整数四則演算のモデル化

——負数の演算導入のために——

三　野　栄　治*

(昭和54年10月31日受理)

Consistent Modelling of Arithmetical Operations :

Introduction to an expressive treatment of negative numbers

Eiji MINO

(Received, October 31, 1979)

I．はじめに

負の数及びその演算は，中学校第1学年で取り扱われる。

この中学校第1学年という年齢は，平均的な能力の生徒にとって，「具体的一般化」と呼ばれる時期にあたり，したがって，具体的意味づけ・意味論的視点を欠かすことのできない時期である。と同時に，徐々に現われてくる形式的操作への進行という微妙な変化の視点をも，十分に配慮しなければならない期間でもある。

この論文では，この，いわば進行期における，負の数の取り扱い——とりわけ，負数の乗法・除法の導入における取り扱いを，〝実体感表現法〟としてのモデルの一貫性の立場から考察する。そして，その数学的意味と意義を論ずる。

II．負の数の教授上の課題

『温度が1分間に－2℃ずつ上がれば，－3分後には，いまより6℃高くなると考えられる。

したがって，$(-2)\times(-3)=+6$　と表わせる。』

これは，ある教科書（中学校数学　第1学年　昭和54年度用）において，負の数の乗法・除法を取り扱う際の，導入のために用いられている事例である。

いみじくも，すでに Moise, E. E.〔1〕はいっている。

『負の数について与えられている今までの解釈を，もう一度試してみるならば，$^{-}3\cdot{}^{-}4$ に対してはどんな意味もあてはめられない，ということがわかるであろう。$^{-}3$日続けて4ドルの損失があったとか，水が$^{-}3$時間の間タンクの外に流れ出たとかいうのは，無意味なことである』と。

＊長崎大学教育学部数学教室

上述の教科書の記述は，『……－3分後……』と慎重な扱いをしてはいるが，しかし時間は先へと動いていく。『……－3分後には，いまより6℃高くなる……』という記述(論理)は，すなおに生徒に理解されるであろうか。

学習指導要領〔2〕〔3〕では，次のように，数学的な考えだけが述べられているに過ぎない。

『減法も常に可能になるようにするためには，数の範囲を広げなければならないという考え方に立って，数を正の数，負の数にまで拡張する。……負の数を考えることによって，減法を加法の計算とみることが可能となる。……』

加法・減法についてだけしか言及されていないが，乗法・除法についてもその延長線上の考え方で包括していくことを要請している，とみられる。

ここに，教授方法としての工夫が意図されるわけである。

たとえば，上例のような，解釈をもって導入とする立場がある一方，もう一つの典型が，大野〔4〕にみられる。それは，系列的変化に着目させるところから帰納的に〝規則の発見〃を要求する手法（図1），あるいは，いわゆる〝公理的な展開〃によって規則を考えさせる方法（図2）である。

$$\begin{aligned}
(+7)\times(+3)&=21\\
(+7)\times(+2)&=14\\
(+7)\times(+1)&=7\\
(+7)\times\ \ 0\ \ &=0\\
(+7)\times(-1)&=?\\
(+7)\times(-2)&=?
\end{aligned}
\qquad \downarrow \text{7ずつ減る}$$

（図1）

(1)
$$\begin{aligned}
(+3)\times 0&=x\\
(+3)+x&=(+3)\times(+1)+(+3)\times 0\\
&=(+3)\{(+1)+0\}\\
&=(+3)\times(+1)\\
&=(+3) \qquad\qquad \therefore\ x=0
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
(-3)\times(+2)&=x\\
x+6&=x+(+3)\times(+2)\\
&=(-3)\times(+2)+(+3)\times(+2)\\
&=\{(-3)+(+3)\}\times(+2)\\
&=0\times(+2)\\
&=0 \qquad\qquad \therefore\ x=-6
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
(-3)\times(-2)&=x\\
x+(-6)&=(-3)\times(-2)+(-3)\times(+2)\\
&=(-3)\times\{(-2)+(+2)\}\\
&=(-3)\times 0\\
&=0 \qquad\qquad \therefore\ x=6
\end{aligned}$$

（図2）

この大野の範例は，意味づけや解釈を避けて，機械的あるいは代数的に，あるいは構文論的立場から，直接的に生徒に迫っていく方法である，といえよう。

後述のように，中学校第1学年すなわち12^{+}歳では，一般的には，数学の構文論的展開を確立していく以前に，意味論的立場を確立しなければならないという問題に立ち向かわされることになる。しかし，それだけに集中してしまうことも許されない。たとえば，伝統的な負数の意味づけや解釈があるが，その解釈をもって負の数の演算導入とする場合，導

入のつもりが，導入としての機能が得られないことが起こりうる場合があることは，既述の例や，Moise, E. E. の指摘の通りである。一方，論理的構文論的な扱いも，それを受容するだけの発達状況が可能とならなければならない。

