土木学会論文集 No. 519／I-32, 175-184, 1995. 7

Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の振動，座屈および動的安定性

高橋和雄[1]・古谷寿章[2]・其田智洋[3]・夏秋義広[4]

[1]正会員　工博　長崎大学教授　工学部社会開発工学科（〒852　長崎市文教町 1-14）
[2]正会員　工修　日立造船（株）（〒592　堺市築港新町１丁５番１）
[3]正会員　工修　長崎県諫早土木事務所（〒859　諫早市永昌東町 25-8）
[4]正会員　工博　片山ストラテック（株）　橋梁設計課（〒551　大阪市大正区南恩加島 6-2-21）

本研究では、弾性支承の一種であるPasternak基礎上に置かれた温度勾配をもつ変断面長方板の振動，座屈および動的安定性解析を行う．長方形板の境界条件としては，単純支持，固定および自由の組合せを採用し，Pasternak基礎剛性，変断面パラメータ，温度パラメータのもとに，Pasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の固有振動特性，座屈特性および動的不安定領域を明らかにする．

Key Words : *dynamic stability, non-uniform plate, thermal gradient, Pasternak foundation*

1. まえがき

はりや平板の動的安定性の研究はこれまで数多く行われ，解法および現象も明確になってきている．しかし，動的安定性の汎用的な解法がないため，不安定領域が単純共振しか得られていないことや，解析の自由度が限定されていることなど不十分な点が認められる．このため，複雑な構造特性をもつ構造部材の動的安定性は十分に解析されていない．最近，現時点で最も厳密でかつ計算機の活用に適した動的不安定領域の解析の新しい手法の開発[1]に伴い，複雑な構造特性をもつ場合を解くことが期待されている．

そこで，本論文では複雑な構造特性をもつ場合を解析する第一段階として，弾性拘束や温度変化を受ける変断面長方形板の動的安定を明らかにする．弾性拘束，変断面や熱の影響を考慮した構造部材の動的安定性の研究として，KarによるPasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面片持ちばり[2]の解析がある．Pasternak基礎とはWinkler基礎の改良型の一種で，弾性支承の上端をせん断層で連結させることにより，個々の弾性支承の独立性を奪い，長方形板の境界部でのたわみの不連続の問題を解決したものである[3]．動的不安定現象が生じるような片持ちばりは薄肉材であることから，はりに断面変形が生ずることが予想される．したがって，平板として解析することがより適切である．剛性が小さい構造物をモデル化する場合，主要部材のみならず２次部材を強度部材に組み込むことが必要で，Pasternak基礎はその１例である．

このような観点から，本論文ではKarによって提案された問題を長方形板に拡張する．自由辺を含む長方形板を解析する場合，幾何学的境界条件と力学的境界条件を満足する座標関数を仮定することは不可能である．したがって，本論文では幾何学的境界条件のみを満足する座標関数を用いて解が得られるエネルギー法[4]に基づく，Rayleigh-Ritz法を用いて固有振動形を得る．次いで，得られた固有振動形を用いて，Hamiltonの原理を適用し，時間に関する係数励振振動型の運動方程式に変換する手法を採用する．動的安定解析には，Bolotinの方法[5]で得られない結合共振も得られる解析法[1]を採用し，動的不安定領域の全体像を得る．

数値解析において，Pasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の固有振動特性，座屈特性および動的不安定領域を，各種の境界条件およびPasternak基礎の剛性，温度勾配および変断面に関する無次元パラメータのもとに明らかにする．

2. 境界条件と解法

Fig.1に示すようなPasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板が，x方向に一様分布の静的面内力N_{x0}と変動面内力$N_{xt}\cos\Omega t$を受ける場合を考える．本研究で特に用いた仮定は，次のとおりである．

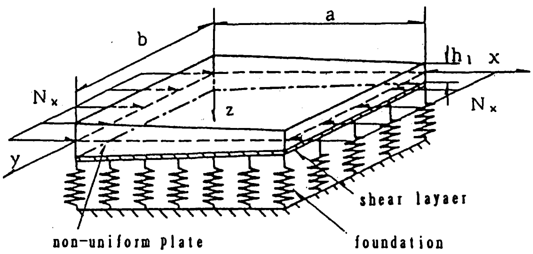


Fig.1 Geometry and co-ordinate system.

(1) 基本的仮定

1) 変断面長方形板は薄板と仮定し，板厚方向(z 方向)の応力成分を無視する.

2) せん断層はせん断変形のみ抵抗する厚さ方向に変形しない層であり[3]，せん断層剛性はせん断弾性係数と層厚の積で表される.

3) 長方形板の板厚は x 方向に線形的に変化し，y 方向に対しては一定である.

4) 温度勾配も $x=a$ の辺を基準として x 方向に線形的に変化し，y 方向に関しては一定とする.

5) ポアソン比 ν は温度に無関係とし，弾性支承のバネ剛度 K_e，せん断層剛度 K_s は温度の影響を受けない.

(2) 境界条件

本論文に採用した長方形板の境界条件は，次の 5 種類である.

CASE Ⅰ：全周辺単純支持,

CASE Ⅱ：荷重辺単純支持·他対辺固定,

CASE Ⅲ：荷重辺固定·他対辺単純支持,

CASE Ⅳ：全周辺固定,

CASE Ⅴ：一辺固定・他三辺自由（片持ち板).

ここで，CASE Ⅴ の場合，$x=0$ となる辺を固定する.

(3) Hamilton の原理による解法

Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板のひずみエネルギー V は，変断面長方形板の曲げによるひずみエネルギー[6]，Pasternak 基礎のもつ弾性支承のひずみエネルギーおよびせん断層のひずみエネルギーから構成される．本研究では，ひずみエネルギー V を次のように定義する.

$$V(w)=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a D\Big[(\nabla^2 w)^2-2(1-\nu)\Big\{\frac{\partial^2 w\partial^2 w}{\partial x^2\partial y^2}-2(1-\nu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big\}\Big]dxdy+\frac{K_e}{2}\int_0^b\int_0^a w^2 dxdy+\frac{K_e}{2}\int_0^b\int_0^a\Big\{\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big\}dxdy \quad (1)$$

ここに，w：たわみ，$D(x)=E(x)h(x)^3/12(1-\nu^2)$ 板剛度，$E(x)$：ヤング率，$h(x)$：板厚，ν：ポアソン比，$\nabla^2=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$，$K_e$：弾性支承のバネ剛度，$K_S$：せん断層剛度，$x$，$y$：平板中央面の座標系．上式において温度勾配の項はヤング率 E に含まれている[2].

変断面長方形板の運動エネルギー T と面内力による仕事 U は，次のように与えられる.

$$T(w)=\frac{\rho}{2}\int_0^b\int_0^a h\Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2 dxdy \quad (2)$$

$$U(w)=-\frac{N_x}{2}\int_0^b\int_0^a\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 dxdy \quad (3)$$

ここに，ρ：板の密度，$N_x=N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t$：面内力（圧縮を正とする)，$N_{x0}$：静的面内力，$N_{xt}$：変動面内力の振幅，$\Omega$：変動面内力の円振動数，$t$：時間.

一般解を次のように仮定する.

