

偏平ケーブルの非線形振動に現れるカオスの解析

高橋和雄¹・松野 進²・鎌田智之³・町田健一郎⁴

¹正会員 工博 長崎大学工学部社会開発工学科教授 (〒852 長崎市文教町 1-14)

²正会員 工修 日立造船(株) 技術・開発本部 技術研究所 材料・強度研究室

³正会員 工修 前田建設工業(株)

⁴正会員 工修 三菱重工業(株) 長崎造船所 造船設計部

本研究では偏平ケーブルの 1/2 分数調波共振近傍および超分数調波共振近傍で発生するカオスの特性を時系列応答波形, Poincaré 写像, Lyapunov 指数, パワースペクトルおよび分岐図を用いて解析した. さらに, 1/2 分数調波共振近傍および超分数調波共振近傍で発生するカオスの発生領域をケーブル形状(サグ比), 材料(縦波・横波伝播速度比)および荷重強度のパラメーターのもとに明らかにした.

Key Words : nonlinear vibration, chaos, cable, 1/2 subharmonic response

1. まえがき

カオス研究の歴史は, 100 年ぐらいあり, 近年になって急速に研究が行われるようになってきた. その理由として以前は, カオスという概念がなかったために多くの研究者には, ノイズ(雑音)等としてとらえられ認識できなかったが, カオスの概念が確立したことが挙げられる. 次に, コンピュータの発達により, 数値シミュレーションの精度やデータ処理能力が飛躍的に向上したために, カオスという非周期的な定常振動を扱えるようになったことである. 非線形力学の分野においても, 分岐現象やカオスに関して多くの研究者に注目され, 多くの成果が報告されている. 特に, Duffing 系に対して, カオスを研究したものは, 多く報告されている^{1),2)}. 同じメカニズムをもつ構造物においてもカオスが発生することが考えられる.

ケーブルが面内加振される場合に面外分岐応答が発生したり³⁾, 荷重の分布形状が対称であっても逆対称分岐応答が生ずる⁴⁾ことが知られている. これらはケーブルの幾何学的非線形性に起因して生ずるものであり, 線形理論では, 説明しえない.

したがって, ケーブルについては, 非線形性に基づく諸現象を解明しておくことが必要である. ケーブルのカオスの発生を明らかにしておくことが必要であるが, このような研究は着手した段階にある. ケーブルの運動方程式には, 2 次と 3 次の非線形項が含まれるために分数調波共振においては, 1/3 分数調波共振だけでなく 1/2 分数調波共振も卓越する. また, 高調波共振の n/m ($n > m$) 超分数調波共振も存在する. これらのうち 1/2 分数

調波共振近傍に発生するカオスについては, Rega ら⁵⁾が, 非線形振動の解析的な方法の一つである摂動法を用いて解析している. それをもとに数値シミュレーションを行い, カオスの発生について検討している. しかし, 摂動法は, 非線形性が小さい場合に有効な解法である. 構造物の中でも非線形性が大きいケーブルの場合, 摂動法では, 応答が追従できない可能性がある. さらに, Rega らの解析モデルは, 特定のサグ比のケーブルを対象としているため, カオスの発生領域に及ぼすケーブルのパラメーターの影響を明らかにしていないのみならず, 超分数調波共振近傍でのカオスが評価されていない. また, カオスの判定法に, パワースペクトル, Lyapunov 指数, Poincaré 写像を用いているが, これらの方法では, 周期解から分岐してカオスの発生に至る道筋が明らかにされない. したがって, 非線形性が強い場合にも有効な調和バランス法を用いて 1/2 分数調波共振および超分数調波共振をケーブルの形状および材料パラメーターのもとに解析する必要がある. さらに, カオスの判定法にカオスの発生に至る道筋を追跡できる分岐図を加え, カオスの発生に至る道筋を明らかにすることが重要であると思われる.

以上のような現状から本研究では, サグ比が 1/8 以下の偏平ケーブルの対称 1 次振動における 1/2 分数調波共振近傍および高調波共振領域の超分数調波共振近傍で発生するカオスをケーブルのパラメーターのもとに解析するとともにカオスに至る道筋を明らかにする.