III．負の整数——意味論的視点の要請

自然数（正の実数においても）は，たとえば，ものの個数（とか長さを測った結果）として現われてくる。それは，現実に存在するものとして認識することができる。

この意味で，加法や乗法はつねに実行可能である。すなわち，加法や乗法という操作も，その結果としての和や積も，現実への対応が可能である，ということである。

しかし，減法ａ－ｂは，ａ＞ｂのときに限って意味をもって実行することができるが，もしａ＜ｂならａ－ｂは意味をもたなくなる。

数学的には，このような限定をなくして，減法がつねに行なえるようにしたい——。いうまでもなく，その第１ステップは零概念の導入である。ａ－ａ＝０であるような記号０を導入することによって，その突破口は，先ず，ひらかれる。さらに，ａ＜ｂのときａ－ｂ＝－（ｂ－ａ）と規約することによって記号－１，－２，－３，……が導入され，かくして，それらが新しい〝数〟としての位置づけがなされる，ということを，我々に示唆してくれることになる。すなわち，これらの新しい〝数〟を導入するなら，これらの〝数〟を生成してきているもともとの数の世界：自然数の世界が保存し機能している諸規則が，これらの新しい〝数〟においても成立するように定めていかなければならなくなる。

たとえば，分配法則を保存させ機能させるために，（－１）×（－１）＝１と定めることになる，というように。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{なぜなら，もし}(-1)\times(-1)=-1\text{なら，分配法則}\,a(b+c)=ab+ac\text{にお}\\ \text{いて，}a=-1,\ b=1,\ c=-1\text{とすれば}\\ (-1)(1-1)=-1-1\\ \qquad\qquad\quad=-2\end{array}\right\}\cdots(*)$$

かくして，数学的拡張の結果，負の整数は整数の部分クラスを形成し，－１，－２，－３，……は１，２，３，……とまったく同等の整数としての数学的機能を有することになる。

しかし，負数－１，－２，－３，……は，自然数のように，現実における「何者か」が存在しない。そこで，意味づけを要請する。数学的に現実生活の問題を解決しようとする際，負の数は欠かすことのできない機能をもつ。しかしながら，現実への対応において，生徒にとってそれは，しばしば悩みとなる，という現実がある。

たとえば（－１）×（－１）＝１の定義が，先の（図２）のような手続をふんで納得させられるか，あるいは，上述の（＊）のようにいわば反例的論法や論理分析的に取り扱うことができるか，といえば，これも筆者のこれまでの多くの観察によれば，否定的であらざるを得ない。

どのようなシツエーションを設定するかが大きな課題である。

IV．「具体的一般化」の時期

負の数の導入は，現在，中学校第１学年である。しかも，その第１学年でも早い時期の

教材である。年齢でいえば12⁺歳である。

この年齢における思考の特徴はどうであろうか。

知的構造の発達に，段階がある，としたのは，Piaget, J. である。彼によれば，第3段階にあたる具体的操作的思考は7歳前後に始まる。その次の段階：第4段階を形式的操作の段階と名づける。その形式的操作的思考は11歳～12歳頃に始まり，16歳前後に成熟する，としている。〔5〕〔6〕

多くの研究者達も，このような，段階が存在すること，を認めているが，Lovell, K. ら〔7〕〔8〕の意見は，『多くの経験は，これらの年齢（Piaget, J. のいう年齢）は出来る子供達のものであって，平均的な能力の生徒にとっては，形式的操作的思考は13歳～14歳頃に始まり，17歳～18歳において成熟することを示してくれている』としている。さらに，『数の概念は，考えられている（Piaget, J. らの立場）よりも，把握するのにかなりむずかしいもののようである』という実験報告〔9〕などもみられ，これには説得力があるように思われる。

いずれにしても，12⁺歳頃は，具体的操作的思考から形式的操作的思考への，ちょうど進行期にあるといってよい，ということを示唆してくれているといえよう。

Piaget, J. らによれば，具体的操作の段階にひき続いて形式的操作の段階ということで，この進行し移行していく状態については，ほとんど何も触れられていないようにみえる。しかし，Lovell, K. らはこの時期に着目して，具体的操作の段階から形式的操作の段階への〝間にある〃期間をとり上げる。平均的な能力の子どもでいえば，ほぼ11歳から14歳の期間が，この〝間にある〃期間である，という。

中学校段階は，まったくこの期間に対応し，したがって，Lovell, K. らの研究は，教授上，きわめて重要な示唆を与えてくれる，といえよう。

Collis, R. F.〔10〕は，12歳頃から「具体的一般化」の時期に入る，と呼んでいるが，この具体的一般化ということばは，この進行期の特徴を端的に表現している。正の数・負の数の学習がこの時期に行なわれるということを，あらためて認識したい。

具体的一般化とは，より進んだ具体的操作的思考のレベルで獲得し確立したものを一般化しはじめる，ということであるが，それは，二・三の例の基礎の上に（もし必要なら，ただ一つのよく知っている結果が役立てうる）一つの規則を受け入れることが可能である，という一般化であって，論証的に反例を提示したりあるいは条件を制限したりして検証するとかは，それほどでもない，ということである。そのシツエーションに含まれている規則の一意性が，何らかの方法で保証されないなら，一般化が成功しないのである。

ここに，教授上，首尾一貫したモデルが要請されてくる。

なお，この時期には，具体的一般化の他に，形式的操作的思考への発達にとって必要であるところの新しい思考のしかたが，徐々に現われてくることも報告されている。〔7〕ただし，この新しい思考のしかたは形式的操作的思考への発達にとって必要であるが，十分であるというのではない。それは，次のことがらであるという。