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}T_{mn}(t)W_{mn}(x,y) \quad (4)$$

ここに，T_{mm}：未知の時間関数，W_{mn}：境界条件を満足する座標関数．本研究では，面内力を受けない Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の固有振動形を用いる（Appendix A).

一般座標に関する運動方程式を誘導するために，Hamilton の原理を用いる．すなわち,

$$\delta\int_{t1}^{t2}Ldt=\delta\int_{t1}^{t2}\{T-(V-U)\}dt=0 \quad (5)$$

ここに，$\delta T_{mn}(t_1)=\delta T_{mn}(t_2)=0$.

次に，式（5）の変分を行い，部分積分してまとめると，次式が与えられる.

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{T}_{kl}}\Big)+\frac{\partial V}{\partial T_{kl}}-\frac{\partial U}{\partial T_{kl}}=0 \quad (k,\ l;1,\ 2,\ \cdots,\ N) \quad (6)$$

式（6）に式（1），(2)，(3）を代入し，偏微分した後，x，y座標，時間および面内力に関して無次元化すると，一般座標に関する運動方程式が得られる.

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}\sum_{k=1}\sum_{l=1}\Big[C_{mn}^{kl}\ddot{T}_{mn}+\Big\{\frac{1}{k_{11}^4}A_{mn}^{kl}-\frac{\lambda_b\pi^2}{k_{11}^4}(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)B_{mn}^{kl}\Big\}T_{mn}\Big]=0 \quad (7)$$

ここに，$\lambda_b=N_{cr}b^2/D_1\pi^2$：座屈固有値，$D_1$，$h_1$：$x=a$ での板剛度，板厚，$k_{11}^4=\rho h_1\omega_{11}^2 b^4/D_1\pi^4$：Pasternak 基礎がない場合の 1 次振動固有値，$\bar{\omega}=\Omega/\omega_{11}$，$\omega_{11}$：一様断面正方形板の 1 次振動の固有円振動数，$\bar{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$：無次元静的面内力，$\bar{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$：無次元変動面内力の振幅，$N_{cr}$：座屈荷重，$\tau=\omega_{11}t$：無次元時間，$A_{mn}^{kl}$，$B_{mn}^{kl}$，$C_{mn}^{kl}$（Appendix B).

式（7）を行列表示すると，次式になる.

$$[C]\{\ddot{T}\}+[A]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[B]\{T\}=\{0\} \quad (8)$$

$[C]:C\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}=C^{kl}_{mn},$

$[A]:A\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}=\dfrac{1}{k_{11}^4}A^{kl}_{mn},$

$[B]:B\{l+(k-1)L,\ n+(m-1)L\}=\dfrac{\lambda_b}{k_{11}^4}B^{kl}_{mn},$

式（8）に，$[C]$ の逆行列 $[C]^{-1}$ を左側から掛けると次式になる．

$$[I]\{\ddot{T}\}+[F]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G]\{T\}=\{0\} \quad (9)$$

ここに，$[F]=[C]^{-1}[A]$，$[G]=[C]^{-1}[B]$．

式（9）は連立の Mathieu の方程式である．式（9）において行列 $[I]$，$[F]$ および $[G]$ の性質を調べると，$[I]$ は単位行列，$[F]$ は対角線に固有円振動数の2乗が並んだ対角行列である．行列 $[G]$ は零要素を多く含んでおり，境界条件によっては零要素の配置および数が異なる係数励振行列である．したがって，行列 $[G]$ の行と列の並び替えを行えば，いくつかの非零要素からなる小行列に分割することができる．また，行列 $[G]$ の要素構成により発生する結合共振の組合せは各境界条件により異なる[7]．境界条件ごとに説明すると，以下のようになる．

1）CASEⅠ，Ⅲ の場合：y 方向の振動波形の半波数が正弦波で与えられるために，y 方向の半波数については連成がない．よって，式（9）は y 方向の半波数 n ごとに L 個に分割される．

$$[I]\{\ddot{T}_n\}+[F_n]\{T_n\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_n]\{T_n\}=\{0\} \quad (10)$$

ここに，$[I]$，$[F_n]$，$[G_n]$：$L\times L$ の行列，

$$\{T\}=\{T_{1n}\cdots T_{2n}\cdots T_{Ln}\}^T.$$

なお，T_{ij} は固有円振動数 ω_{ij} および固有振動形 W_{ij} をもつ時間関数である．時間関数 T_{ij} のサフィックス i は x 方向の振動波形の半波数を表し，サフィックス j は y 方向の振動波形の半波数を表す．したがって CASEⅠ，Ⅲの場合，y 方向の半波数が等しくなるような固有振動形をもつ結合共振が発生する．

2）CASEⅡ,Ⅳ の場合：$[G]$の要素の半分は0となる．x，y 方向とも振動波形が正弦波で与えられないために，x,y 方向の半波数で分割することができない．この場合，並べ替え操作を行なう．$L=4$ を考えた16自由度を例にして説明する．このときの時間関数 $\{T\}$ は次のようになる．

$$\{T\}=\{T_{11}T_{12}T_{13}T_{14}:T_{21}T_{22}T_{23}T_{24}:T_{31}T_{32}T_{33}T_{34}:T_{41}T_{42}T_{43}T_{44}\}^T$$

この行列$[G]$ の要素は，行と列の入れ替えにより，2つの 8×8 の正方行列に分割できる．

ここで，$[G]$ を小行列表示すると次式になる．

$$[G]=\begin{bmatrix}[G_1][0]\\ [0][G_2]\end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに，$[G_1]$，$[G_2]$：8×8の正方行列，$[0]$：8×8の零行列．

以上の並べ替えの変化に対応した時間関数 $\{T\}$ は，次の通りである．

$$\{T\}=\{T_{11}T_{13}T_{31}T_{33}T_{21}T_{23}T_{41}T_{43}:T_{12}T_{14}T_{32}T_{34}T_{22}T_{24}T_{42}T_{44}\}^T$$

次に，時間関数 $\{T\}$ の変化に行列 $[F]$ を対応させるため，行列 $[G]$ の入れ替え操作と同じ操作を行列 $[F]$ でも行う．行列 $[I]$ は単位行列なので，時間関数が入れ替っても行列要素自体の変化はない．以上によって求まった行列 $[G],[F],[I]$ を用いることにより，式（9）は次の2個に分割される．

$$[I]\{\ddot{T}_i\}+[F_i]\{T_i\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_i]\{T_i\}=\{0\} \quad (12)$$

ここに，$[I],[F_i],[G_i]$：8×8の行列，$i=1,\ 2$．

$$\{T_1\}=\{T_{11}T_{13}T_{31}T_{33}T_{21}T_{23}T_{41}T_{43}\}^T,$$
$$\{T_2\}=\{T_{12}T_{14}T_{32}T_{34}T_{22}T_{24}T_{42}T_{44}\}^T$$

時間関数 T_{ij} のサフィックス i は x 方向の振動波形の半波数を表し，サフィックス j は y 方向の振動波形の半波数を表す．

2つの自由度の組合せ T_{ij} と T_{mn} において，$j+n=$偶数となるような組み合わせで分割される．したがって，y 方向の半波数の和が偶数となるような結合共振が発生する．