まず, 面内対称荷重を受ける偏平ケーブルの運動方程式を最低次のモードを基準座標に選んで, 1 自由度振動系モデルで近似し, Galerkin 法を用いて, 常微分方程

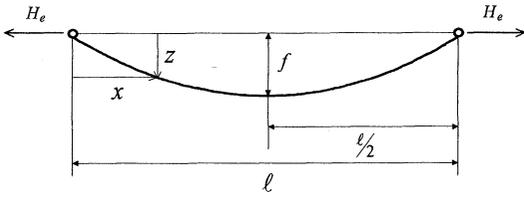


図-1 偏平ケーブルの一般図

式に変換する^{註1)}。次に、常微分方程式の周期解を求めるために調和バランス法を用いて、連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson 法により、1/2 分数調波共振および超分数調波共振を求める。また、周期解および非周期解を求め、カオスの解析を行うために Runge-Kutta-Gill 法を用いて直接数値積分を行う。

カオスの判定法として、時系列応答波形、Poincaré 写像、Lyapunov 指数、パワースペクトルおよび分岐図による応答波形解析法を利用し、偏平ケーブルに現われるカオスを検討する。数値解析において、サグ比、縦波・横波伝播速度比、荷重強度をパラメーターに解析解との比較とカオスの発生領域について検討する。

2. 面内荷重を受ける偏平ケーブルの運動方程式

図-1 に示すような偏平ケーブル（初期形状が放物線）が面内荷重 $p_0 \cos \Omega t$ を受ける場合の運動方程式は次式になる⁶⁾。

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} H_e - (H_e + H_e) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p_0 \cos \Omega t \quad (1)$$

ここに、

$$H_e = \frac{EA}{L_e} \left\{ \frac{8f^2}{l^2} \int_0^l w dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$$

：たわみによる変動軸力， w ：面内鉛直たわみ， t ：時間， m ：ケーブルの単位長さあたりの質量， f ：ケーブルサグ， l ：ケーブルスパン長， x ：支点からの水平距離， E ：ヤング率， A ：断面積， $L_e = l(1 + 8f^2/l^2)$ ：放物線ケーブルのケーブル長， H_e ：初期水平張力， p_0 ：荷重強度， Ω ：外力の円振動数

3. 偏平ケーブルの運動方程式の解法⁷⁾

(1) 常微分方程式への変換

式 (1) の解を 1 自由度系モデルで次の変数分離形に

仮定する。

$$w = lT(t)W(x) \quad (2)$$

ここに、 $T(t)$ ：未知の時間関数， $W(x)$ ：境界条件を満足する座標関数で対称 1 次振動の固有振動形^{註2)}を用いる⁶⁾。この固有振動形は初期水平張力のみを受ける偏平ケーブルの線形微分方程式を解いて得られる。

式 (2) は、式 (1) の厳密解ではない。そこで、Galerkin 法を適用し、さらに粘性減衰力を考慮すると、次式が得られる。

$$\ddot{T} + 2h\omega_1 \dot{T} + \omega_1^2 T + C_2 T^2 + C_3 T^3 = \bar{p}_0 \cos \bar{\omega} \tau \quad (3)$$

ここに、 $C_2 = 12\gamma I_b I_c I_d$ ， $C_3 = I_d^2 I_a / 2$ ，

$$\bar{p}_0 = p_0 l I_c / H_e I_a \pi^2$$
， $I_d = k^2 / (1 + 8\gamma^2) I_a \pi^2$ ，

$$I_a = \int_0^1 W^2 d\xi$$
， $I_b = \int_0^1 W'^2 d\xi$ ， $I_c = \int_0^1 W d\xi$ ，

$$W' = dW/d\xi$$

h ：減衰定数， $\xi = x/l$ ， $\tau = n_0 t$ ， $\bar{\omega} = \Omega / n_0$ ：無次元加振円振動数， $\gamma = f/l$ ：サグ比， $k = \sqrt{EA/H_e}$ ：縦波・横波伝播速度比， n_0 ：サグのないケーブルの 1 次の固有円振動数。

(2) 調和バランス法による各種分数調波共振理論の解析

周期的な分岐解とカオスの発生との関係を知るために、周期的な分岐解の発生領域を明らかにする必要がある。分岐点近傍の分数調波共振を解析する。

a) 1/2 分数調波共振

1/2 分数調波共振を求めるために、式 (3) の解を次式のように仮定する。

$$T = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega}\tau}{2} + c_1 \cos \bar{\omega}\tau + s_1 \sin \bar{\omega}\tau \\ = \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos \left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \phi_{1/2} \right) + A_1 \cos (\bar{\omega}\tau - \phi_1) \quad (4)$$

b) 高調波共振領域における各種 n/m ($n > m$) 超分数調波共振

高調波共振領域における各種 n/m ($n > m$)：ここで n ， m は正の整数) 超分数調波共振を求めるために、式 (3) の解を次式のように仮定する。

$$T = \frac{c_0}{2} + c_{n/m} \cos \frac{n\bar{\omega}\tau}{m} + s_{n/m} \sin \frac{n\bar{\omega}\tau}{m} + c_1 \cos \bar{\omega}\tau + s_1 \sin \bar{\omega}\tau \\ = \frac{c_0}{2} + A_{n/m} \cos \left(\frac{n\bar{\omega}\tau}{m} - \phi_{n/m} \right) + A_1 \cos (\bar{\omega}\tau - \phi_1) \quad (5)$$

