教材としての論証についてのいくつかの課題

三　野　栄　治*

（昭和56年10月31日受理）

Some Problems Concerning the Teaching of Demonstration

Eiji MINO

(Received, October 31, 1981)

I．はじめに

教材としての数学を考察していく視点の一つに，意味論的立場がある。

いみじくも，Thom, R. は述べている。『数学教育に直面している現実の課題は，厳密さについての問題ではなく，数学的対象の〝存在〟の〝意味〟と，その発展についての問題である』と。そして，具体的には，学校数学の教材の選択が，syntax においては豊かであるが，meaning において貧しい，という傾向性がみられることに疑義を投げかけて，次のように続ける。『syntax においては不十分であるが，しかし，meaning において豊かであるものとして，たとえば，ユークリッド幾何学』があり，これを教材として見直す価値のあることを提言している［1］。

このことは，なお今日的課題であって，Griffiths, H. B. も採り上げて，教材としての数学――意味論的立場からの必要性と，そこから特性を彫り出してみよう，とする興味ある試みをなしている［2］。

わが国では，従来から，ユークリッド幾何，いわゆる論証指導が，中学校数学科の大きな教材としての地位を占めているが，この意味論的立場からみて，問題点はないといえるであろうか。あるいはまた，生徒が自ら考えるという機会と機能を発揮させてきているであろうか，を反省してみたい。

II．幾何教育の一つの課題

幾何教育の位置づけや教育目標については，幾何学の特性のとらえ方と，教育方法の好み，などのちがいによって，一般的な意見の一致をみていない。

たとえば，それは，Ulrich, J. が指摘するような，『代数学を専門とする人は，代数的表

＊長崎大学教育学部数学教室

現の手段として幾何学をみるし，理論的傾向を好む人は，幾何学を群のすぐれたモデルとみる。また，数学をそれが歴史的な発達過程に従って教えられるべきであると信じている人は，ユークリッド綜合幾何学のたいせつさを申し出ることになる』云々［３］も，一つの要因としてあげることができよう。したがって，また，そのような立場から帰結されがちである幾何教育への多様な要請がなされるから，でもある。

Moredock, H. S. は，その点について分析して，『それらの要請のすべてを満足させるような，単一の幾何学のカリキュラムは，明らかにつくりえない。』としている［４］。

むずかしいが，しかし混迷している幾何教育――さまざまな提案や議論のもとに，徐々にではあるが，その方向性の感じられる国々がみられはじめている。

たとえば，中等学校の段階での幾何教育では，

教育目標の一つに『思考の一つの方法としての演繹法の理解を発展させること』(下線は筆者)をあげながらも，『従来から，演繹法は幾何学において強調されてきているが，すべての推論は三段論法や演繹によるというものではない。強い情動が起こっている場面や，データが十分でないという場面では，そのような演繹論理は，論理的議論の能力を高めるものであるとはいえない。幾何学を学習することは，身のまわりの多くの課題を三段論法や演繹推理によって解決することを可能にするのだ，というように生徒に与えることは，かえって，悪く報いることになる。』と，注意をうながし、

『幾何学は，生徒による創造的思考のよい機会を与えるもの』であるから，ものの関係性を把握することと，その証明を探究していくこと，の両者を含むカリキュラムを組むこと，

そしてさらに，ユークリッドの欠点を矯正するものとして，D. Hilbert, O. Veblen, G. D. Birkhoff(注1), R. L. Moore, S. MacLane らの改良を指摘して，『危険なことは，多くの生徒に，ほとんどまたはまったく興味を起こさせない論理的精密さでもって，生徒を退屈にさせること，また，まったく明白に思われる定理も，証明でもって，生徒をうんざりさせること』である。『幾何学習は，演繹の単一な連鎖から成り立つ必要は，決してない。ユークリッドのように，公理的取り扱いに基礎づけられなければならない，という必要はないのである。』

という勧告がある［５］が，その趣旨を受け入れて，いろいろ工夫しながら，方向性をみせはじめているものに，SSMCIS の教科書，西ドイツの教科書（たとえば，Griesel, H. et al.: Welt der Mathematik シリーズなど)，イギリスのもの等々があげられよう。