3）CASEⅤ の場合：行列 $[G]$ の要素のうち，半分は0である．CASEⅠ～Ⅳ と同様に，時間関数 $\{T\}$ の順番を並び替えることにより，行列 $[G]$ の要素を零と非零のグループにまとめる．CASEⅤ の行列 $[G]$ も，式（11）と同じ形式の小行列になる．

このときの並び替えによって，行列 $[I]$ と $[F]$ も対角行列になるので，式（9）は2つに分割することができる．いま，小行列 $[G_1]$ と $[G_2]$ の大きさが同じになるように時間関数 $\{T\}$ の要素を選ぶと，式（9）は次のように分割される．

$$[I]\{\ddot{T}_i\}+[F_i]\{T_i\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G_i]\{T_i\}=\{0\} \quad (13)$$

$$\{T_1\}=\{T_{11}T_{21}T_{13}T_{23}T_{31}T_{33}T_{41}T_{15}\}^T,$$
$$\{T_2\}=\{T_{12}T_{22}T_{14}T_{32}T_{24}T_{42}T_{34}T_{16}\}^T\cdot i=1,\ 2$$

上式において，$\{T_1\}$ は y 方向の変形が $y=b/2$ に対して対称な固有振動形をもつ自由度によって構成される．$\{T_2\}$ は y 方向の変形が $y=b/2$ に対して逆対称な固有振動形をもつ自由度によって構成される．CASEⅤ において，時間関数 T_{ij} のサフィックス i は x 方向の振動波形の次数を意味し，片持ちはりの振動次数に対応する．

サフィックスjはy方向の振動波形の次数を意味し，$j=1$は両端自由はりの並進剛体モード，$j=2$は回転の剛体モードに対応し，$j \geqq 3$は両端自由はりの曲げ振動の（$j-2$）次の振動次数に対応する．したがって，y方向の振動次数が偶数，奇数となるような結合共振が発生する．

以上の処理によって計算自由度を減らすことができ，かつ不安定領域の種類の判定を容易にすることができる．

縮小された式（9）の一般解を，次のようにフーリエ級数を使って仮定する．

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}_0+\sum_{k=1}(\boldsymbol{a}_k \sin k\bar{\omega}\tau+\boldsymbol{b}_k \cos k\bar{\omega}\tau)\right\} \qquad (14)$$

ここに，λ：未定定数，$\boldsymbol{b}_0$，$\boldsymbol{a}_k$，$\boldsymbol{b}_k$：未知のベクトル．

式（14）を式（9）に代入し調和バランス法を適用すると，以下の様な代数方程式が与えられる．

$$([M_0]-\lambda[M_1]-\lambda^2[M_2])\{X\}=\{0\} \qquad (15)$$

ここに，$[M_0]$, $[M_1]$, $[M_2]$：係数行列．

いま，$\{Y\}=\lambda\{X\}$ なる新しいベクトルを代入すれば，式（15）は2倍サイズの固有値問題に変換される[1]．

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

ここに，$\{X\}=\{\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\cdots\}^T$．

3. 計算パラメータ

$x=a$での板剛度D_1，板厚h_1，ヤング率E_1を用いると，断面内のx点における諸値は次のように設定される[7]．

$$h(\xi)=h_1\{1+\beta^*(1-\xi)\}=h_1G(\xi),$$
$$E(\xi)=E_1\{1-\delta(1-\xi)\}=E_1T(\xi),$$
$$D(\xi)=D_1\{1-\delta(1-\xi)\}\{1+\beta^*(1-\xi)\}^3$$
$$=D_1T(\xi)G(\xi)^3=D_1S(\xi),\ \xi=x/a.$$

ここに，$G(\xi)$，$T(\xi)$，$S(\xi)$：ξの関数．

変断面パラメータβ^*の存在によって板厚は増大し，温度パラメータδの存在によってヤング率は低下する．長方形板の縦横比$\beta=a/b$とし，Pasternak基礎を表す定数としては，無次元バネ定数κ_e^*，無次元せん断層定数κ_s^*を用いる（Appendix A）．なお，本研究ではパラメータβ^*，δ，κ_e^*およびκ_s^*の大きさは文献2）と同じとする．

4. 固有振動特性

（1） 収束性の検討

数値解析の前に，Appendix Aで示した本解法の解の収束性を，全周辺単純支持（CASE Ⅰ）の場合で検討する．温度勾配をもつ変断面正方形板（$\beta^*=0.6$，$\delta=0.8$）に対して，Pasternak基礎がない場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$）とある場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$）で，採用した項数$N$に伴う固有振動数$\lambda_v^2$の収束状況を**Fig.2**（a），（b）に示す．両図は，ともに4次の固有振動数を表す．いずれの場合も収束に3項程度を必要とし，他の境界条件においても解の収束性は良好である．したがって，本解法では解析に10項近似を採用する．

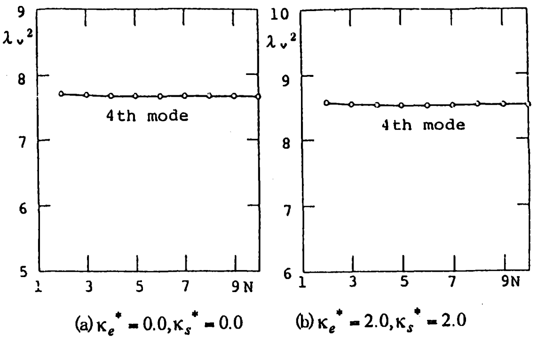


Fig.2 Convergence of natural frequencies : CASE Ⅰ, $\beta=1.0$, $\beta^*=0.6$, $\delta=0.8$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

Table 1 Natural frequencies of square plate : CASE Ⅰ, $\beta=1.0$, $\beta^*=\delta=\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

CASE	present solution	preceding solution
Ⅰ	8.000	8.000
Ⅱ, Ⅲ	9.596	9.596
Ⅳ	10.99	11.01
Ⅴ	2.764	2.742

（2） 数値結果の妥当性

本研究の解析が有効であるかどうかを検討する．Pasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の比較解を得ることは困難なので，Pasternak基礎がない一様断面正方形板で比較する．

Table 1は，本解法によるCASE Ⅰ～Ⅴの正方形板の4次の固有振動数と文献8)，9）による解を表す．ここで，文献8)，9）は解法として，CASE Ⅰ～Ⅳ はGalerkin法，CASEⅤは重ね合せ法を採用している．これにより，CASE Ⅰ～Ⅴ とも1％以内の相対誤差で一致することが確かめられる．

（3） 変断面パラメータと温度パラメータの影響

Fig.3（a）は，全周辺単純支持正方形板（CASE Ⅰ）の無次元固有振動数λ_v^2と変断面パラメータβ^*の関係を示す．図中の実線は，Pasternak基礎がない場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$）で，点線はPasternak基礎がある場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$）を表す．基礎の有無に関わらず，$\beta^*$が増大