ここに、 $A_{n/m} = \sqrt{c_{n/m}^2 + s_{n/m}^2}$ ：分岐応答成分， $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$ ：付随応答成分， $\phi_{n/m} = \tan^{-1}(s_{n/m}/c_{n/m})$ ， $\phi_1 =$

注1) ケーブルは連続体であるため、多自由度系としてのモデル化がより厳密であるが、注目している 1 次固有振動の近傍において、高次モードの非線形項が卓越するように加振される可能性は小さいために、本研究では 1 自由度系に近似した。これによって、本研究の目的であるカオスの発生条件をはっきりさせることが可能である。

注2) 本研究ではケーブルを 1 自由度系で近似し、ケーブルのモードは振幅に無関係に線形モードを用いる。非線形振動時のモードは振幅によって変化するが、著者のこれまでの計算⁸⁾によれば、振動数に及ぼす振動モードの変化の影響は小さいので、複雑な波形処理を行う本論のカオスの解析には、1 自由度近似による解析を行う。

$\tan^{-1}(s_1/c_1)$:位相差, c_0, c_1, s_1 :付随調波成分, $c_{n/m}, s_{n/m}$: n/m 分数調波成分(ここで $n=1, m=2$ のとき, $1/2$ 分数調波共振を指す).

式(4)および式(5)を式(3)に代入して, 調和バランス法を適用すれば, 未定数を求める連立非線形代数方程式を得る. これに, Newton-Raphson法を用い, 適当な初期値のもとに解けば, 必要な解が得られる.

調和バランス法は, 周期振動を仮定しているため, カオスの解析には対応できない. そこで, 式(3)を2元連立の1階常微分方程式に変換し, Runge-Kutta-Gill法を適用して直接数値積分すれば, 時間応答が求められる.

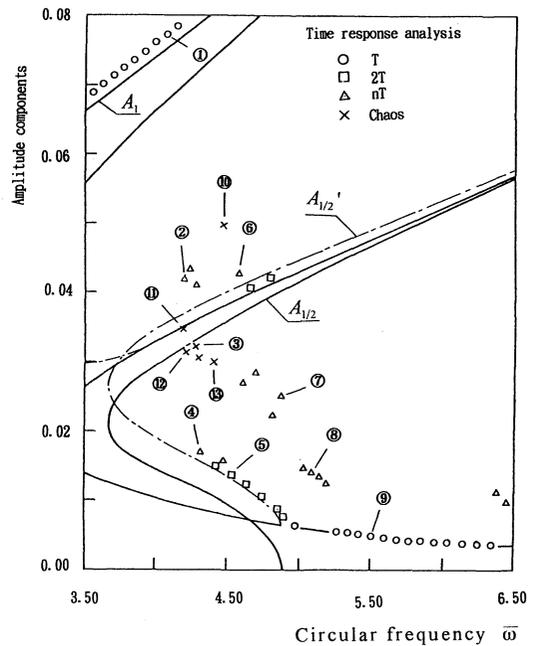
また, 振動の周期の特定や, カオスの特定を行う判定法には, 位相図, Poincaré写像⁹⁾, Lyapunov指数¹⁰⁾, パワースペクトル¹¹⁾, 分岐図¹²⁾, 自己相関関数¹²⁾等の有力な方法があり, これらによって解析する.

4. 1/2分数調波共振近傍で発生するカオス

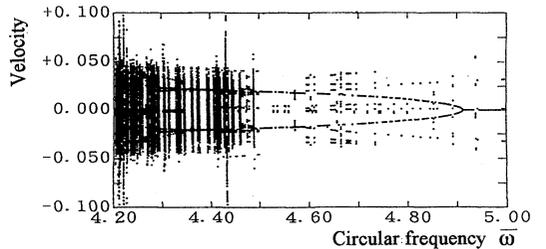
図-2(a)は, 縦波・横波伝播速度比 $k=30$, サグ比 $\gamma=0.03$, 減衰定数 $h=0.005$, 荷重強度 $\bar{p}_0=0.1232$ の偏平ケーブルの $1/2$ 分数調波共振近傍の主調波応答と $1/2$ 分数調波応答である. 図-2(a)の縦軸は式(4)で得られた応答の振幅成分 $A_1, A_{1/2}$ を示し, 横軸は無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ である. $A_{1/2}$ が現れている $1/2$ 分数調波共振近傍に注目すると, 数値シミュレーションの応答振幅(○印)は, 解析解の応答振幅 $A_{1/2}$ と一致していない. これは, 解析解の $1/2$ 分数調波応答に主調波成分 A_1 が含まれていないためである. 主調波成分 A_1 を考慮し補正した $1/2$ 分数調波応答 $A_{1/2}'$ では, 主調波応答 A_1 から $1/2$ 分数調波応答 $A_{1/2}$ への初期遷移領域で数値シミュレーションの応答振幅と解析解の応答振幅 $A_{1/2}'$ が一致している. しかし, $\bar{\omega}=4.88\sim 4.16$ の領域では, 周期 T および周期 $2T$ の解析解と一致しない応答が生じている. そこで, これらの解について時間応答解析を行い, 詳しく検討する.