- ゆっくりとした進歩であるが，含意命題を取り扱うこと。
- ゆっくりとした出現であるが，2変数の取り扱いから，3変数またはその以上の変数体系を取り扱うこと。

・抽象する能力が増してくる。いわゆる抽象の第３レベル（直観的な照合から離れることができる）に入る。

このことは，現実と可能性の間の相互認識が可能になる，ということである。現実から可能性を見通し，また逆に，可能性から現実を復元したり統合したりすることが出来るようになることは，形式的操作的思考出現の前触れとなるものであって、数学教授上の大事な視点である。

かくして，この年齢では，数学的な活動や具体的操作は，概念形成にとって最も有力なものであり，しかも首尾一貫したモデルによって，一般を認識し抽象できるシツエーションを設定することが，きわめて重要な要請点であるといえる。

Ｖ．教科書にみられる負数のシツエーション

前項で帰結された観点から，わが国の教科書（中学校第１学年）にみられる，負数のシツエーションを考察してみよう。

負の数の意味については，

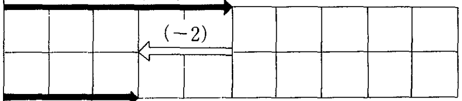
・正の数と同じ単位で表わされ、しかも，反対の性質や方向をもった量を表わす。

・収入と支出，ゲームの得点や失点，資産と借金のような反対の性質，増加・減少というような変化も，ひとつの量とみられ，正の数・負の数で表わされる。

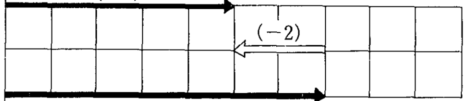
・正の数・負の数が量を表わすだけでなく，ひとつの順序に並んだものの位置を表わすこと。

という伝統的な扱い〔11〕が，現在の教科書でも機能している。

続く負の数の加法・減法では，上の意味づけを受けて，具体的な事例によって，帰納的に演算の規則を納得させていくことが広くみられるが，１点からの移動（ａ＋ｂにおいて，ａを位置，＋ｂを移動して考える）として図的に把えさせたり，矢線ベクトルの考えを図式化したシツエーションで理解させたりすることもなされるようになってきている。その矢線ベクトルの考えを図式化した取り扱いの原型を，Breidenbach, W.〔12〕にみる。（図３－１，図３－２）



（図３－１）



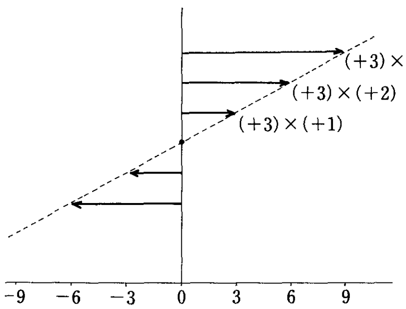
（図３－２）

この図式は，ベクトルの和の，いわゆる〝三角形の法則〟に基づく表示であるが，１次元上に退化させ，しかも教授的観点から加法の思考過程を抽出し，その順序性に従って視覚化したもので，興味ある方法である。

さて，教科書では，加法・減法にひき続いて，乗法・除法が学習される。そこでのシツエーションは，残念ながら加法・減法からの一貫性を欠くことになる。それは，加法・減

法では有力であったベクトルの考えの限界を示したことにもなっているが，冒頭で例示したような，解釈された事例を導入例として，乗法規則を説得しようとする立場が増えてくる。中には，数学の考えに逆らうような順序によって概念を形成させよう，あるいは，理解を押しつけようという場面さえみられるようである。このような取り扱いの場合，生徒にうまく対応しないが，それ以後の訓練の中で使い慣れさせていく，という共通した特徴がみられる。

次の(図4)は，ある教科書の特徴ある導入事例であるが，この図式について，小川〔13〕



(図4)

×	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
−5	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
−4	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
−3	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
−2	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
−1	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・	・
0	・	・	・	・	・	・	0	0	0	0	0
1	・	・	・	・	・	・	1	2	3	4	5
2	・	・	・	・	・	・	2	4	6	8	10
3	・	・	・	・	・	・	3	6	9	12	15
4	・	・	・	・	・	・	4	8	12	16	20
5	・	・	・	・	・	・	5	10	15	20	25

(図5)

は，『矢線のスカラー倍という考えを前面に出した指導で，有効である』としている。しかし，むしろ大野〔4〕(図1)と発想において同じであり，矢線の系列的変化から，生徒達は帰納していく。解釈を図式化したに過ぎない。

系列的変化から帰納させていくシツエーションは，機械的な（図1）のような方法が多いが，座標平面的な図式（わが国ではないが）もある。〔14〕(図5)

モデルの一貫性からみて，乗法・除法において，具体的操作経験の再構成が乱れてくることなる。加減と乗除が別の思想に属するものとして，それぞれ孤立的に刻み込んでいくようになることは，残念である，といわざるを得ない。

VI. 負の整数の四則演算のためのモデル化

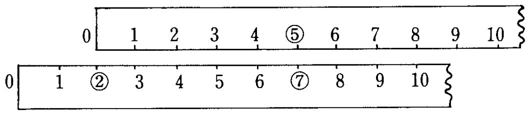
負の数を，中学校第1学年で取り扱うときに要請されることがらを，すでに指摘したが，なおもう一つ付加しておこう。