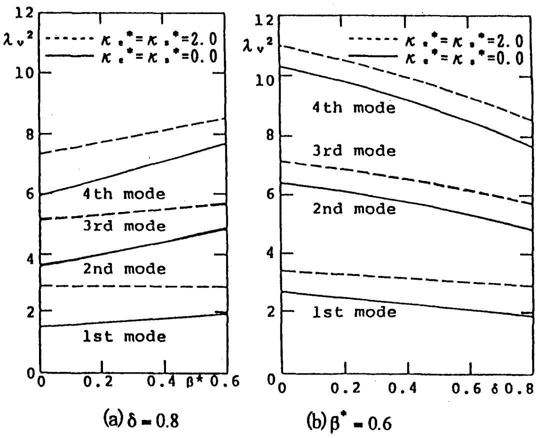


Fig.3 Natural frequencies of square plate : CASE I , $\beta=1.0$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

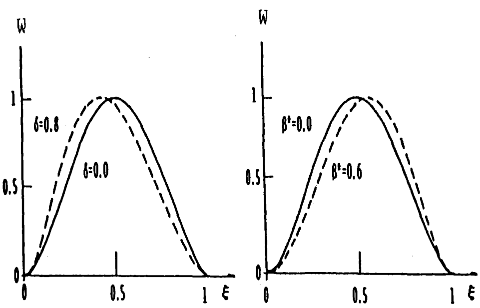


Fig.4 Vibration modes : CASE IV, $\beta=1.0$, $\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

するにしたがって固有振動数は増加し，β^* の増加の割合は高次振動になるほど大きくなる．

Fig.3（b）は，全周辺単純支持正方形板（CASE I）の無次元固有振動数 λ_v^2 と温度パラメータ δ の関係を示す．図中の実線は，Pasternak 基礎がない場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$）で，点線は Pasternak 基礎がある場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$）を示す．基礎の有無に関わらず，$\delta$ が増大するにしたがって固有振動数は低下し，δ の減少の割合は高次振動になるほど大きくなる．なお，本論文で考慮しているすべての境界条件において，β^* と δ は固有振動数に同様な影響を及ぼす．

変断面パラメータ β^* と温度パラメータ δ が固有振動形に与える影響を **Fig.4** に示す．**Fig.4** は，Pasternak 基礎がない正方形板（$\beta=1.0$，$\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$）の $y=b/2$ における x 方向の 1 次振動の固有振動形を表わす（CASE V）．図面の縦軸 W は最大たわみで無次元化したたわみで，横軸 ξ は長方形板の $\eta=1/2$ における板の断面に沿う座標系である．したがって，β^* および δ が存在しない一様断面正方形板の場合，$\xi=0.5$ で $W=1$

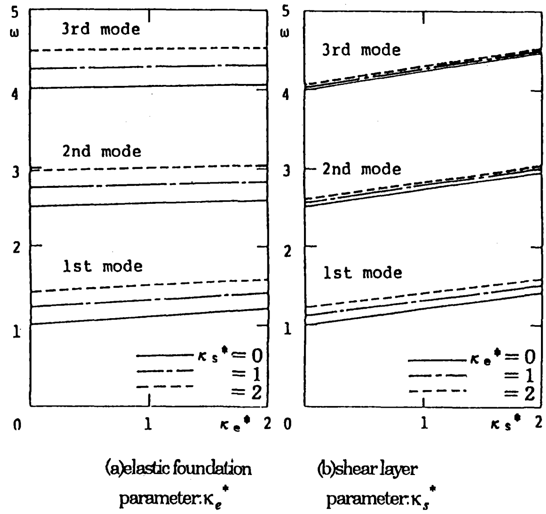


Fig.5 Properties of Pasternak foundation : CASE I , $\beta=1.0$, $\beta^*=0.6$, $\delta=0.8$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

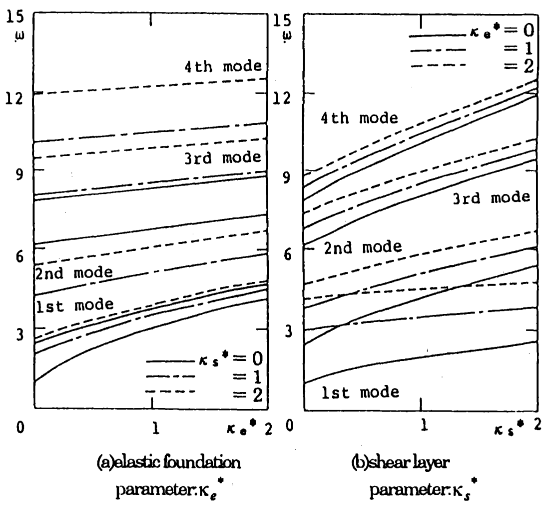


Fig.6 Properties of Pasternak foundation : CASE I , $\beta=1.0$, $\beta^*=0.6$, $\delta=0.8$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

となる．正方形板が変断面になると，振動形の腹が板厚の薄い方へ移動する．一方，温度勾配をもつと振動形の腹が温度の高い方へ移動する．これは，振動形の腹が剛性の低下する側に移動するためで，β^* と δ が同時に存在する場合，これらの効果は相殺されて小さくなる．これは，δ による固有振動数の減少を断面を厚くすることでカバーできることを示すものである．

（4） Pasternak 基礎パラメータ κ_e^*，κ_s^*の影響

Fig.5，6 に Pasternak 基礎上の正方形板（**Fig.5**：CASE I，**Fig.6**：CASE V）の固有振動特性を示す．

Table 2 Buckling eigenvalues of square plate : $\beta=1.0$ and $\beta^*=\delta=\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$.

CASE	present solution	preceding solution
I	4.00	4.00
II	7.70	7.69
III	6.74	6.74
IV	10.08	10.07

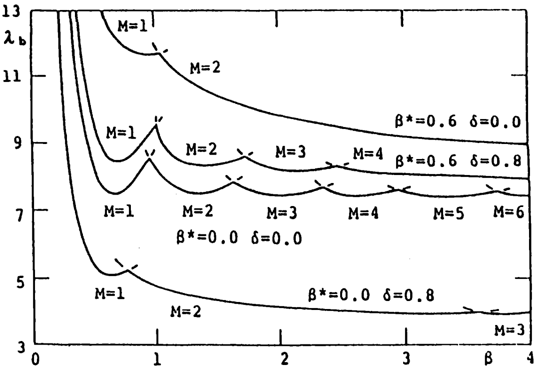


Fig.7 Buckling curves : CASE I and $\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$.

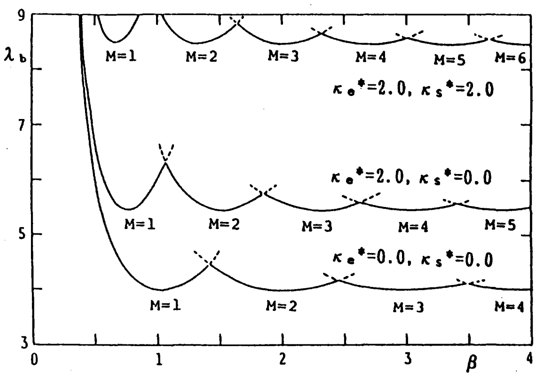


Fig.8 Buckling curves : CASE I and $\beta^*=\delta=0.0$.

