{p}}$	鏡映軸 $\beta\ell$, 移動ベクトル Ba

次に E_2 の部分群として直交群 $O(2)$ と平行移動全体 T を定義し，半直積 $E_2=T\rtimes O(2)$ を示そう。

例 1(原点を固定する合同変換全体 $O(2)$)

E_2 に含まれ座標原点を固定する合同変換は線形変換であることが証明され (e.g. [2])，それら全体の集合 $O(2)$ は直交群と呼ばれる。

$O(2)=\{A|\,{}^tAA=A^tA=E$ となる 2 次の線形変換$\}<E_2$

例 2(平行移動全体 T)

E_2 に含まれる平行移動の合同変換全体の集合を T とする。
$T = \{\tau(\boldsymbol{a}) | \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^2\} = \tau(\boldsymbol{R}^2)$
T は E_2 の正規部分群である: $T \lhd E_2$

T が E_2 の正規部分群であることは，定理 2.4 の (1)。

定理 2.5

合同変換群 E_2 は，T の $O(2)$ による半直積: $E_2 = T \rtimes O(2)$。

(証明)
$T \lhd E_2$ かつ $O(2) < E_2$ であり，E_2 の任意の合同変換 α は，$\alpha = \tau(\boldsymbol{b}) \circ A$ のように直交行列 $A \in O(2)$ と $\tau(\boldsymbol{b}) \in T$ の積で表されるため，$E_2 = T \cdot O(2)$。また T と $O(2)$ の共通部分は恒等変換 $e = id$ である：$T \cap O(2) = \{e\}$。何故なら $g = \tau(\boldsymbol{b}) = A \in T \cap O(2)$ とすると，原点 $\mathbf{0}$ をあてて $\boldsymbol{b} = \tau(\boldsymbol{b})\mathbf{0} = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\therefore g = \tau(\mathbf{0}) = id$。以上より，$E_2 = T \rtimes O(2)$。

任意の合同変換は $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ 即ち $T = \tau(\boldsymbol{b}) \circ A$ と一意的に表され，$\tau(\boldsymbol{b}) \circ A = (\boldsymbol{b}, A) \in T \rtimes O(2)$ と書くと，合同変換の積は以下のようになる：$T_i = \tau(\boldsymbol{b}_i) \cdot A_i$ $(i = 1, 2)$ に対して

$$T_1 \cdot T_2 = \tau(\boldsymbol{b}_1)A_1 \cdot \tau(\boldsymbol{b}_2)A_2 = \tau(\boldsymbol{b}_1)\tau(A_1\boldsymbol{b}_2)A_1A_2 = \tau(\boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2)A_1A_2$$

対応して

$$(\boldsymbol{b}_1, A_1)(\boldsymbol{b}_2, A_2) = (\boldsymbol{b}_1 + A_1\boldsymbol{b}_2, A_1A_2)。$$

また逆元は，$T = \tau(\boldsymbol{b}) \circ A = (\boldsymbol{b}, A) \in E_2$ に対して

$$T^{-1} = A^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) = \tau(-A^{-1}\boldsymbol{b})A^{-1} \quad \text{or} \quad (\boldsymbol{b}, A)^{-1} = (-A^{-1}\boldsymbol{b}, A^{-1})。$$

例 3(向きを保つ合同変換全体 E_2^+)

E_2 の中で回転と平行移動の合同変換全体を E_2^+ とする。
$E_2^+ = \{\tau(\boldsymbol{a}) \circ A | \boldsymbol{a} \in R^2, A \in SO(2); 2\text{ 次の回転行列}\} = T \rtimes SO(2) \lhd E_2$

3　平面の合同変換群の共役類について

平面合同変換群 E_2 を共役類によって分割していく。

(方針) E_2 に含まれる合同変換は平行移動，鏡映，回転，滑り鏡映の 4 種類であり，それぞれの共役類を定理 2.4 などを用いて求める。その際に重複がないように代表元のとりかたやその範囲に留意する。