ところで，わが国ではどうであろうか。

ここ20年来，中学校数学科の幾何教育は，図形領域という名称のもとに，その内容・方法とも，基本姿勢に変化はみられない。変化がない，ということは，議論などの積み重ねがあって，その結果，教材として安定しているからである，ということではない。むしろ，手つかずの状態にある。後ほど指摘するような正しくない認識のままのものすら生き続けているのが現状である。あるいはまた，原理が混在していて，生徒に混乱をまねくおそれのある教科書もある［６］。

わが国の教科書に現われている内容・方法は，現象としては，伝統的ユークリッド綜合

幾何に属するものといえる。前述の西ドイツやイギリスの教科書にみられるような創意工夫も，あるいは，フランスの教科書（たとえば，Cossart, E. et al.: Mathématiques）のような思い切った方向性もみられない。

しかし，わが国でも，すでに，次のような提言がなされている。

『われわれの東洋世界では，ユークリッド幾何学にみられるような公理的方法は生まれなかった。われわれは，長い歴史を通じて，われわれ自身の体系化された科学をもたなかった。であるからこそ，（われわれにとっては）ギリシヤ幾何学の公理的方法に対してはプラトンの〝theoria〟の精神を見出し，この体系化の方法とその意味するものについて意識させなければならない』のであって，単に，整理されてしまった形式的な公理的方法を，学習指導の中で伝達することに集中するべきではなくて，『直観と論理的な議論の相互作用を働かせ，そして生徒を勇気づけること』のたいせつさを説き，この方法によって教育が行われるべきである，

と［7］。

この提言は，まことに妥当であり，当然なことでさえある。

われわれとちがって，そのような長い歴史の，そして精神風土の中に身を置いていたデカルトやパスカルでさえ，幾何学の精神と方法とに積極的な多大な関心を寄せている。

まず，デカルトは，『証明の仕法はと言えば，それは二重であって，すなわち，一つは分析によって行なわれるものであり，一つは綜合によって行なわれるものであります。……………　独りこの綜合をのみ古代の幾何学者たちは彼らの書いたもののなかでは使用するのを常としていたのでありますが，何もそれは分析を全く彼らが識らなかったからというわけではなくて，私の判断するところでは，それをすこぶる彼らは重んじていて，かくて独り彼ら自身のみのための秘密の大切なものとして保存しておいたからなのです。』［8］と，分析と綜合という2つの「方法」をとらえ，とりわけ，ことがらを真にわかろうと望む精神に対して満足を与えるのが，分析である，とその価値を高く評価している。このことは，なかなか示唆的である。

パスカルも，幾何学の精神と方法について述べ，『真理の研究には，3つの主要な目的がある得る。第1は，真理を追求する時にはそれを発見すること。第2は，真理を所有する時にはそれを論証すること。第3は，真理を吟味する時には真を偽から識別すること』云々［9］，と記している。なお，パスカルは，第2の論証についてくわしく論じていることから，一般には，綜合派に属する，といわれているが，『（第1の分析について）説くことは，すでに多くのすぐれた著述が書かれたあとでは，無益であろう。』ということで，論じていないだけである。

このように，幾何学研究の「方法」を学ぶための議論は続けられてきた。そこには，19世紀以降の数学研究のようではなくて，哲学的思惟と共存し，互いに影響しあった姿がみとめられる。したがって，その時代までの数学を教育対象とするとき，デカルトやパスカルのように拡大解釈する必要はないが，その精神や意味するものについての知見をもち，それを学習指導の中に具現することは，教師の役割であり，有効な教育方法でもある。

見当をつけたり当て推量したりすることと，証明すること，の2つの活動は，ユークリッド的伝統の中においては厳格に分離されていて，しかも，現象的には，綜合の面にひきづられがちであった。そこには，教師が『生徒たちが，背後にある発見法にいかなる関心を

も示さないで，ユークリッド的議論をなす能力を当然のこととして備えているのだ，ということを期待して』教授が進められる，というきらいに陥りがちであると興味ある指摘がなされている［10］ことに，注目したい。

このことは，とりもなおさず，より日本的な課題である。Akizuki, Y. の提言を待つまでもなく，国際数学教育調査での実態のデータが，何よりも明らかに，そのことを示してくれている［11］からである。