小学校で，自然数の世界ですでに学習しているように，加法・減法は1次元上の配列であり，乗法・除法は長方形配列（2次元の広がり）することであった。

この数学的な考えをも生かして，負の整数の四則演算のためのモデル化を試みてみよう。

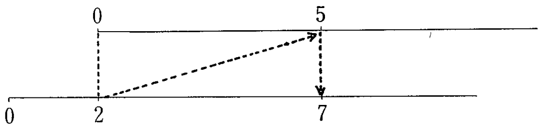
1．2本の数直線（ものさし）は，加法や減法を考えるときのモデルとなりうることは，既習である。(たとえば，『かずの線とたしざん』　小学校第2学年　など)

そのような，いわゆる計算尺としての操作という立場からみれば，「2＋5は，下尺の目盛2を上尺の目盛0に合わせ，その上尺の目盛5に合う下尺の目盛を読みとると，それが2＋5＝7を表わしている」ことには慣れている。（図6－1）



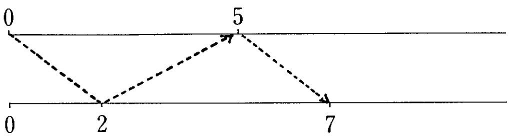
2＋5＝7
同時に，7－5＝2
（図6－1）

換言すれば,「加法単位0に被加数2を対応させ，次にその2に加数5を対応させ，5に対応する値を平行な位置に求める」ことである。（図6－2）（図6－3）



（図6－2）

さらに，一般的にいえば，次の通りである。



（図6－3）

同じ尺度化された2つの数直線ℓ, mが平行（同じ向き）であるとき，平行射影[註1]を次のようにとる。

$p_1 : \ell \to m$, $b = p_1(a)$

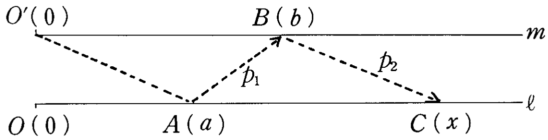
$p_2 : m \to \ell$, $x = p_2(b)$

このとき，合成射影p_2p_1は

$p_2p_1 : \ell \to \ell$, $x = p_2p_1(a)$

$= a + b$

である。



（図6－4）

すなわち，p_1，p_2は平行射影であるから，α，βを任意定数として

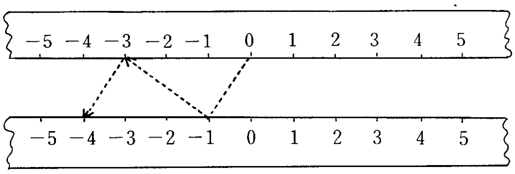
$b = a + \alpha$, $x = b + \beta$

したがって，p_2p_1は

$x = (a + \alpha) + \beta = a + (\alpha + \beta)$

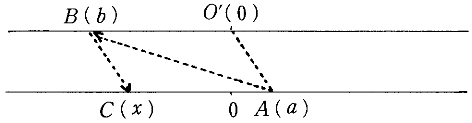
である。

$\alpha + \beta = b$である場合が，この加法の原理である。



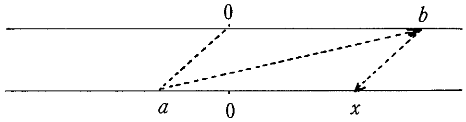
（図7－1）

図の上でいえば,「加法の単位$O'(0)$から被加数$A(a)$への対応に平行な対応を，加数$B(b)$から求めると，和$C(x)$である。」（図6－4）



（図7－2）

2．上の数直線（ものさし）を，負の数をも目盛ったものに取り換える。（図7－1）



（図7－3）

それまでの生徒の経験の文脈の中に，この場面を導入することによって，ℓ，m 上にそれぞれ任意に値 $A(a)$，$B(b)$をとるとなれば，数直線の負の部分上にも点を定めることは自然であり（図７－２），具体的ないくつかの，平行射影の合成から，結局，a，b が正・負いずれであっても，「xを，和 $a+b$ と定めるのが自然なようである」。（図７－２，３）

そこで，「そのように定義しよう」と思考が進められる。

整数の加法は，数学的には「平行線における平行射影の合成」であり，図的には「$O'(0)$ から $A(a)$ への対応に平行な対応を，$B(b)$ から求めること」となる。

減法についても，まったく同様である。

３．自然数の学習で，乗法・除法は２次元の広がりをもった長方形配列することである，という原理を知っている。そこで，２本の数直線（ものさし）を平行のままではなく，直交させてみる。（図８－１）　なお，一般には，直交でなくてよく，交わる状態でよい。