図中の○印内の数字は引用のためにつけた番号である. ポイント①, ⑨は周期 T の主調波応答で, ポイント⑤は周期 $2T$ の $1/2$ 分数調波応答である. この2種類の定常応答は解析解と一致している. ポイント③では, カオスを示し, このカオスの近傍にはポイント②, ⑦の周期 $8T$ の応答, ポイント⑥の周期 $6T$, ポイント④の周期 $4T$ およびポイント⑧の周期 $5T$ の応答が現われている.

また, 図-2(b)には, $1/2$ 分数調波共振近傍の分岐を調べるために分岐図を示す. 図-2(b)の縦軸はシミュレーションによって得られた速度である. 分岐図よりカオスに至る様子を調べると, 無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を5.1より減少させると $\bar{\omega}=4.920$ で周期 T の振動



(a) $1/2$ 分数調波共振近傍における応答 ($k=30, \gamma=0.03, \bar{p}_0=0.1232$)



(b) 分岐図 ($k=30, \gamma=0.03, \bar{p}_0=0.1232$)

図-2 $1/2$ 分数調波共振近傍におけるカオス

が, 周期 $2T$ の振動に移る. さらに, 無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を減少させると, 周期 $iT(i \geq 3)$ の振動を間欠的に繰り返す. $\bar{\omega}=4.5$ 近傍では, カオスが発生し始め, $\bar{\omega}=4.3$ 近傍よりカオスが頻繁に現われる.

$1/2$ 分数調波共振近傍で, カオスに至る道筋は, 周期的な振動が周期倍加分岐を繰返し, カオスに至るとはいえないが, 無次元加振円振動数が減少するにつれて, 周期 $2T$ の振動が周期 $iT(i \geq 2)$ の振動を間欠的に繰り返しながらカオスに至る.

図-3(a), (b), (c)および(d)には, カオスが生じているポイント⑬の応答波形, Lyapunov指数, Poincaré写像およびパワースペクトルを示す.

これらの波形の解析より, ポイント③および⑩~⑬では, カオスが生じている. 応答振幅とカオスの特性について検討すると, 応答振幅によってカオスの特性は, ほとんど変化しない. また, ポイント⑫, ⑬および③のよ

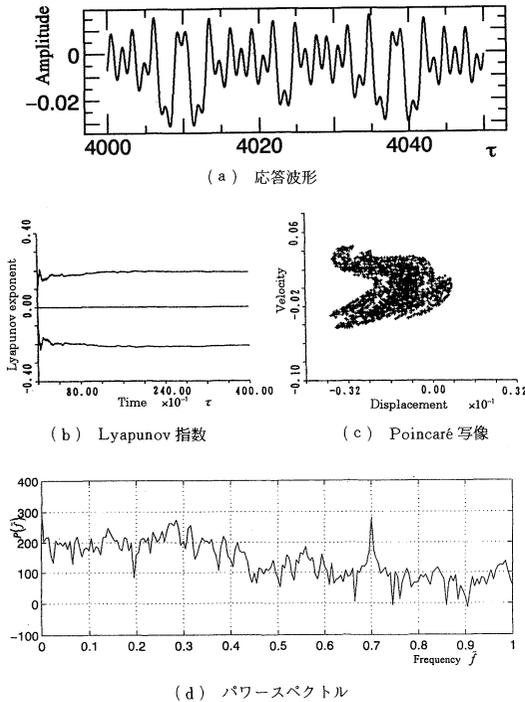


図-3 カオス (ポイント⑬, $\bar{\omega}=4.400$)

うに発生振動数が接近している場合、ストレンジアトラクターが似ている傾向がある。

5. 1/2 分数調波近傍で発生するカオスに及ぼす形状、材料および荷重パラメータの影響

(1) サグ比の影響

図-4 (a), (b) は、縦波・横波伝播速度比 $k=20, 30, 40, 45$ および 60 の 5 種類に変化させた偏平ケーブルの 2 次の非線形項の係数 (C_2) および 3 次の非線形項の係数 (C_3) とサグ比 γ の関係を示す。各ケーブルについて 1/2 分数調波共振近傍における応答解析を行ってカオスの発生の有無を確かめた。得られた結果を図-4 に併記している。●印は、1/2 分数調波共振近傍でカオスが発生する場合で、○印は、カオスが発生しない場合である。ここでは、1/2 分数調波共振近傍でカオスが発生しやすい縦波・横波伝播速度比 $k=30$ でのサグ比の影響を検討する。この図では、サグ比 $\gamma=0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ および 0.05 の 5 種類の偏平ケーブル ($k=30$) のうち、サグ比 $\gamma=0.02, 0.03$ の 2 種類でカオスが発生している。また、縦波・横波伝播速度比 k を変化させた場合についても、カオスは、サグ比 $\gamma=0.015 \sim 0.04$ 領域で発生している。図-5 は、サグ比 $\gamma=0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04$ および 0.05 の 6 種類の偏平ケーブル