Table 3 Possible combination resonances.

boundary conditions	combination resonances
CASE I ,III	$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k,\ j=n$
CASE II ,IV	$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k,\ j+n=even$
CASE V	$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k,\ j,n=even$ $j,n=odd$

両図の縦軸 ω は無次元円振動数（$\beta^*=\delta=\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$ の場合の１次の固有円振動数で無次元化）で，横軸 κ_e^*, κ_s^* はそれぞれ Pasternak 基礎の剛性パラメータである．$\kappa_s^*=0.0$ はせん断層が無い Winkler 基礎に相当する．**Fig.5**，**6** から明らかなように，κ_e^* と κ_s^* はともに固有振動数を増加させる．振動次数が高次になるにつれて κ_e^* の影響は少なくなるが，κ_s^* の影響は逆に大きくなる．κ_s^* の項は式（１）のようにたわみ角との積で与えられるため，高次ほど効いてくる．なお，Kar の論文[2]によればせん断層の効果は構造物の剛性を低下させる結果となっているが，これは数値結果の誤りと判断される．

CASE I と CASE V では Pasternak 基礎定数の効果に大きな差が見られる．これは，境界条件に自由辺が入ってくると平板の剛性が減小するために，Pasternak 基礎の剛性の効果が相対的に大きくなるからである．

5. 座 屈 特 性

固有振動特性と同様に，Pasternak 基礎がない一様断面正方形板で，Appendix A で示した数値解の妥当性を検討する．**Table 2** に，本解法による CASE I ～IV の座屈荷重と Galerkin 法による解[8]を表示する．**Table 2** より，1% 以内の相対誤差で一致することが確かめられた．

Fig.7，**8** は，CASE I の Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の座屈曲線である．両図の縦軸は座屈固有値（$\lambda_b=N_xb^2/D_1\pi^2$）で，横軸は縦横比 β である．

Fig.7 は，変断面パラメータ β^* と温度パラメータ δ が座屈曲線に与える影響を示す．β^* が座屈固有値を大きくし，δ が座屈固有値を小さくする．両方のパラメータが同時に存在する場合，互いの影響が相殺される．

Fig.8 は，Pasternak 基礎のある場合，($\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$)，Winkler 基礎のある場合（$\kappa_e^*=2.0$, $\kappa_s^*=0.0$）および基礎無しの場合（$\kappa_e^*=\kappa_s^*=0.0$）の座屈曲線を示す．基礎パラメータ κ_e^*, κ_s^* により，座屈固有値は増大する．

図中の M は，x 方向の半波数を表し，縦横比 β の変化により長方形板の座屈パターンが異なる．

6. 動的不安定領域

（１） 境界条件の影響

不安定領域の種類には，励振振動数が系の固有円振動数の２倍の整数分の１で生じる単純共振 $2\omega_{ij}/k$ と，励振振動数の２個の固有円振動数の和あるいは差の整数分の１で生じる結合共振（$\omega_{ij}\pm\omega_{mn}$）$/k$ がある．いずれも $k=1$ の場合を主不安定領域といい，$k\geqq 2$ を副不安定領域という[10]．

不安定領域の種類は各境界条件によって異なり，式（９）の係数励振行列［G］の要素構成によって定まる．行列［G］の要素はすべて０ではないので，対角線要素

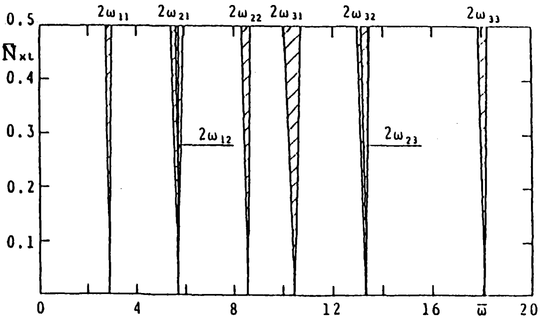


Fig.9 Unstable regions : CASEⅠ, $\beta=1.0$, $\beta^{*}=0.6$, $\delta=0.8$, $\kappa_e^{*}=\kappa_s^{*}=2.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

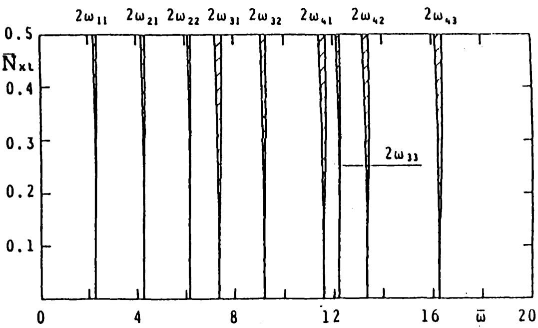


Fig.10 Unstable regions : CASEⅣ, $\beta=1.0$, $\beta^{*}=0.6$, $\delta=0.8$, $\kappa_e^{*}=\kappa_s^{*}=2.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

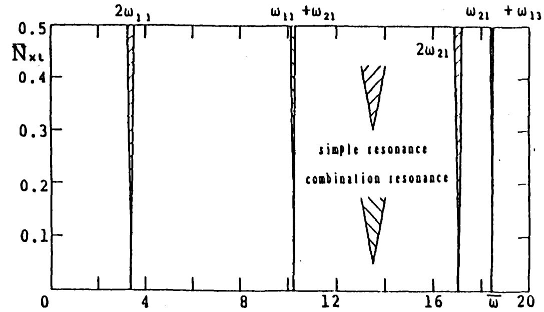


Fig.11 Unstable regions : CASEⅣ, β 1.0, $\beta^{*}=0.6$, $\delta=0.0$, $\kappa_e^{*}=\kappa_s^{*}=0.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

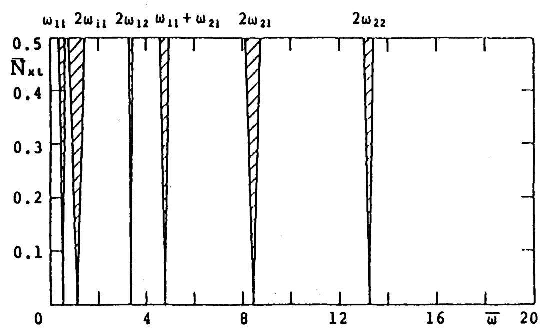


Fig.12 Unstable regions : CASEⅤ, $\beta=1.0$, $\beta^{*}=0.0$, $\delta=0.8$, $\kappa_e^{*}=\kappa_s^{*}=0.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

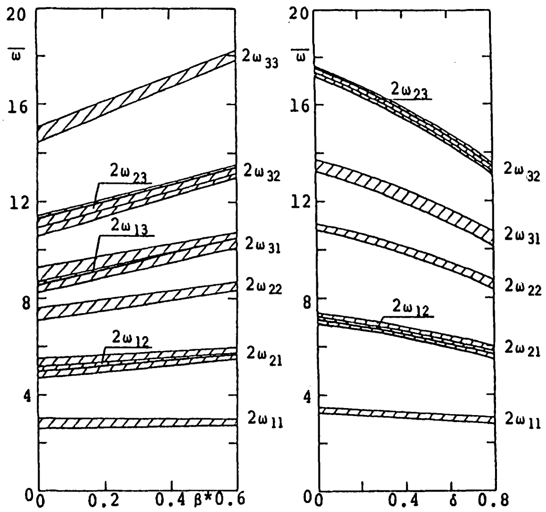
g^{i}_{jj} から定まる単純共振と，非対角線要素 g^{i}_{jk} から定まる結合共振が存在しうる．本論文に使用した解析法によると，g^{i}_{jk} と g^{i}_{kj} の符号が同じであるから，和型の結合共振のみが存在する[10]．結合共振の組合せは各境界条件で異なり，**Table 3** で示されるような結合共振が存在する．