III．証明について

1．数学における証明，それはふつう演繹的な証明を意味する。

演繹的証明には，いくつかのタイプがある。ここでは，そのうちの Modus ponens と演繹定理にもとづく証明，とをとり上げる。

定理は，つねに，その形式として「$p \longrightarrow q$」の形に表現できる。そこで，

$p \longrightarrow q$ を証明する，

ことについて考える。

(1) 仮定 p が真であって，p から q が演繹できるなら
q は真である。

記号的には，$\dfrac{p,\ p \longrightarrow q}{q}$ である。

これは，Modus ponens であるが，このタイプでは，証明されるべき対象は，結論の q である。

(2) それに対して，幾何学の多くの命題がそうであるように，仮定 p を<u>仮定することに</u>よって始められるタイプのものがある。これは，

「仮定 p と，いくつかのすでに知られた真な命題とから，q が演繹されるなら
そのいくつかのすでに知られた真な命題だけから，$p \longrightarrow q$ が演繹される」

ことにもとづくタイプの証明である。

ここでは，証明されるべき対象は結論の q ではなく，$p \longrightarrow q$ が演繹されるべき証明対象なのである。

教科書では，この後者のタイプのものについても，通常，仮定を〝与えられたもの〞，結論を〝証明すべきもの〞とされることがあるが，これでは証明の論理を理解させるとはいい難い。

ある教科書に，次の例題がある［12］。

『△ABC で AB＝AC とする。AB の中点を D，AC の中点を E とし，BE，CD の交点を P とすると，PB＝PC である。これを証明せよ。

［考え方］∠PBC＝∠PCB が証明されればよい。

…………………………

…………………………』

この命題を取り扱うとき，証明の面で留意しなければならないのは，まず，次の2点である。

- これを証明せよ，の「これ」とは，PB＝PC ではなくて，命題文そのものである。
- ∠ＰＢＣ＝∠ＰＣＢが証明されればよい，のではなく，それが，仮定とすでに知られている真な命題とから，演繹されればよい，のである。

さて，p_1，p_2，……，p_nをすでに知られた真な命題とする。

「p と，p_1，p_2，……，p_n　とから，q が演繹されるなら

p_1，p_2，……，p_n　から　$p \longrightarrow q$ が演繹される」ことは正しい

ことは，次のようにして理解できる。

p，p_1，p_2，……，p_n　$\longrightarrow q$　は妥当な推論であるが，

p_1，p_2，……，p_n　$\longrightarrow$ （$p \longrightarrow q$）は妥当でない，とする。

ただし，p，p_1，p_2，……，p_nは，$p \wedge p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots\cdots \wedge p_n$の意味である。

後者から，$p \longrightarrow q$ は偽である。

すなわち，p が真で，q が偽である，ということである。

それなら，前者は妥当でない推論，ということになって，これは矛盾である。

したがって，タイプ(2)の $p \longrightarrow q$ を証明する，には，仮定 p と p_1，p_2，……，p_nとから q を演繹すればよい，ということになる。

ここでは，p と p_1，p_2，……，p_n　が同時共存としての基本概念となっており，しかも，仮定 p を仮定する。

生徒は，このような論証が学習指導される以前に，すでに経験的な命題の中で育ってきている。そのため，ともすれば，仮定を仮定する場にあっても，経験的実在的命題とみなしがちになる。図表示での仮定の意味の表示が，読み手としては実在の意味理解と知覚し，(……とする）が，(……である）と認識される傾向にある，ということである。

このことも，学習指導上，留意しなければならないことがらである。

次に，p，p_1，p_2，……，p_n から q を演繹すること，すなわち，概念間の関係把握という判断のレベルの思考が要請される。判断の結びつきが推論である。

中村は，『空間や図形に関する知識は，その中において行動し，感覚し，生活する外界というものを知りはじめたときに始まる，といわれている』ことを，とり上げている [13] が，これは，判断レベルでのたいせつな思考活動であって，この直観は，すでに古く Proclus のいう　『図をつくり，あるいは図を分解したり合成したりすることは，幾何学の機能である』[14] 立場につながるものであって，教育上，考慮すべきことがらである。