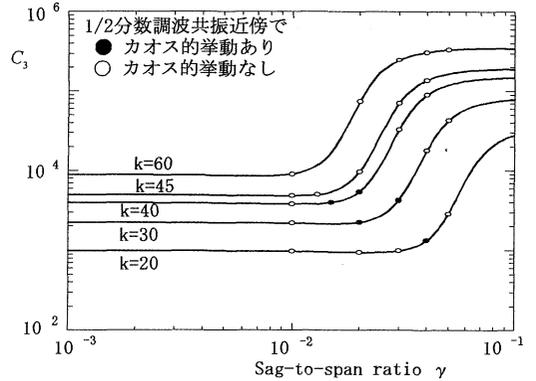
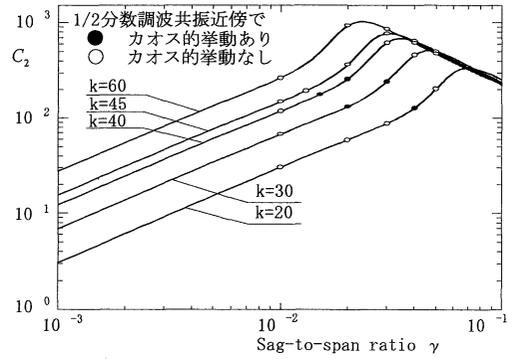


図-4 カオスの発生領域

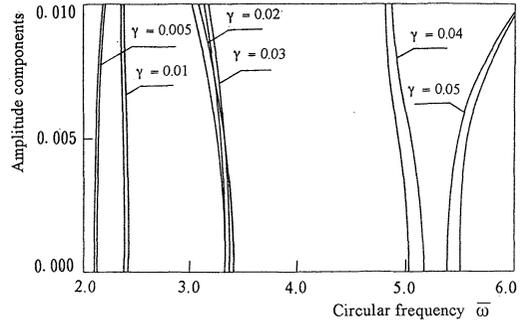
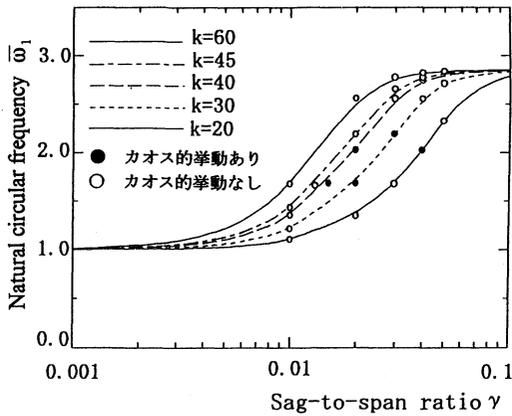
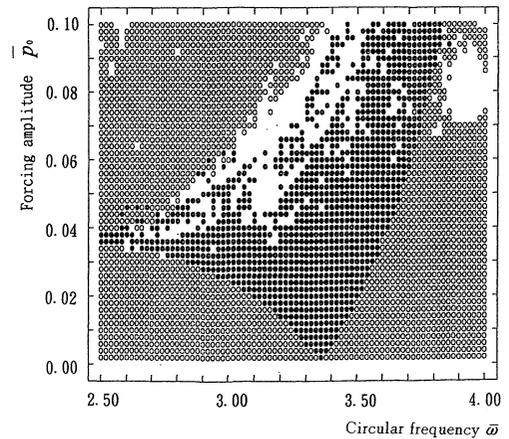


図-5 1/2 分数調波共振の背骨曲線 ($k=30$)

($k=30$) についての調和バランス法による 1/2 分数調波共振の背骨曲線 ($\bar{p}_0=0.0$) を示す。サグ比 $\gamma=0.005$ と 0.05 の場合は、3 次の非線形項が支配的な硬化バネ特性をもつ偏平ケーブルであり、サグ比 $\gamma=0.01 \sim 0.04$ の場合は、2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性をもつ偏平ケーブルである。図-4 (a), (b) および図-5 より、1/2 分数調波共振近傍のカオスは、サグ比 $\gamma=0.015 \sim 0.04$ の領域で発生しており、図-5 より 2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性をもつ偏平ケーブルの



図—6 無次元固有円振動数とサグ比の関係



図—7 応答の分類図 ($k=30, \gamma=0.02$)