この図は，２×５＝10を示している。

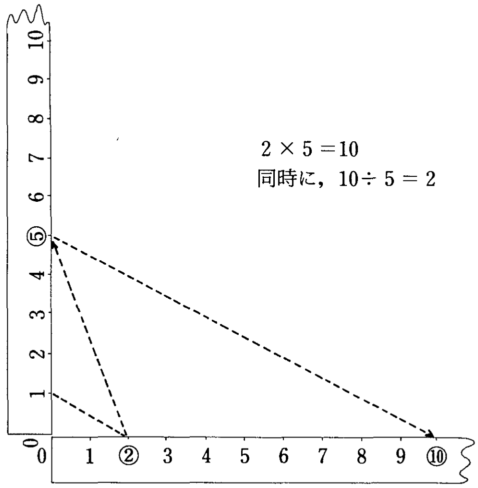
操作としては，加法のときと同様に，「横尺の目盛２に，縦尺の目盛５を対応させ，その縦尺の５に対応する横尺の目盛を読みとると，それが２×５＝10である」

なお，ここでの対応は，やはり平行射影[註2]であって，$E'A$に平行な対応によって，求める値が得られる。（図８－２）

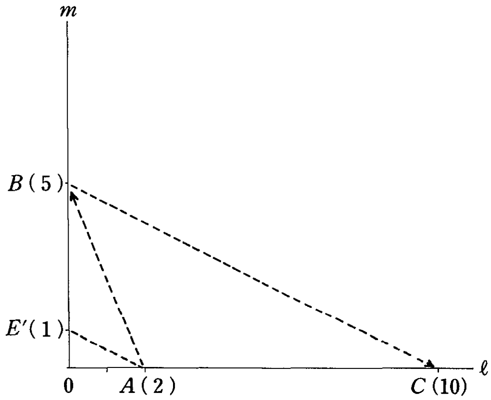
すなわち，２つの数直線ℓ，mが，それぞれ０の点（原点）で交わるとき，平行射影p_1，p_2を次のようにとる。

$p_1 : \ell \to m,\ b = p_1(a)$

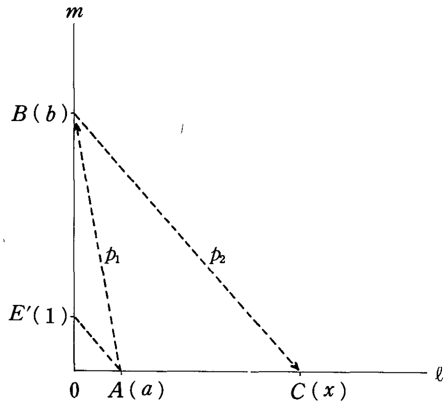
$p_2 : m \to \ell,\ x = p_2(b)$



（図８－１）



（図８－２）



（図８－３）

このとき，合成射影p_2p_1は，

p_2p_1 : $\ell \to \ell$，$x = p_2p_1(a) = a \times b$

である。

換言すれば，p_1，p_2は平行射影であるから，k，hを負でない任意定数として

$b = ka$，$x = hb$

したがって，p_2p_1は，

$x = h(ka) = (hk)a$

である。

$hk = b$である場合が，この乗法の原理である。

自然数での乗法が，このモデルによって確かめられるなら，加法で取り扱った整数への拡張がそのまま，ここでも生かされる。

すなわち，ものさしを負の数をも目盛った数直線に取り換えればよい。一般には斜交でよいが，これまでとのつながりで直交にするのがよいであろう。もちろん，原点で互いに交わらせる。横尺上及び縦尺上にそれぞれ任意に値をとらせ，具体的一般化の手法に従って帰納させれば，結局，a，bが正•負いずれであっても，「xを，積$a \times b$と定めるのが自然なようである」。

そこで，「そのように定義しよう」と思考が進められる。(図９－１，２，３，４)

整数の乗法は，数学的には「交わる２直線における平行射影の合成」であり，図的には「$E'(1)$から$A(a)$への対応に平行な対応を，$B(b)$から求めること」となる。

除法についても，まったく同様である。

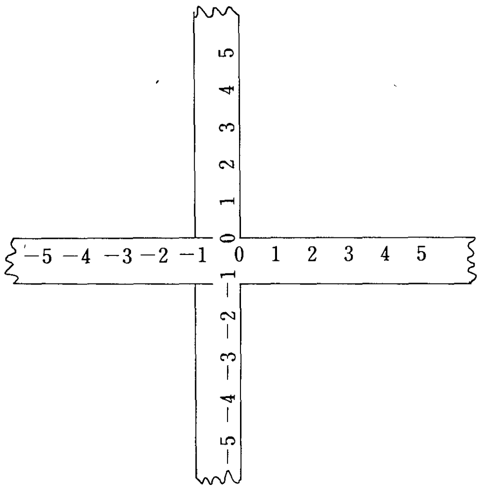
このようにして，加法・乗法とも同じ操作でもって意味づけすることができる。

- $\ell \parallel m$であれば，加法であり，
- ℓとmが原点で交われば，乗法である。

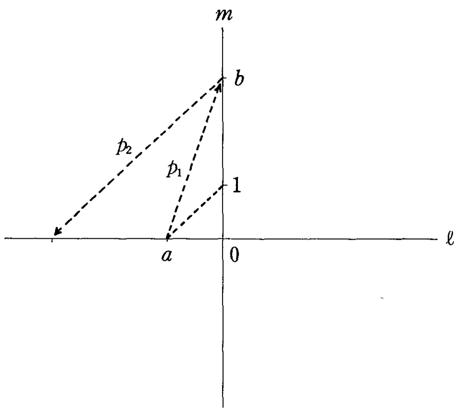
このモデルの数学的特性は，平行射影の合成という観点から，四則演算を統一的に取り扱うことによって，モデルの一貫性を志向したものである。