この思考活動の，推論での役割を，証明概念の一つの特徴を示す思想――*δείκνυμι* 的立場から考えてみよう。

2．*ὅπερ ἔδει δεῖξαι* ――これは，ユークリッド「原論」において，各命題の最後に述べられるきまり文句である。

その *δεῖξαι* の動詞原形が，*δείκνυμι* である。

δείκνυμι には，『 anatomical demonstration, specimen, reference や，show, point out』といった意味がある。それが『中世以後は display』[15] ――とりわけ，論理

的明示，ということに対する専門用語［16］，とされる。

一方，語 ἀπόδειξις が，『proof――とくに by words』［17］であるという。

Proclus は，『われわれが時々見出す 〝proof〟 と呼ばれるところのものは，demonstration の性格をもっていて，それは中間項としての定義の助けによって，求められるものを確立することができる』としており［18］，『ピタゴラス学派が，幾何学を ἱστορίη，すなわち視覚と切り離せぬ学問と見ていたことも広く知られている』［19］ことを考え合せれば，日本語で，証明，と一口にいっても，もともとは demonstration と proof がその意味内容において異なる機能をはたしていた，と考えることができる。

図――それは意味の表示であって，構造的な具体的存在を示すものである。この事実を見せることによって，確信させられるのを必要としている人を納得させる。図は，古い形態の証明力をもつもの，として機能していた，といえる。それは，きわめて知覚的・心理的，したがって理性的証明とでも名付けることのできるものである。

たとえば，教材としての証明方略をとり上げてみる。

どの教科書も，命題の図，または証明図解の図がつけられている。そうであるなら

・この図でいえば，…………ということである。（命題の実例）
・なぜなら，この図で…………が導けるからである。（実例での推論）
・そして，この図の場合だけでなく，条件に適う…………のような，
　どのような場合でも，…………が導ける。（具体的一般化）
・すなわち，この命題は真である。（定理の理解）

のように，モデル化して考えられる。

（なお，一般的表現の命題において，そこでは条件に適ういくつかの場面の図がつくられるにもかかわらず，一つの図を頼りにして，その実例だけの推論を行って，それで一般性を示した，とするおそれのあるものもあるので注意を要する。たとえば［20］。）

このモデルは，論理的思考を含みながらも，理性的証明といえるものである。なぜなら，この活動は，綜合によるというよりは，帰納性が強いからである。

この論理は，生徒たちの発達段階［21］［22］からみて，自然なものとして受け入れられる。しかも，この具体的一般化の時期というのは，『学習を左右する要因は，おそらく，カリキュラムによる，というよりはむしろ，教師に』あって，『受け身ではなく，自らの取得ししていく豊かな経験の中で，よりよいしかも生産的な学習がなされる，ということを示すのに十分な証拠がある』［23］のであって，そのためには，『数学的な考えそれ自身は容易に形成されるというものではないがゆえに，生徒たちがその課題で，いろいろな考えが比較できるような，また吸収できるような，そしてまた，楽しむことのできるような，そうした環境をつくり出すことが必要』［24］［25］となる。それは教師の役割であるとして，証明活動における理性的証明，つまり δείκνυμι 的立場が，シツエーションとして設けられることが要請される。

δείκνυμι――それに「思考実験」ということばを充てたのは，Lakatos, I. である［26］が，言い得て妙である。

証明は図そのものから抽象されるものではなく，図に対する操作から抽象されてくるものである。したがって，思考実験は，単に図を見て考えることをいうのではなく，図に対する操作とそこから証明を抽象する場である，と解することができる。

思考実験の目的は，演繹を明白にするためにある。

命題が仮設的であれば，それだけ思考実験・具体的一般化の活動は必要とされる。

この活動は，幾何教育の「方法」である。

IV. 図について

1．Moise, E. E. は，幾何学を構成するために，まず，直線・平面に対して，次の要請をする。

『すべての直線，すべての平面は，点の集合である。』

それだけでは完全ではないので，

『図によって，その点の集合の意味を表わす。』

ことを併記する［27］。

このとらえ方は，われわれに，幾何学研究における図の機能――したがって，幾何教育における図の役割をも――と，意味論としての図の位置づけを示唆している。

たとえば，直線という幾何学概念に対しての，ピンと張った糸のような図，三角形という幾何学概念の，3つの線分によってつくられている図，などは，〝幾何学という文脈〞の中では，意味の表示であって，それは象徴的記号といえるものではない。