Fig.9, 10 は，Pasternak 基礎上に置かれた，温度勾配をもつ全周辺単純支持(CASEⅠ)，全周辺固定(CASEⅣ) の変断面正方形板が変動面内力を受ける場合の不安定領域（$\beta=1.0$, $\beta^{*}=0.6$, $\delta=0.8$, $\kappa_e^{*}=\kappa_s^{*}=2.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$）を示す．図中の縦軸は，Pasternak 基礎がない場合の座屈荷重で無次元化した変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ である．横軸は，静的面内力 $\bar{N}_{x0}$ のときの１次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である．図中の右上がりの斜線部が単純共振の不安定領域を意味する．これらの図に示すように，単純共振の主不安定領域 $2\omega_{ij}$ が卓越する．また，図中の不安定領域は，無次元変動面内力 $\bar{N}_{xt}=0.5$ における無次元励振振動数 $\bar{\omega}$ の幅が 0.1 以上のものをプロットしているので，結合共振のように実際には存在しているが不安定領域幅の狭い不安定領域($\bar{N}_{xt}=0.5$ で幅 0.1 以下）は省略している．これらの図中の斜線部にパラメータ（$\bar{N}_{xt}$, $\bar{\omega}$）が含まれる場合に，長方形板に面外振動が発生し範囲内では振動は発散する．また，温度勾配や変断面の影響を考慮しない，Pasternak 基礎上の一様断面正方形板の場合[6]では，単純共振および結合共振の主不安定領域 $\{2\omega_{ij}/k, (\omega_{ij}+\omega_{mn})/k; k=1\}$ の他に，単純共振の副不安定領域 $\{2\omega_{ij}/k,\ k\geq 2\}$ が存在する．

（2） 変断面パラメータと温度パラメータの影響

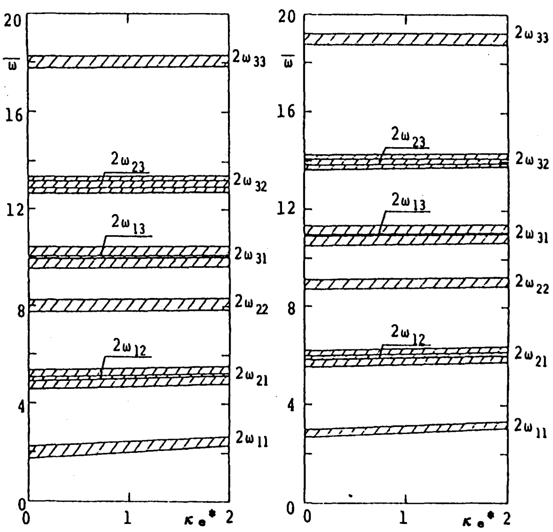
Fig.11, 12 は，CASEⅤ の片持ち正方形板の不安定領域を表す．**Fig.11** のパラメータの設定は（$\beta^{*}=0.6$, $\delta=0.0$）であり，**Fig.12** のパラメータの設定は（$\beta^{*}=0.0$, $\delta=0.8$）である．両図の縦軸は，無次元変動面内力 $\bar{N}_{xt}$ であり，横軸は無次元励振振動数 $\bar{\omega}$ である．なお，図中の右上がりの斜線部が単純共振の不安定領域を表し，右下がりの斜線部が結合共振の不安定領域を表す．

Fig.11 に表れる不安定領域は $y=b/2$ に対して対称な固有振動形の固有振動数によって形成されている．不安定領域には単純共振の主不安定領域 $2\omega_{ij}$ と結合共振の主不安定領域 $\omega_{ij}+\omega_{mn}$ があり，結合共振より単純共振の方が不安定領域の幅が広い．**Fig.12** に表れる不安定領域は $y=b/2$ に対して対称・逆対称の固有振動形から形成される．**Fig.11** と同様に，単純共振と結合共振の



(*a*) δ = 0.8 (*b*) β* = 0.6

Fig.13 Variation of unstable regions : CASE I $\beta=1.0$, $\kappa_e^*=\kappa_s^*=2.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.



(a)Winkler foundation ($\kappa_s^*=0.0$) (b)Pasternak foundation ($\kappa_s^*=2.0$)

Fig.14 Unstable regions : CASE, $\beta=1.0$, $\beta^*=\delta=0.0$, $\bar{N}_{xt}=0.5$ and $\bar{N}_{x0}=0.0$.

両方が存在し，単純共振には主不安定領域のほかに副不安定領域 ω_{ij} が現れている．なお，Kar による解析[2]では，はりとして近似しているため，ω_{i1} のように y 方向のモードが剛体モードの場合のみが得られる．また，Bolotin の方法を用いているため，$\omega_{11}+\omega_{21}$ のような結合共振を得ることができない．

温度勾配パラメータが存在すると固有振動数が小さくなるので，それに伴い不安定領域も **Fig.11** に比べ $\bar{\omega}$ の低い位置で発生する．また，不安定領域の幅も増加する．

Fig.13 は温度勾配をもつ変断面片持ち正方形板（CASE I）の不安定領域に及ぼす変断面パラメータ β^*，温度パラメータ δ の影響を表したものである．ここで，不安定領域は無次元変動面内力 $\bar{N}_{xt}=0.5$ で求めている．変断面パラメータが大きくなるほど正方形板の板厚が増し，剛性が大きくなるので不安定領域幅は狭くなる安定化効果をもつ．逆に温度パラメータが大きくなる程ヤング率が低下し，剛性が小さくなるので不安定領域幅が広くなる不安定化効果をもつ．

(3) Pasternak基礎パラメータ κ_e^*, κ_s^* の影響

Fig.14(a),(b)に，全周辺単純支持正方形板（CASE I）について，Winkler 基礎（$\kappa_s^*=0.0$）と Pasternak 基礎（$\kappa_s^*=2.0$）の２つの場合で，変動面内力 $\bar{N}_{xt}=0.5$ における不安定領域幅 $\bar{\omega}$ と無次元バネ定数 κ_e^* との関係を示す．不安定領域の幅は Pasternak 基礎（$\kappa_s^*=2.0$）の方が狭く，κ_e^* の増大に伴って不安定領域の幅は狭くなる．したがって，Pasternak 基礎パラメータ κ_e^*，κ_s^* は不安定領域を狭くする安定化効果をもつ．

7. 結　　論

本論文は，Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の固有振動，座屈特性および動的安定性を，Pasternak 基礎，温度勾配および変断面パラメータのもとに明らかにしたものである．得られた結果をまとめると

1) 本論文で採用した Rayleigh-Ritz 法で得られた固有振動形をもとに Hamilton の原理を用いて，Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の動的安定問題をモード毎の一般座標に関する運動方程式に変換できた．

2) Pasternak 基礎上の温度勾配をもつ変断面長方形板の不安定領域の種類は，単純共振と結合共振が存在する．しかし，結合共振は，単純共振に比べて不安定領域の幅は狭い．