場合にカオスが発生しやすいことが確認できた。

(2) 縦波・横波伝播速度比の影響

図—4 (a), (b) および図—6 より, 1/2 分数調波共振近傍のカオスの発生に及ぼす縦波・横波伝播速度比 k の影響を評価する。 $k=20, 30, 40, 45$ および 60 の 5 種類の偏平ケーブル ($\gamma=0.02$) について, $k=30$ および 40 の 2 種類の偏平ケーブルでは, カオスが生じている。また, サグ比 γ を変化させた場合は, $k=20\sim 40$ ($\gamma=0.015\sim 0.04$) の領域の偏平ケーブルで, カオスが生じている。このことより, カオスにおける縦波・横波伝播速度比 k の影響は, 2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性をもつ偏平ケーブルの場合に, カオスが発生しやすい。図—6 の無次元固有円振動数 ω とサグ比 γ との関係では, 縦波・横波伝播速度比 k が大きいほど, 小さいサグ比 γ の領域で振動モードが遷移しており, 縦波・横波伝播速度比 k が大きいほど, 小さいサグ比 γ の領域でカオスが発生している。

(3) 荷重強度の影響

図—7 は, 1/2 分数調波共振近傍における, サグ比 $\gamma=0.02$, 縦波・横波伝播速度比 $k=30$ の偏平ケーブルの数値シミュレーションによる応答の分類を示す。ここで, 縦軸は荷重強度 \bar{p}_0 , 横軸は無次元加振円振動数 ω である。図中の○印は周期 T , ●印は周期 $2T$ であり, 空欄は周期 $iT (i \geq 3)$ およびカオスを意味する。周期 $2T$ の発生領域は, 荷重強度 $\bar{p}_0=0.038$ 付近で最も広い。また, 荷重強度 $\bar{p}_0=0.03$ 付近までは, 周期 T および周期 $2T$ の応答のみ存在するが, さらに, 荷重強度を増大させると, 周期 $iT (i \geq 3)$ およびカオスが発生する。この分岐領域は, 周期 T から周期 $2T$ への遷移領域内に存在する。1/2 分数調波共振近傍でのカオスの発生に及ぼす荷重強度の影響を見ると, 荷重強度を増大させるとカオ

スが周期 T から周期 $2T$ への遷移領域内に発生し, はっきりとした境界を持たない不完全な領域を形成する。また, カオスの発生に及ぼす荷重強度の影響は, あまり敏感ではない。

(4) カオスの発生領域と固有振動数との関係

図—6 は, 縦波・横波伝播速度比 $k=20, 30, 40, 45$ および 60 の 5 種類の偏平ケーブルの無次元固有円振動数 ω_1 とサグ比 γ の関係を求めたものである⁶⁾。●印は 1/2 分数調波共振近傍でカオスが発生する場合で, ○印はカオスが発生しない場合である。偏平ケーブルの対称振動数は, 特定のサグ比 γ で増大し, これにともなって振動モードが一段高次の振動モードに遷移する。また, 振動モードの遷移領域は, 縦波・横波伝播速度比 k によって異なる¹³⁾。この図では, 縦波・横波伝播速度比が大きいほど, 小さいサグ比 γ の領域で振動モードが遷移し, 振動モードの遷移領域でカオスが発生している。

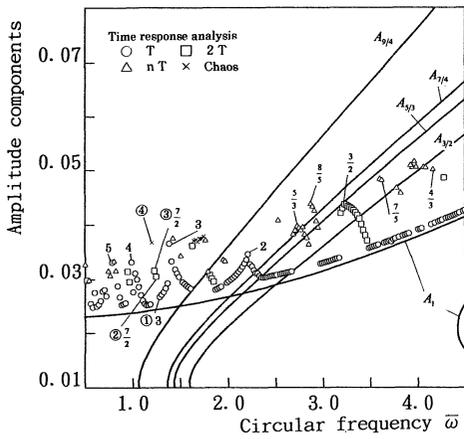
6. カオスに至る道筋⁹⁾

周期解から分岐を重ねてカオスへの移り方を偏平ケーブルに現れるカオスについて検討する。

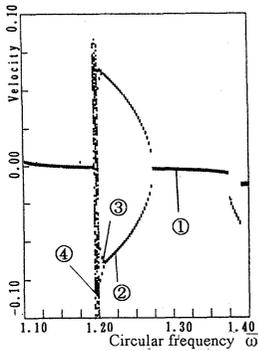
(1) 周期倍加分岐からカオスへ

図—8 (a), (b) および (c) には, 縦波・横波伝播速度比 $k=30$, サグ比 $\gamma=0.04$ の偏平ケーブルの高調波共振領域における応答と分岐図を示す。図—8 (a) の高調波共振領域における応答は, 解析解として $9/4, 7/4, 5/3$ および $3/2$ 超分数調波共振 ($\bar{p}_0=0.0$) および主調波応答 ($\bar{p}_0=0.2246$) ならびに数値シミュレーション結果を示してある。