教授的には，生徒にとって馴染みのある計算尺からの発展として経験の再構成が滑らかである。その上，このモデルの〝点と点の対応〞という特徴は，先述の〝点と移動〞という中途半端な立場でもなく，また，〝機械的帰納〞(図１）でもない。被加数と加数を（被減数と減数を)，被乗数と乗数を（被除数と除数を）直接対応させるところに数学的活動のよさがあり，簡単で理解されやすい。

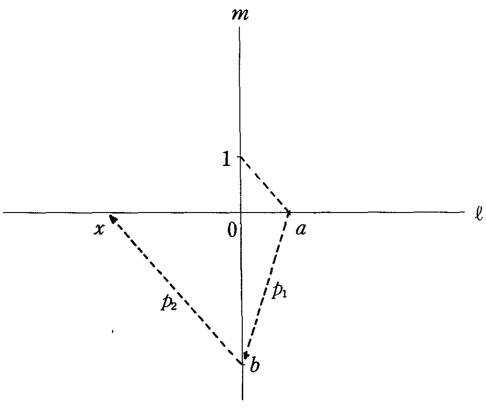
「具体的一般化」期における概念形成のためのモデルとして，このモデルは，以上のような数学的意味と意義をもつ。



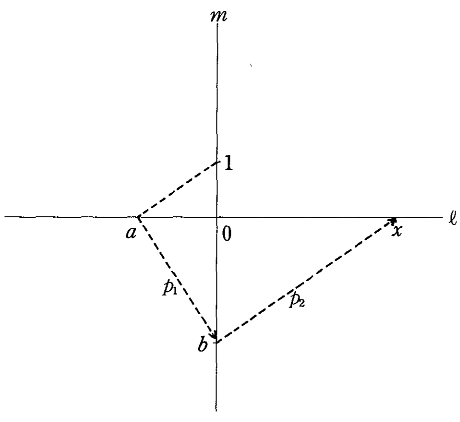
（図９－１）



（図９－２）



（図９－３）



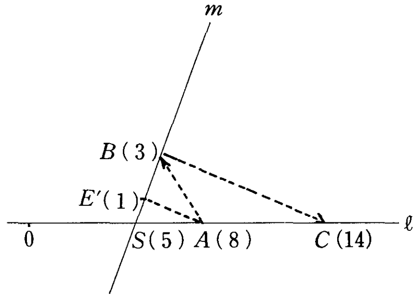
（図９－４）

Ⅶ. 発　　展

1．2つの数直線を，それぞれの原点で交わらせて，平行射影の合成を考えてきた。

交点が原点ではなく，いわばずれた状態であるなら，どのような結果が導かれるのであろうか。

（図10－1）は，その1例である。ここでは，ℓ上の点$S(5)$と，m上の原点とが交わっている。



（図10－1）

$$14-5=3\times(8-5)$$

であり，

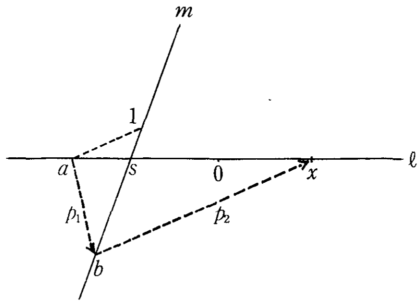
$$p_2p_1(5)=5$$

という特徴がある。

一般にa，bが正・負いずれであっても，

$$x-s=b(a-s),\quad p_2p_1(s)=s$$

が成り立つ。（図10－2）



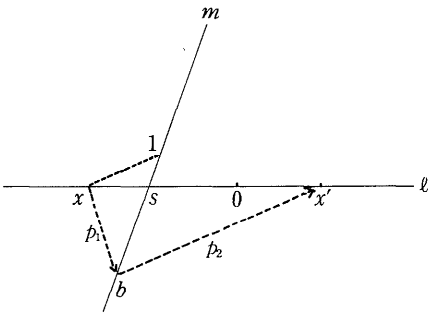
（図10－2）

そこで，$a\to x$，$x\to x'$　と変数を置きなおせば，（図10－3）

$$x'-s=b(x-s)$$

$$\therefore x'=bx+s(1-b),\quad p_2p_1(s)=s$$

すなわち，x'とxの対応は，1次関数である。

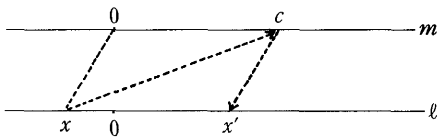


（図10－3）

ただし，この1次関数$x'=bx+s(1-b)$は，

$$x'=x+c$$

の形の1次関数を含んでいない。この形のものについては，$\ell /\!/ m$の場合において処理することができる。（図10－4）



（図10－4）

したがって，1次関数のためのモデルが可能になったわけである。

たとえば，1次関数$y=-4x+5$のためのモデルをつくれば，

・ℓ上の点1と，mの原点を交わらせる

・m上に定点－4を設定する

ことによって，得られる。（図11）

この図の上での操作として，

・$x\geqq 1$（図における交点の右側）なら，

それに対応する y の値は $y \leqq 1$（図の交点の左側）。逆も成立。

・$y<0$ は，$x>\frac{5}{4}$ に従って定まってくる。

等々の性質が読みとることができ，話題も広げられる。

なお，p_1，p_2 は平行射影であるから，k，h を任意定数として，