群の元 α をとるとき，$C(\alpha)$ は代表元 α を含む共役類のこととする。

(i) 恒等変換 $e = id$ の共役類：それ自身のみである $C(e) = \{e\}$。

(ii) 平行移動の共役類：定理 2.4(1) より $^{\forall}\beta = \tau(\boldsymbol{b}) \circ B \in E_2,\ \beta \circ \tau(\boldsymbol{a}) \circ \beta^{-1} = \tau(B\boldsymbol{a})$
直行行列の性質として $|B\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$ が成り立つので，平行移動のベクトルの大きさを変えず方向のみ変換されている。このことから $\tau(\boldsymbol{a})$ の共役類は $\tau(\boldsymbol{a})$ と移動ベクトルの大きさが等しい平行移動の変換の集合である。よって平行移動の部分集合 T は代表元を $\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$(恒等変換にならないように $t > 0$) とし，ベクトルの大きさの実数倍ごとに共役類に分かれる。

$$T \setminus \{e\} = \bigcup_{t>0} C(\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix})$$

(iii) 鏡映の共役類：定理 2.4(3) より，$\beta \circ m_\ell \circ \beta^{-1} = m_{\beta\ell}$ であるから，鏡映の変換 m_ℓ の共役類は鏡映変換全体の集合である。したがって代表元を m_{ℓ_0}(ℓ_0 は x 軸) とし，鏡映変換全体の集合それ自体が 1 つの共役類 $C(m_{\ell_0})$ を成す。

(iv) 滑り鏡映の共役類：定理 2.4(4) より $\beta \circ m_{\ell,\boldsymbol{p}} \circ \beta^{-1} = m_{\beta\ell,B\boldsymbol{p}}$ であり，滑り鏡映の鏡映軸の位置と滑り移動ベクトルの方向は変わるが，滑り移動ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $B\boldsymbol{p}$ の大きさは等しいままである。よって滑り鏡映 $m_{\ell,\boldsymbol{p}}$ の共役類は滑り移動ベクトルの大きさが $\boldsymbol{p}$ と等しい滑り鏡映の集合である。よって滑り鏡映は代表元を $\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \circ m_{\ell_0}$($\ell_0$ は x 軸，（滑らない）鏡映にならないように $t > 0$) とし，滑り移動ベクトルの大きさの実数倍ごとに共役類に分かれる。

$$\{\text{ 滑り鏡映全体 }\} = \bigcup_{t>0} C(\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \circ m_{\ell_0})$$

(v) 回転の共役類：定理 2.4(2) より $\beta \circ R(\boldsymbol{c};\theta) \circ \beta^{-1} = R(\beta\boldsymbol{c};\pm\theta)$ ($|B| = 1$ のとき $+\theta$,$|B| = -1$ のとき $-\theta$)。ある回転を共役すると，回転角の大きさは変わらず，合同変換の直交変換の正負によって回転の向きは決まり，回転中心が移動された回転となる。つまり回転の共役類は回転の向きや中心の位置によらず，回転角の大きさが等しい回転の集合全体である。したがって代表元を原点中心の θ 回転 $R(\boldsymbol{0};\theta)$，重複なく回転の集合を共役類で分割するために，回転角が 0 のときに恒等変換になるので回転角が 0 のものは範囲に含まない。また回転角の範囲を仮に $0 < \theta < 2\pi$ としたときに θ の回転と $-\theta$ と等しい $2\pi - \theta$ の回転も共役類であり，範囲内で重複が出てしまう。したがって θ の範囲を $0 < \theta < \pi$ とする。$\theta = \pi$ のとき変換は点対称の変換であり，

点対称の全体は 1 つの共役類を成す。回転変換全体の集合は角の大きさごとの共役類と点対称の共役類に分かれる。

$$\{\text{回転全体}\} \setminus \{e\} = \bigcup_{0<\theta<\pi} C(R(\mathbf{0};\theta)) \cup C(R(\mathbf{0};\pi))$$

(i)〜(v) より平面の合同変換群 E_2 は各共役類によって重複なく以下のように分けられる。

定理 3（平面合同変換群 E_2 の共役類分割）

$$E_2 = \{e\} \cup \bigcup_{t>0} C(\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}) \cup C(m_{\ell_0}) \cup \bigcup_{t>0} C(\tau\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \circ m_{\ell_0}) \cup \bigcup_{0<\theta<\pi} C(R(\mathbf{0};\theta)) \cup C(R(\mathbf{0};\pi))$$

4　平面の合同変換群のべき零性と可解性

平面合同変換群 E_2 から交換子群列をつくり，可解群やべき零群であるか調べる。
群 G の元 a, b の交換子を $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ とする。
群 G の 2 つの部分群 A, B に対し，A の元 a と B の元 b の交換子 $[a,b]$ の全体から生成される部分群を $[A,B] :=< [a,b] \mid a \in A,\ b \in B >$ とし，これを A と B の交換子群という。$[A,B] = \{e\}$ となるのは A の任意の元と B の任意の元が可換であるときに限る。