象徴的記号というのは，抽象的概念の表象であって，概念と記号の間に1対1対応が要請されている。しかし，この1対1対応を成立させ保存させることはむずかしく，そのため，それぞれの記号に，まず，特定の意味づけを要請する。それが，文脈と呼ばれる認識構造を設定する。しかも，その意味づけには，記号の選択の可能性を許している。したがって，概念の属性をとらえて選択される記号化もあれば，規約性の強い記号化もある。このような特性を有しているのが，象徴的記号である。

2．意味の表示である図は，どのような特性を有しているのだろうか。

概念には，2つの側面がある。一つは外延的側面であり，もう一つは内包的側面である。

幾何学概念は，伝統的には，共通なものの本質的特性をとらえることによって規定されている。すなわち，内包的側面からの概念規定である。

そして，この「……という条件」を意味内容としてもつものの表示が，図である。

たとえば，『1点からのすべての線分が互いに等しい』［28］という条件を意味内容としてもつ点の集まり全体を表示した図「円」は，結果として，外延的な〝もの〞を知覚させ，内包性が潜在してしまう。

このことは，概念を図式化する場と，図が先行している場合とでは，われわれに与える刺激の型が同一ではない，ということを意味する。

Osgood, C. E. らによれば，『意味論的意味空間は，評価性（evaluation），潜在力（potency），活動性（activity）の3軸をもつ因子構造』であって，その『意味論的差異は，表象過程の機能に関係する』という［29］。

したがって，図表記のもつ特性と，それを知覚する人の特性と，その相互作用，がそこに存在することになる。

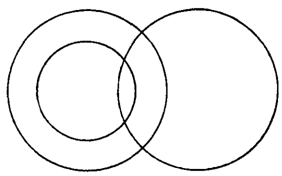
概念の意味内容を表示した図は，実は，その図の属性の或る特性がシグナルとなって知

覚される，という特徴をもつが，知覚する人の『知覚する過程は，そこにある事象の単に受動的な反映というものではなくて，知覚する人自身の実質的な働きかけによる』ものであって，その『決定過程は，その働きかけと，感受性の関数である。』[30] と考えられる。それならば，図表記に固有の特性があるがゆえに，幾何学の機能――図をつくり，あるいは図を分解したり合成したりするという活動――が要請され，それがまた，上述の働きかけであり感受性の導入になる，とはいえないだろうか。

図の特性と，知覚する人の相互作用については，誤答分析の立場からの興味ある調査・分析がある。

生徒の誤答について分類し分析した Radatz, H. は，図における誤答というものは，『空間的情報を生徒が手にしたときの困難さに負う。』という。『映像的視覚的な表示というものは，ひとえに，生徒の空間能力と，視覚的識別能力を要求する』ものであって，それに対しては，個人差と，視覚的あるいは空間的な情報をとらえることのむずかしさ，がみられる，という。個人差については，Jakimanskaya, I. S.(注2)の実験を確認した形になっている。

たとえば，3つの集合図を与えておいて，その図からいろいろな情報を読みとらせることを試みている。その結果，『多くの生徒の困難さは，図を読みとるときの抑制――境界線を越えていくべきかどうか，あるいは，当面関係のない線はどれであるか，など――のゆえである。』としている [31] [32]。



ところで，その結論を引き出すために示されているデータを読むと，さらに，知覚を超えた包摂的な読みとり方のむずかしさや，差集合的知覚の強さ，などが示唆される。

図に対しては，知覚する人の特性が問題となると同時に，図表記そのもののもつ特性――あるいは，図表記のしかたも――も，大きな要因となりうるものであることがわかる。

3．ユークリッドの「原論」における三辺形や四辺形の概念規定をとり上げてみる。

ユークリッドは，三辺形を

『三つの等しい辺をもつもの，　　直角をもつもの，
二つだけ等しい辺をもつもの，　　鈍角をもつもの，
三つとも不等な辺をもつもの，　　三つの鋭角をもつもの』

と規定し，分類する [33]。

後に，Proclus は，三辺形は7つに分類できる，とする。すなわち，

『等辺，　　直角二等辺，　　直角不等辺，
鈍角二等辺，　　鈍角不等辺，
鋭角二等辺，　　鋭角不等辺』

である [34]。ただし，等辺とは，三つの等しい辺をもつこと，二等辺とは，二つだけ等しい辺をもつこと，を意味する。

ユークリッドに対して，Proclus のはより知覚的・心理的であると考えられるが，いずれにしても，辺についての関係性と，角の直角性（直角概念も，ユークリッドの定義10によれば，関係把握である)，あるいは，それらの組合せによる分類であって，類を形成してお