p_1 : $b=k(x-s)$

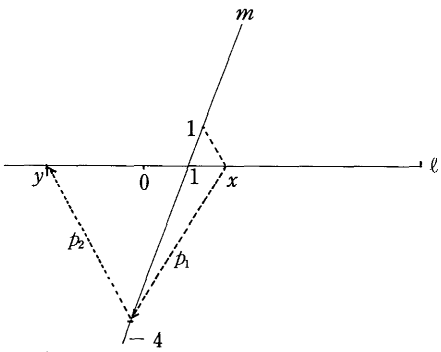
p_2 : $x'=h(b+s)$

したがって，

p_2p_1 : $x'=hkx+hs(1-k)$

である。

ゆえに，$k=b$，$h=1$ である場合が，上で求めた1次関数の原理である。



（図11）

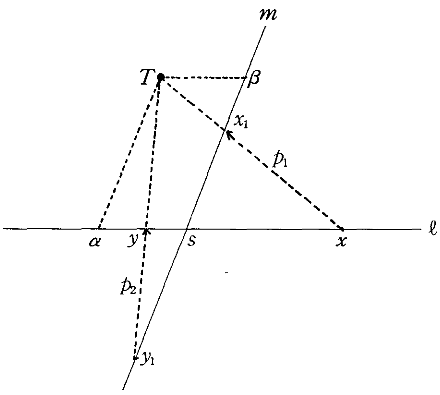
2．これまで平行射影の概念を用いて，和・積，そして1次関数まで導いてきた。

平行射影に換えて，新しく中心射影を導入するなら，どのようになるだろうか。場面としては，すでに扱ってきている ℓ と m が交わる状態でよい。

ℓ と m が，ℓ 上の点 $S(s)$ と m 上の原点とで交わっているとする。中心 T の位置を (α, β) とし，T からの中心射影 p_1，p_2 を

p_1 : $\ell \to m$，$x_1=p_1(x)$

p_2 : $m \to \ell$，$y=p_2(y_1)$



（図12）

とすれば，これらの対応は次のように定式化できる。（図12）

$$p_1 : x_1=\frac{\beta(x-s)}{x-\alpha}, \quad (x \neq \alpha)$$

$$p_2 : y=\frac{\alpha y_1-\beta s}{y_1-\beta}, \quad (y_1 \neq \beta)$$

すなわち，分数関数である。

ところで，この分数関数 $p_1 : x_1=\frac{\beta(x-s)}{x-\alpha}$ では

$$x_1=\frac{c}{x-\alpha}$$

の形が表現しえない。

そのため，$x_1=\dfrac{c}{x-\alpha}$の形の分数関数については，次のように考える。

ℓとmとが交わっているこの状態において，平行射影と中心射影を組み合わせ，合成射影を考える。

平行射影p_1を

p_1 : $\ell\to m$，$x_1=p_1(x)$

とし，中心射影p_2を

p_2 : $m\to\ell$，$x_2=p_2(x_1)$

とすれば，

$x_1=k(x-s)$，$x_2=\dfrac{\alpha x_1-\beta s}{x_1-\beta}$

（ただし，$x_1\neq\beta$，$x_2\neq\alpha$）

であるから，

p_2p_1 : $x_2=\alpha+\dfrac{\beta(\alpha-s)}{kx-(ks+\beta)}$

である。

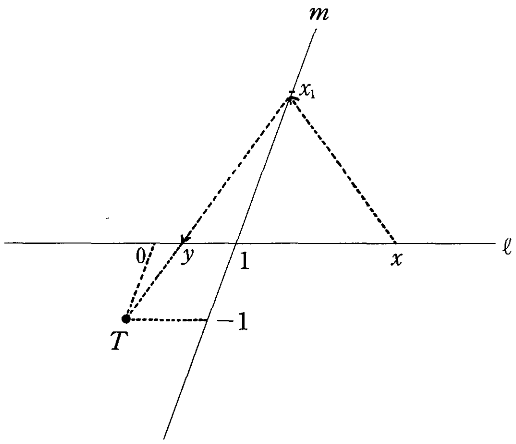
ここで，$\alpha=0$，$k=1$とおくと

$x_2=\dfrac{-\beta s}{x-(s+\beta)}$

さらに，$\beta=-s$として

$x_2=\dfrac{s^2}{x}$

である。



（図13）

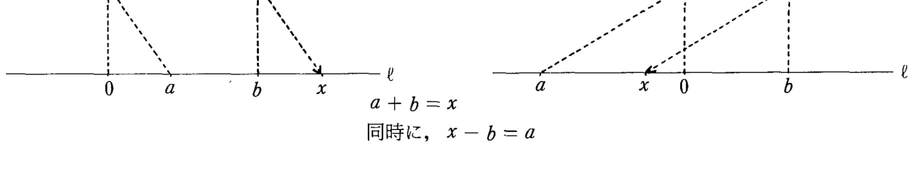
たとえば，分数関数$y=\dfrac{1}{x}$のためのモデルをつくれば，（図13）が得られる。