群 G の交換子群は G と G の交換子群 $[G,G]$ でこれを $D(G)$ とかく。群 G の交換子群を $D(G) = D_1(G)$, $D_1(G)$ の交換子群を $D_2(G)$ とし，このように次々に交換子群をとって一般に $D_{i+1}(G) = [D_i(G), D_i(G)]$ とする。すると部分群の列

$$G \supset D_1(G) \supset D_2(G) \supset \ldots \supset Di(G) \supset \ldots$$

をえる。この列を G の交換子群列という。G の交換子群列において $D_r(G) = e$ となる r が存在するとき G を可解群と呼ぶ。
群 G の部分群の列

$$G = \Gamma_0(G) \supset \Gamma_1(G) \supset \Gamma_2(G) \supset \ldots \supset \Gamma_i(G) \supset \ldots$$

を $\Gamma_1(G) = [G,G], \Gamma_2(G) = [G,\Gamma_1(G)], \ldots, \Gamma_i(G) = [G,\Gamma_{i-1}(G)], \ldots$ と次々に G との交換子群をとってできる列とする。この列を G の降中心列という。特に $\Gamma_r(G) = e$ となる r が存在するとき G をべき零群とよぶ。$\Gamma_i(G) \supset D_i(G)$ だから，べき零群であれば可解群でもある。 先ず E_2 がべき零であるかどうか調べる。

定理 4.1

E_2 は以下のように降中心列が無限に続くため，べき零群ではない。

$$E_2 \supset [E_2, E_2] = E_2^+ \supset [E_2, E_2^+] = E_2^+ \supset [E_2, E_2^+] = E_2^+ \supset \ldots$$

(証明)

(i) $[E_2, E_2] = E_2^+$ を示そう。

$^\forall\alpha, \beta \in E_2, \alpha = \tau(\boldsymbol{a}) \circ A, \beta = \tau(\boldsymbol{b}) \circ B$

$$\begin{aligned}[\alpha,\beta] &= \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} \\ &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ A \circ \tau(\boldsymbol{b}) \circ B \circ A^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{a}) \circ B^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ \tau(A\boldsymbol{b}) \circ ABA^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{a}) \circ B^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b}) \circ \tau(-ABA^{-1}\boldsymbol{a}) \circ ABA^{-1}B^{-1} \circ \tau(-\boldsymbol{b}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} - ABA^{-1}\boldsymbol{a} - ABA^{-1}B^{-1}\boldsymbol{b}) \circ ABA^{-1}B^{-1}\end{aligned}$$

$[\alpha,\beta]$ の直交行列による変換 $ABA^{-1}B^{-1}$ に注目すると A, B の行列式の正負によらず，$|ABA^{-1}B^{-1}| = 1$ となる。直交行列の行列式の値が正となるのは回転か平行移動のときのみである。

したがって $[\alpha,\beta] \in E_2^+$ であり，$[E_2, E_2] \subset E_2^+$ となる。

また E_2^+ に含まれる平行移動や回転は E_2 の交換子をつかって次のように表せる。平行移動の場合，

$$\begin{aligned}[\tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}), R(\pi)] &= \tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \circ (-E) \circ \tau(-\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \circ (-E) \\ &= \tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \circ \tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}) \circ (-E) \circ (-E) \\ &= \tau(\boldsymbol{a})\end{aligned}$$

$R(\pi) = -E$ であり，$\tau(-E\boldsymbol{a}) = \tau(-\boldsymbol{a})$ である。次に回転の場合，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と平行な原点を通る直線を鏡映軸とする鏡映の変換 $M(\boldsymbol{n})$ が $M(\boldsymbol{n})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ となることを利用し，

$$\begin{aligned}[\tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\frac{\theta}{2}), M(\boldsymbol{n})] &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\frac{\theta}{2}) \circ M(\boldsymbol{n}) \circ R(-\frac{\theta}{2}) \circ \tau(-\boldsymbol{a}) \circ M(\boldsymbol{n}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\frac{\theta}{2}) \circ M(\boldsymbol{n}) \circ R(-\frac{\theta}{2}) \circ M(\boldsymbol{n}) \circ \tau(-M(\boldsymbol{n})\boldsymbol{a}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\frac{\theta}{2}) \circ R(\frac{\theta}{2}) \circ \tau(-\boldsymbol{a}) \\ &= \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\theta) \circ \tau(-\boldsymbol{a}) \\ &= R(\boldsymbol{a};\theta)\end{aligned}$$