り，正確な言い方ではないが，直和分割を意識している。

四辺形の扱いにおいても，同様のことがいえる［35］。

- 四　辺　形
  - 等辺である形
    - 直角をもつ形（正方形）
    - 直角をもたない形（ひし形）
  - 等辺とはいえない形*)
    - 直角をもつ形（矩形）
    - 直角をもたない形
      - 対辺が等しい 対角が等しい（長斜方形）
      - （トラペジオン）

*）ただし，等辺とは，すべての辺が等しいこと，等辺とはいえないとは，上の等辺の否定を，意味する。

あるいは，Heron の，平行性を導入しての 7 つの分類

- 四　辺　形
  - 平行である形
    - 直角をもつ形
      - 等辺である（正方形）
      - 等辺とはいえない*)（矩形）
    - 直角をもたない形
      - 等辺である（ひし形）
      - 等辺とはいえない*)（長斜方形）
  - 平行とはいえない形**)
    - 2 辺が平行な形
      - 脚が等しい（等辺台形）
      - 脚が等しくない（不等辺台形）
    - 平行をもたない形（不等辺四辺形）

**）ただし，平行であるとは，2 組とも平行であるということ，平行とはいえないとは，上の平行であるの否定を，意味する。

が，当時の概念規定であり，分類である。

これらも，やはり，正確な言い方ではないが，固有な名前を持つ四辺形は類別され直和分割を意識している。概念規定は，四辺形からの直接の概念化であり，「長さ」概念によるものではなく，「等しい長さ」概念によっている。角についても基本的には関係概念の把握である。さらに，それらが，「である——でない」の 2 分割法である。

さて，この立場での意味の表示である図を考えてみる。

たとえば，三辺形で「二つだけ等しい」という条件は，自動的に第 3 辺は等しくない，が帰結できる。そして，それによる類は，他とは排他的であって，その図は知覚的には決定的である。第 3 辺の等しくない図を一つ指定することによって，それがその類の代表として実在し，機能しうる可能性をもつ。

それに対して，現在の教科書に記述されているような定義，たとえば，二等辺三角形——二辺の等しい三角形，は包摂的であって，数学的な整合性の観点から生成された，すぐれた規定である。そして，Van Hiele, P. H. の水準［36］でいえば，このとらえ方は Proclus 的思考の水準よりも一段上の思考水準にあたる。

「二つの辺が等しい」，それは，第 3 辺については任意性をもつことを意味する。第 3 辺は，等しくてもよいし，等しくなくてもよい。それに対して，表示された図は，等しい場合の図か，

そうでなければ,等しくない場合の図か,という決定的なものである。すなわち,一つの図でもって,包摂的な意味内容を表示しうる図は実在しない。概念としては存在するが,実在図はない。

当時は，図が類の代表としての機能をもち得て，したがってまた，証明の機能をも果たし得るだけの背景があった。

現在のような概念規定のもとで，それに対応する思考水準の一つ以前の水準での思考をも行わせる，となれば，図の役割が異なってくる。このことを，われわれは，留意しなければならない。

たとえば，わが国の命名法を考えてみてもよい。「正」方形と，「長」方形でいえば，概念規定は論理的な包摂性であって，ことばは知覚的・ユークリッド的感覚である。つくられた図は，むろん，ユークリッド的認識が自然である。図を頼りにして論理的考察を行う水準では，混乱を惹き起こさせない配慮がいる。

したがって，幾何学という文脈において，学習指導上，留意しなければならないことは，デカルト的にいえば，

> 図（形状）――三辺形や四辺形や円や，それらの組合わされたもの――については，思惟しなくても容易に知覚できるものですが，しかし，同時に，図についてのいかなる種差をも思惟することがないなら，知解することはありえないのです。