3) はりを平板に拡張することによる片持ち長方形板としての解析より，はりの曲げモード以外の不安定領域も現れることを示した．

4) Pasternak 基礎のせん断層評価については，文献 2) の結果と逆の結果が得られたが，せん断層は剛性に寄与するため，本論文によって得られた結果が妥当である．

最後に，本研究の数値計算には長崎大学総合情報処理センターの電子計算機 FACOM VP-1200 モデル 10 を使用したことを付記する．

Appendix A Ritz 法による固有振動解析および座屈解析

式（1）および式（3）より，全ポテンシャルエネルギー W は以下のようになる．

$$W(w)=V(w)-U(w) \tag{A-1}$$

固有振動および座屈解析のために，上式において $N_{xt}=0$ とする．式（A-1）の一般解を次のように仮定する．

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}A_{mn}h_m(\xi)\bar{h}_n(\eta)e^{i\omega t} \tag{A-2}$$

ここに，h_m, $\bar{h}_n$：CASE Ⅰ～Ⅳ では，はりの座屈波形，CASE Ⅴ では，はりの固有振動形（Appendix C），A_{mn}：未定定数，ω：固有円振動数．

無次元化した式（A-1）および式（2）に式（A-2）を代入し，Rayleigh-Ritz 法を適用すると次式が得られる．

$$\sum_{m=1}\sum_{n=1}\sum_{r=1}\sum_{s=1}A_{mn}(E_{mrns}-\lambda_v^4 Fmrns-\bar{N}_{x0}Gmrns)=0 \tag{A-3}$$

ここに，

$$E_{mrns}=\frac{1}{\beta^4}I^2{}_{mr}\bar{I}^1_{ns}+\frac{v}{\beta^2}(I^3_{mr}\bar{I}^2_{ns}+I^4_{mr}\bar{I}^3_{ns})+I^1_{mr}\bar{I}^5_{ns}$$
$$+\frac{2(1-v)}{\beta^4}I^5_{mr}\bar{I}^4_{ns}+\kappa_e^* I^7_{mr}\bar{I}^1_{ns}$$
$$+\kappa_s^*\left(\frac{1}{\beta^2}I^8_{mr}\bar{I}^1_{ns}+I^7_{mr}\bar{I}^4_{ns}\right),$$

$$G_{mrns}=\frac{1}{\beta^2}I^8_{mr}\bar{I}^1_{ns},\ F_{mrns}=I^6_{mr}\bar{I}^1_{ns},\ I^1_{mr},\ I^2_{mr},\ \cdots$$

：固有関数の定積分（Appendix C）($m,\ n,\ r,\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ N$).

ここに，$\kappa_e^*=K_eb^4/D_1\pi^4$：無次元バネ定数，$\kappa_s^*=K_Sb^2/D_1\pi^2$：無次元せん断層定数．

式（A-3）は次のように行列表示される．

$$([E]-\lambda_v^4[F]-\bar{N}_{x0}[G])\{x\}=\{0\} \tag{A-4}$$

$$[E]=E\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=E_{mrns},$$
$$[F]=F\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=F_{mrns},$$
$$[G]=G\{s+(r-1)N,\ n+(m-1)N\}=G_{mrns},$$
$$\{x\}=\{A_{11}A_{12}A_{13}\cdots A_{1N}A_{21}\cdots A_{1N}A_{NN}\}^T.$$

$\bar{N}_{x0}=0$ とおけば，自由振動の固有値 λ_v が得られる．また，$\lambda_v=0$ とおけば，$\bar{N}_{x0}=\lambda_b$ の座屈の固有値が得られる．数値解析において，式（A-4）は行列の固有値問題に変換される．ベクトル $\{X\}$ を用いて，1次，2次，…，N 次の固有振動形を得ることができる．

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^m\sin m\pi\xi\sum_{q=1}a_q^n\sin n\pi\eta, \qquad \text{(CASE Ⅰ)}$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^m\sin m\pi\xi\times\sum_{q=1}a_q^n\{\cos(q-1)\pi\eta-\cos(q+1)\pi\eta\}, \qquad \text{(CASE Ⅱ)}$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^n\{\cos(p-1)\pi\xi-\cos(p+1)\pi\xi\}\times\sum_{q=1}a_q^n\sin n\pi\eta, \qquad \text{(CASE Ⅲ)}$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^n\{\cos(p-1)\pi\xi-\cos(p+1)\pi\xi\}\times\sum_{q=1}a_q^n\{\cos(q-1)\pi\eta-\cos(q+1)\pi\eta\}. \qquad \text{(CASE Ⅳ)}$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^m X_p(\xi)\sum_{q=1}a_q^n Y_q(\eta). \qquad \text{(CASE Ⅴ)}$$

ここに，$\xi=x/a$, $\eta=y/b$, X_p：片持ちばりの固有振動形，Y_q：両端自由ばりの固有振動形，a_p^m, a_q^n：自由振動解析から得られるモード定数．

Appendix B 定積分 A^{kl}_{mn}, B^{kl}_{mn}, C^{kl}_{mn}.

$$A^{kl}_{mn}=\int_0^1\int_0^1 S(\xi)\left\{\frac{1}{\beta^4}\bar{W}_{mn,\xi\xi}\bar{W}_{kl,\xi\xi}+\bar{W}_{mn,\eta\eta}\bar{W}_{kl,\eta\eta}\right.$$
$$+\frac{v}{\beta^2}(\bar{W}_{mn,\xi\xi}\bar{W}_{kl,\eta\eta}+\bar{W}_{mn,\eta\eta}\bar{W}_{kl,\xi\xi})$$
$$\left.+\frac{2(1-v)}{\beta^2}\bar{W}_{mn,\xi\eta}\bar{W}_{kl,\xi\eta}\right\}d\xi d\eta$$
$$+\kappa_e^*\int_0^1\int_0^1\bar{W}_{mn}\bar{W}_{kl}d\xi d\eta$$
$$+\kappa_s^*\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{1}{\beta^2}\bar{W}_{mn,\xi}\bar{W}_{kl,\xi}+\bar{W}_{mn,\eta}\bar{W}_{kl,\eta}\right\}d\xi d\eta,$$

$$B^{kl}_{mn}=\int_0^1\int_0^1\bar{W}_{mn,\xi}\bar{W}_{kl,\xi}d\xi d\eta,$$

$$C^{kl}_{mn}=\int_0^1\int_0^1 G(\xi)\bar{W}_{mn}\bar{W}_{kl}d\xi d\eta,$$

$$\bar{W}_{uv}=\sum_{m=1}a_m^u h_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}_n,\ \bar{W}_{uv,\xi\eta}=\sum_{m=1}a_m^u h'_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}'_n,$$
$$\bar{W}_{uv,\xi\xi}=\sum_{m=1}a_m^u h''_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}_n,\ \bar{W}_{uv,\eta\eta}=\sum_{m=1}a_m^u h_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}''_n,$$
$$\bar{W}_{uv,\xi}=\sum_{m=1}a_m^u h'_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}_n,\ \bar{W}_{uv,\eta}=\sum_{m=1}a_m^u h_m\sum_{n=1}a_n^v\bar{h}'_n,$$

a_m^u, a_n^v：モード定数，h_m, h'_m, h''_m, $\bar{h}_n$, $\bar{h}'_n$, $\bar{h}''_n$（Appendix C）．($m,\ n,\ k,\ l,\ u,\ v=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)