E_2^+ に含まれる任意の元を交換子によって表せるので，$[E_2, E_2] \supset E_2^+$。以上より $[E_2, E_2] = E_2^+$ である。

(ii) $[E_2, E_2^+] = E_2^+$ であることを示す。

先ず $[E_2, E_2^+] \subset [E_2, E_2] = E_2^+$。

次に，交換子 $[a, b]$ において定義から $[b, a] = [a, b]^{-1}$ が成り立つことは明らかである。よって先ほど示した $[\tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\frac{\theta}{2}), M(\boldsymbol{n})] = R(\boldsymbol{a};\theta)$ をこれにあてはめると，

$$\begin{aligned}&[M(\boldsymbol{n}), \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(\tfrac{\theta}{2})] = R(\boldsymbol{a};-\theta) \\ &[M(\boldsymbol{n}), \tau(\boldsymbol{a}) \circ R(-\tfrac{\theta}{2})] = R(\boldsymbol{a};\theta)\end{aligned}$$

となる。これにより交換子 $[E_2, E_2^+]$ によって E_2^+ の任意の回転の変換を表せることができる。任意の平行移動についても交換子 $[E_2, E_2^+]$ によって，$[\tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}), R(\pi)] = \tau(\boldsymbol{a})$ と表せる。よって $[E_2, E_2^+] \supset E_2^+$。以上より $[E_2, E_2^+] = E_2^+$。

(iii) $[E_2, E_2^+] = E_2^+$ であるため，E_2 の降中心列は E_2^+ を無限に繰り返し，E_2 はべき零群ではない。

定理 4.2

E_2 は以下のような交換子群列をもつ群なので可解群である。

$$E_2 \supset [E_2, E_2] = E_2^+ \supset [E_2^+, E_2^+] = T \supset [T, T] = \{e\}$$

(証明)

(i) $[E_2, E_2] = E_2^+$ は定理 4.1 にて証明されている。

(ii) $[E_2^+, E_2^+] = T$ であることを示そう。

$^\forall \alpha, \beta \in E_2^+, \alpha = \tau(\boldsymbol{a}) \circ A, \beta = \tau(\boldsymbol{b}) \circ B$ について (i) より

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta] &= \alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} \\ &= \tau(\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} - ABA^{-1}\boldsymbol{a} - ABA^{-1}B^{-1}\boldsymbol{b}) \circ ABA^{-1}B^{-1}\end{aligned}$$

E_2^+ に含まれているのは，平行移動か回転のみのため A, B は回転行列である。回転行列の積は可換であるため $ABA^{-1}B^{-1} = E$

$[\alpha, \beta] = \tau(\boldsymbol{a} + A\boldsymbol{b} - ABA^{-1}\boldsymbol{a} - ABA^{-1}B^{-1}\boldsymbol{b})$ となり平行移動である。よって $[E_2^+, E_2^+] \subset T$。

また (i) で示したように T に含まれる任意の平行移動は E_2^+ の交換子によって $[\tau(\frac{\boldsymbol{a}}{2}), R(\pi)] = \tau(\boldsymbol{a})$ と表されるため，$[E_2^+, E_2^+] \supset T$。以上より $[E_2^+, E_2^+] = T$。

(iii) T はアーベル群であるから，$[T, T] = \{e\}$。

(i)〜(iii) より，E_2 は，$E_2 \supset [E_2, E_2] = E_2^+ \supset [E_2^+, E_2^+] = T \supset [T, T] = \{e\}$ という交換子群列をもつ可解群である。

参考文献

[1] 浅野啓三　永尾汎，『群論』，岩波書店 (1965)

[2] 川崎徹郎，『文様の幾何学-文様における群作用と対称性-』，牧野書店 (2014)

[3] 河野俊丈，『結晶群』，共立出版株式会社（2015）

[4] 松坂和夫 『線型代数入門』，岩波書店 (1980)

[5] Elmer G.Rees，三村護訳，『幾何学講義』，共立出版株式会社（1992）

[6] 梶本ひろし，上野夏樹，内野将信，浦添彰，　平面における合同変換について，
長崎大学教育学部紀要 第 5 集 (2019, 3 月)