ということになる。

図のもつ特性，知覚する人の特性，そして，それらの関わりについて，いくぶんの省察をなした。

現状では，確かに，教科書で図が本質的な「方法」として用いられている。図を頼りにして，図で考えを進めていくとき，しばしば，一般性と文脈の中での潜在的仮設が意識から落ちてしまうことが起こる。だからといって，直観的思考よりも論理による証明でなければからない，と矩絡的に結論づけることは妥当でない。

Fremont, H. のいう『図表記の特質を知って，そして幾何学的知覚の利用による，考えの自由な発展は，注目されなければならない』[37] ものである，と考える。

V. おわりに

これまでのそれぞれの個所において，いくつかの問題点と，それに対する教師の配慮してほしいことがら，あるいは，教授上への示唆というものを，具体的に述べてきた。

少なくとも，正しくない認識は正さなければならない。そして，この時期における生徒の思考的特性と，その学習を左右する要因がカリキュラムにおけるよりはむしろ教師の側により大きいものがあるという指摘 [38] をとらえるなら，教師の役割はより一層大きいものである。

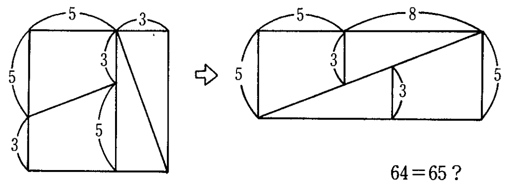
証明活動は，確かに，社会的機能の中にある[39]。なぜなら，それは，証明する人――納得または確信させられるのを必要としている人（自分自身を含む）――そして，証明する人が相手を確信させるのに用いる議論，を包括しているからである。証明活動と，証明を記述することとは，異なる知的活動であって，しかもその証明を記述することは相対的なレベルの問題である。〝証明を，どこまで書き込むのか？〟という生徒からの質問は，よく耳にするところであるが，これはまさに，このことを衝いている。

ともすれば，証明の記述に注意がはらわれる。しかし，特定の定理の証明技能を，こと細かに問題とするのではなく，むしろ，原理――定義や公理（にあたるもの）や方法にもどって，その証明をたどってみる，というような活動も，また，望ましいことであると考える。

ある教科書の,「証明のしかた」という項目の中に，次のような，図を正しくかくことがたいせつである，という指摘がある［40]。

＊ 64＝65？

鈴木君は，下の左の正方形を４つに切って，右のようにならべると長方形になると考えた。正方形の面積は８×８＝64，長方形の面積は13×５＝65で等しくない。どこに誤りがあるのだろうか。



64＝65？

証明をするには，図を正しくかくことがたいせつである。

図を正しくかくことは，それ自体，配慮されるべきことがらであるが，正しくかくことがたいせつである，という指摘だけでは十分ではなく，また，機能もしない。

図がもつ特性と，証明活動における図の機能においてすでに述べたように，証明というものが「どんな場合においても」の認識であることの理解であるなら，その図が〝すべて〟の条件を表示している図であることが認識されているかどうか，がより本質的である。図が正しくかけないから，証明がうまくいかない，のではなくて，条件に適う可能性に考え及んでいるかどうか，の活動が，より大事なことと考える。

引用及び参考文献

［１］ Thom, R.: Modern Mathematics: Does It Exist? (Proceedings of the 2nd International Congress on Mathematical Education, Cambridge Univ. Press, 1973, p. 202.)

［２］ Griffiths, H. B.: The Structure of Pure Mathematics (Wain, G. T. (ed.): Mathematical Education, Van Nostrand Reinhold, 1978, pp. 19−23.)

［３］ Ulich, J.: Disparities in Viewing Geometry (Henderson, K. B. (ed.): Geometry in the Mathematics Curriculum, NCTM, 1973, pp. 3−7.)

［４］ Moredock, H. S.: Geometry and Mesurement (The 69th Yearbook of the National Society for the Study of Education: Mathematics Education, The Univ. of Chicago Press, 1970, pp. 167−237.)

［５］ Report of the Commission on Mathematics, CEEB, 1959, pp. 23−25.