Appendix C はりの固有関数の定積分

$$I^1_{mr}=\int_0^1 S(\xi)h_m h_r d\xi,\ I^2_{mr}=\int_0^1 S(\xi)h''_m h''_r d\xi,$$

$$I^3_{mr}=\int_0^1 S(\xi)h_m h''_r d\xi,\ I^4_{mr}=\int_0^1 S(\xi)h''_m h_r d\xi,$$

$$I^5_{mr}=\int_0^1 S(\xi)h'_m h'_r d\xi,\ I^6_{mr}=\int_0^1 h'_m h'_r d\xi,$$

$$I^7_{mr}=\int_0^1 h_m h_r d\xi,\ I^8_{mr}=\int_0^1 G(\xi)h_m h_r d\xi,$$

$$\bar{I}^1_{ns}=\int_0^1\bar{h}_n\bar{h}_s d\eta,\ \bar{I}^2_{ns}=\int_0^1\bar{h}''_n\bar{h}_s d\eta,\ \bar{I}^3_{ns}=\int_0^1\bar{h}_n\bar{h}''_s d\eta,$$

$$\bar{I}^4_{ns}=\int_0^1\bar{h}'_n\bar{h}'_s d\eta,\ \bar{I}^5_{ns}=\int_0^1\bar{h}''_n\bar{h}''_s d\eta.$$

$$h'_m=\frac{dh_m}{\pi d\xi},\ h''_m=\frac{d^2h_m}{\pi^2 d\xi^2},\ h'_r=\frac{dh_r}{\pi d\xi},$$

$$h''_r=\frac{d^2h_r}{\pi^2 d\xi^2},\ \bar{h}'_n=\frac{d\bar{h}_n}{\pi d\eta},\ \bar{h}''_n=\frac{d^2\bar{h}_n}{\pi^2 d\eta^2},$$

$$\bar{h}'_s=\frac{d\bar{h}_s}{\pi d\eta},\ \bar{h}''_s=\frac{d^2\bar{h}_s}{\pi^2 d\eta^2}.$$

1） CASEⅠ～Ⅳ の場合

$h_m(\xi)=\sin m\pi\xi$(CASEⅠ, Ⅱ), $h_r(\xi)=\sin r\pi\xi$(CASEⅠ, Ⅱ),

$h_m(\xi)=\cos(m-1)\pi\xi-\cos(m+1)\pi\xi$(CASEⅢ, Ⅳ)

$h_r(\xi)=\cos(r-1)\pi\xi-\cos(r+1)\pi\xi$(CASEⅢ, Ⅳ)

$\bar{h}_n(n)=\sin n\pi\eta$(CASEⅠ, Ⅲ), $\bar{h}_s(\eta)=\sin s\pi\eta$(CASEⅠ, Ⅲ),

$\bar{h}_n(\eta)=\cos(n-1)\pi\eta-\cos(n+1)\pi\eta$(CASEⅡ, Ⅳ),

$\bar{h}_s(\eta)=\cos(s-1)\pi\eta-\cos(s+1)\pi\eta$(CASEⅡ, Ⅳ).

2） CASEⅤ の場合

$$h_m=\cos\lambda_m a\xi-\cosh\lambda_m a\xi+\alpha_m(\sin\lambda_m a\xi-\sinh\lambda_m a\xi),$$

$$h_r=\cos\lambda_r a\xi-\cosh\lambda_r a\xi+\alpha_r(\sin\lambda_r a\xi-\sinh\lambda_r a\xi),$$

$$\bar{h}_1=1,\ \bar{h}_2=\sqrt{3}(1-2\eta),$$

$$\bar{h}_n=\cosh\mu_n b\eta-\cos\mu_n b\eta-\beta_n(\sinh\mu_n b\eta+\sin\mu_n b\eta),$$

$$\bar{h}_s=\cosh\mu_s b\eta-\cos\mu_s b\eta-\beta_s(\sinh\mu_s b\eta+\sin\mu_s b\eta),$$

$$(n,s\geqq 3)$$

$$\alpha_m=\frac{\sin\lambda_m a-\sinh\lambda_m a}{\cos\lambda_m a+\cosh\lambda_m a},\ \alpha_r=\frac{\sin\lambda_r a-\sinh\lambda_r a}{\cos\lambda_r a+\cosh\lambda_r a},$$

$$\beta_n=\frac{\cosh\mu_n b-\cos\mu_n b}{\sinh\mu_n b-\sin\mu_n b},\ \beta_s=\frac{\cosh\mu_s b-\cos\mu_s b}{\sinh\mu_s b-\sin\mu_s b}.$$

ここに，$\lambda_m a$, $\lambda_r a$：片持ちばりの振動固有値，$\mu_n b$, $\mu_s b$：両端自由ばりの振動固有値（$m, n, r, s=1, 2, \cdots, N$）

参考文献

1） Takahashi,K. : Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.85, pp.257-262, 1982.

2） Kar, R. C. and Sujata, T. : Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient Resting on a Pasternak Foundation, *Computer & Structures*, Vol.29, No.4, pp.591-599, 1988.

3） 成岡，中村：骨組構造解析法要覧，培風館，p.385，1976.

4） 林：軽構造の理論とその応用（上），日科技連出版社，pp. 448-453，1967.

5） Bolotin, V. V. : The Dynamic Stability of Elastic Systems, *Holden-Day, Inc.*, San Fransisco, 1964.

6） Simons, D. A. and Leissa, A. W. : Vibrations of Rectanguler Cantilever Plates Subjected to In-plane Acceleration Loads, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.17, pp.407-422, 1971.

7） 高橋，其田，夏秋：Pasternak 基礎上の長方形板の動的安定性，構造工学論文集，Vol. 38 A，pp. 55-62，1992.

8） 八巻，永井：周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定，東北大学高速力学研究所報告，第 36 巻，第 351 号，pp. 147-168，1975.

9） Gorman, D. J. : Free Vibration Analysis of Cantilever Plate by the Method of Superposition, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.49, pp.453-467, 1976.

10） 夏秋，高橋，小西：構造物の動的安定性―そのアプローチと橋梁構造への応用―, 片山技報, Vol.8, pp.1-9, 1988.

（1994. 9. 26 受付）

VIBRATION, BUCKLING AND DYNAMIC STABILITY OF A NON-UNIFORM RECTANGULAR CANTILEVER PLATE WITH THERMAL GRADIENT RESTING ON A PASTERNAK FOUNDATION

Kazuo TAKAHASHI, Hisaaki FURUTANI, Tomohiro SONODA and Yoshihiro NATSUAKI

The vibration, buckling and dynamic stability of a non-uniform rectangular plate on a Pasternak foundation under the action of a pulsating in-plane load is studied. The small deflection theory of the thin plate is used. This problem is solved by using the Hamilton principle to drive time variables. The dynamic stability is solved by the harmonic balance method.

Natural frequencies and buckling properties are shown at first. Then, regions of instability which contain simple parametric resonances and combination resonances are discussed for various boundary conditions and parameters of Pasternak foundation, non-uniform cross-section and thermal gradient.