3．生徒の馴染みある経験，という立場から，２つの数直線を用いて，首尾一貫性のあるモデル化を試みてきた。

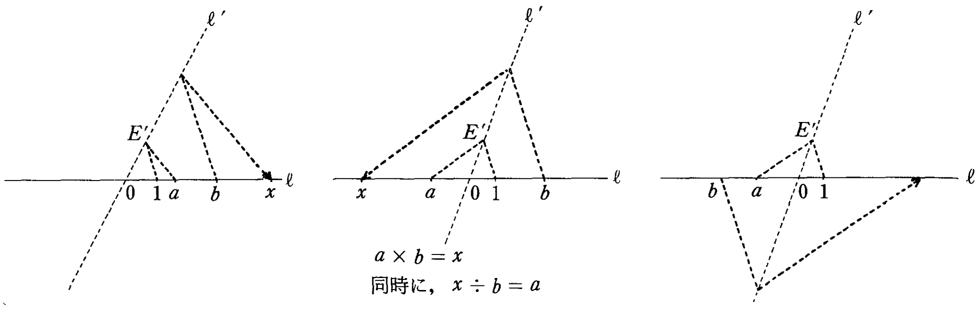
なお，参考までに，このモデルにおける等長変換・相似変換の考えを，図上に，より顕在化させて四則演算の視覚化が可能であることを示しておこう。

それは，１つの数直線上での演算操作であって，（図14）（図15）がそれを表わしている。

１つの数直線ℓ上に，a，bをとったとき，$a+b=x$，$a\times b=x$をまた，ℓ上に求める方



（図14）



（図15）

法であるが，この考え方はこれまでに取り扱ってきた2つの数直線によるモデルとは，無関係なものではなく，それらから導き出すことができる。

加法$a+b$の場合。　（図6－4）において，m上の値$B(b)$を，m上ではなくℓ上に定めるなら（$B'(b)$とおく），

$O'O \triangleq BB'$

もともと　$O'A /\!/ BC$

$\therefore$　$\triangle OO'A \equiv \triangle B'BC$

である。

すなわち，ℓ上のa，bに対して，ℓに平行な直線ℓ'を借用して，$\triangle OO'A$に合同な三角形をbの地点から同じ向きにつくる。このとき，和が求められる。

$\triangle OO'A$の平行変換（等長変換）として，$a+b$が決定されることを示している。

乗法$a \times b$の場合。　（図9－4）において，加法の場合と同様に考えればよい。m上の値$B(b)$を，m上ではなくℓ上にとる。そうすれば，ℓ上の単位点$E(1)$を用いて$\triangle EE'A$に相似な三角形として，$\triangle B'BC$が存在する。その場合，E'とBとOは同一直線にあるから，結局，Oを相似の中心とした$\triangle EE'A$の相似変換として，$a \times b$が求められることになる。

引用及び参考文献

〔1〕 Moise, E. E. : The Number Systems of Elementary Mathematics, Addison-Wesley, 1966.
弥永昌吉他訳：数体系入門，日新出版，昭和49年.
〔2〕 文部省：中学校指導書　数学編，昭和45年.
〔3〕 文部省：中学校指導書　数学編，昭和53年.
〔4〕 大野清四郎（監修）：新数学指導範例事典，近代新書出版，昭和48年.
〔5〕 Piaget, J./B. Inhelder : The Psychology of the Child, Basic Books, 1969.
〔6〕 Wadsworth, B. J. : Piaget : For the Classroom Teacher, Logman, 1978.
〔7〕 Wain, G. T. (ed.) : Mathematical Education, Van Nostrand Reinhold, 1978.
〔8〕 Lovell, K. : The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, Univ. of

London Press, 5th ed., 1971.
〔9〕 Taylor, J. : The Foundations of Maths in the Infant School, George Allen & Unwin, 1976.
〔10〕 Collis, R. F. : Mathematical Thinking in Children (Varma, V. P. (ed.) : Piaget, Psychology and Education, Hodder and Stoughton, 1976)
〔11〕 文部省：中学校高等学校　学習指導要領　数学科編（試案），昭和26年改訂版.
〔12〕 Breidenbach, W. : Methodik des Mathematikunterrichts, Hermann Schroedel, 1969.
〔13〕 阿部浩一他編：新・中学校数学指導講座，第2巻，金子書房，1978.
〔14〕 Scottish Mathematics Group : Modern Mathematics for Schools, 3, Blakie & Son, 1972。

その他
教科書　中学校第1学年，各社

（註1） $\ell /\!/ m$ のとき，平行射影 $p : \ell \to m$，$b = p(a)$ とは，
$b = a + \alpha$ において $\alpha =$ 一定である対応をいう。
このとき，任意の値 a_1，a_2 に対応する p による b の値 b_1，b_2 は，図的に平行性を保存する対応によって得られる。ここに，この p を平行射影と名づけることにする。

（註2） ℓ と m がそれぞれ原点で交わるとき，平行射影 $p : \ell \to m$，$b = p(a)$ とは，
$b = ka$ において $k =$ 一定である対応をいう。
このとき，任意の値 a_1，a_2 に対応する p による b の値 b_1，b_2 は，また，図的に平行性を保存する対応によって得られる。ここに，この p も平行射影と名づける。