［６］ 中学校数学教科書２年，1981，A社，p. 75.

［７］ Akizuki, Y.: How to Educate the Spirit of Mathematics (Proceedings of the ICMI-JSME Regional Conference on Curriculum and Teacher Training for Mathematical Education, JSME, 1974, pp. 1−2.)

[8] デカルト著作集，第2巻：省察および反論と答弁，白水社，1973，pp. 188－189.
[9] パスカル，B.：幾何学的精神について(世界の名著24：パスカル，中央公論社，1966. pp. 498－526)
[10] Lakatos, I.: Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge Univ. Press, 1976, p. 142.
[11] ＩＥＡ日本国内委員会報告書：国際数学教育調査，国立教育研究所，1967，p. 101その他
[12] 中学校数学教科書2年，1981，Ｂ社，p. 122.
[13] 中村幸四郎：数学史――形成の立場から――，共立出版社，1981，p. 31.
[14] Morrow, G. R. (tr.): Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, Princeton Univ. Press, 1970, p. 32.
[15] Greek-English Lexicon, 1951, p. 373.
[16] サボー，Á（伊東他訳）：数学のあけぼの，東京図書，1977，p. 16.
[17] 前掲［15]，p. 196.
[18] 前掲［14]，p. 121.
[19] 前掲［16]，p. 16.
[20] 中学校数学教科書2年，1981，Ｃ社，p. 155.
[21] Van Hiele, P. H.: La Penséee de l'Enfant et la Géométrie (Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, 38e année, 1959, pp. 199－205.)
[22] Lovell, K.: Concept Development (Wain, G. T.(ed.): Mathematical Education, Van Nostrand Reinhold, 1978, pp. 96－111.)
[23] Bratt, M.: The Psychological Basis for Science and Mathematics Curriculum (School Science and Mathematics, Vol. LXXX, No. 7, 1980, pp. 502－548.)
[24] Lovell, K.: Intellectual Growth and Understanding Mathematics: Implications for Teaching Mathematics Education, Vol. 3, 1972, pp. 164－182.)
[25] Lovell, K.: Intellectual Growth and Understanding Mathematicn: Implications for Teachng (Arithmetic Teacher, Vol. 19, 1972, pp. 277－282.)
[26] 前掲［10]，p. 9.
[27] Moise, E. E.: Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, Addison-Wesley, 1963, p. 37.
[28] Heath, T. L.: Euclid: The Thirteen Books of the Elements, Dover, 1956, p. 183.
[29] Osgood, C. E. et al.: The Measurement of Meaning, Univ. of Illinois Press, 1975, p. 9, pp. 31－75.
[30] Swets, J. A. et al.: Decision Process in Perception (Psychological Review, Vol. 68, No. 5, 1961, pp. 301－340.)
[31] Radatz, H.: Error Analysis in Mathematics Education (Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 10, No.3, 1979, pp. 163－172.)
[32] Radatz, H.: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Vieweg, 1979, S. 40－44.
[33] 前掲［28]，p. 187.
[34] 前掲［14]，pp. 130－133.
[35] 前掲［14]，pp. 130－137，前掲［28]，pp. 188－189.
（訳語の一部は，ユークリッド（中村幸四郎他訳）：ユークリッド原論，共立出版社，1977　による）
[36] 前掲［21]，pp. 199－205.
[37] Fremont, H.: Teaching Secondary Mathematics through Applications, Prindle, Weber & Schmidt, 1979, p. 247.
[38] 前掲［23]，pp. 502－548.
[39] Cooney, T. J. et al.: Dynamics of Teaching Secondary School Mathematics, Houghton Mifflin,

1975, p. 293.
[40] 中学校数学教科書 2 年，1981，D社，p. 125.

[注 1] 学校数学のための具体的な公理系については，Birkhoff, G. D.: A Set of Postulates for Plane Geometry (Annals of Mathematics, Vol. 33, 1932) が有名であるが，最近，Pearson, H. R. & J. R. Smart: Postulates from High School Geometry (Geometry, Ginn and Co., 1971.) がみられる。

[注 2] Jakimanskaya, I. S.: Individual Psychological Differences in Spatial Thinking in School-children, Voprosy Psichologii, 1976) のことである。