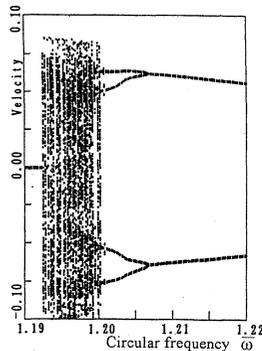
図中の記号 $n/m (n > m)$ は数値シミュレーションに



(a) 高調波共振領域における応答 ($k=30, \gamma=0.04, \bar{p}_0=0.2246$)



(b) 分岐図 ($k=30, \gamma=0.04, \bar{p}_0=0.2246$)

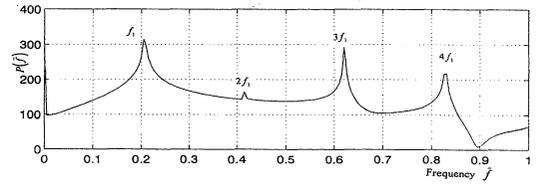


(c) 分岐図 (カオス応答の発生する振動数領域を拡大)

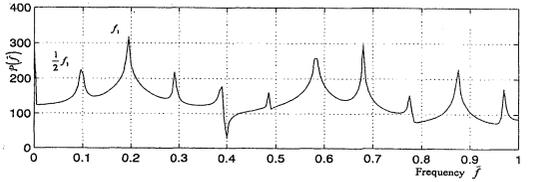
図—8 周期倍加分岐からカオスへ

よって得られた超分数調波共振を示す。また、整数 $n(=2, 3, 4, 5)$ は高調波共振を示す。高調波共振領域で発生するカオスの場合は、 n/m 超分数調波共振からジャンプする過程で発生しており、ジャンプする振幅が非常に小さい。解析解で超分数調波共振が生じている領域において、数値シミュレーション結果で超分数調波共振が現れている。

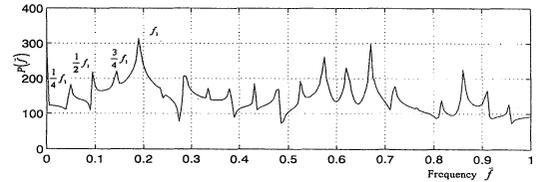
図—8 (b), (c) の分岐図について検討する。高調波共振領域では、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.2$ 付近でカオスが発生している。そのカオスに至る道筋を調べるために、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.1 \sim 1.4$ の範囲で分岐を調べたものである。この分岐図では、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を小さくするにつれて周期 T の振動が周期 $2T$ の振動になり、さらに無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を小さくすると周期 $4T$ の振動になり、さらに周期倍分岐を繰り返して、ついにはカオスに至る。また、周期倍加分岐する場合は、分岐を繰り返すにつれて分岐間の無次元加振



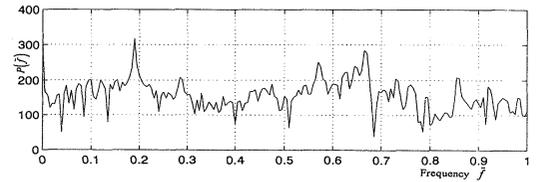
(d) パワースペクトル (ポイント①, $\bar{\omega}=1.300 (f=0.207)$)



(e) パワースペクトル (ポイント②, $\bar{\omega}=1.220 (f=0.194)$)



(f) パワースペクトル (ポイント③, $\bar{\omega}=1.202 (f=0.191)$)



(g) パワースペクトル (ポイント④, $\bar{\omega}=1.198 (f=0.190)$)

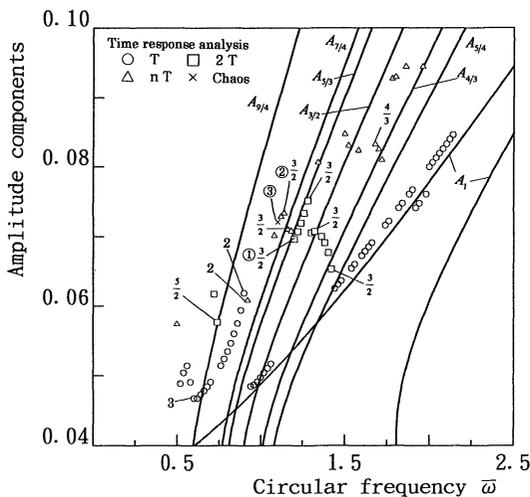
円振動数 $\bar{\omega}$ の幅が小さくなっていることが確認できる。さらに、図—8 (d), (e), (f) および (g) には、周期倍加分岐の様子を詳しく調べるために図—8 (a) の①, ②, ③および④点に相当するパワースペクトルを示す。

①点では、単一周波数の f_1 とその高調波のピークが現われ、②のように周期 $2T$ に分岐すると f_1 の他に、 $f_1/2$ とその高調波のピークが発生し、③点のように周期 $4T$ に分岐すると $f_1, f_1/2$ および $f_1/4$ とそれらの高調波のピークが発生する。これらの過程が引き続き発生し、最終的には、④点のようなカオスに至る。

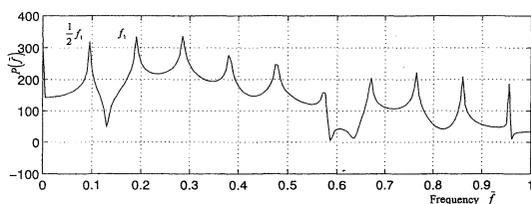
(2) 準周期運動からカオスへ¹⁴⁾

図—9 (a), (b) および (c) には、縦波・横波伝播速度比 $k=20$ 、サグ比 $\gamma=0.03$ の偏平ケーブルの高調波共振領域における応答と分岐図を示す。

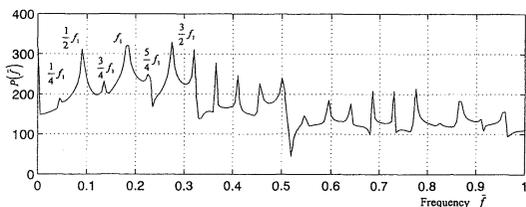
図—9 (a) の高調波共振領域における応答について



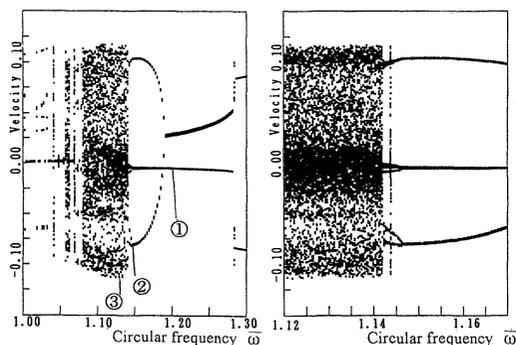
(a) 高調波共振領域における応答 ($k=20, \gamma=0.03, \bar{p}_0=0.0580$)



(d) パワースペクトル (ポイント①, $\bar{\omega}=1.200 (f=0.191)$)

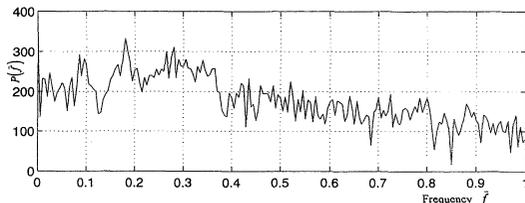


(e) パワースペクトル (ポイント②, $\bar{\omega}=1.147 (f=0.0183)$)



(b) 分岐図 ($k=20, \gamma=0.03, \bar{p}_0=0.0580$)

(c) 分岐図 (拡大図)



(f) パワースペクトル (ポイント③, $\bar{\omega}=1.140 (f=0.181)$)

図—9 準周期運動からカオスへ

考察する。図—9 (a) には、解析解としての荷重強度 $\bar{p}_0=0.0$ 時の $9/4, 7/4, 5/3, 3/2, 4/3$ および $5/4$ 超分数調波共振の背骨曲線および $\bar{p}_0=0.0580$ 時の主調波応答ならびに数値シミュレーションの結果を示している。

図—9 (b), (c) の分岐図に示すように、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.1$ 近傍でカオスが生じている。カオスに至る道筋を調べるために、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.0\sim 1.3$ の範囲で分岐を調べたものである。この分岐図では、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を小さくするにつれて、2つの別の周期的な振動をする系のうち、一方が周期 $2T$ の振動に分岐しており、他方は分岐することなくカオスになっている。また、カオスになる直前では、分岐していることが確認できる。

さらに、図—9 (d), (e) および (f) には、カオスに至る様子を詳しく調べるために図—9 (a) の①, ②, ③点に相当するパワースペクトルを示す。

図—9の①点では、パワースペクトルより、単一周波

数 f_1 の他に $f_1/2$ とその高調波のピークが発生している。また、図—9 (a) の②点では、別な周期 $3/2 f_1$ にピークが現れている。さらに、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を小さくすると図—9 (a) の③点でカオスが発生している。このような分岐によって起こるカオスを準周期的な振動からカオスに至ると呼ぶ。(参考文献 14 の pp. 128~130 参照)。

また、図—10 (a), (b) には、縦波・横波伝播速度比 $k=20$, サグ比 $\gamma=0.04$ の偏平ケーブルの分岐図を示す。図—10 (c) には、図—10 (a) の①点に相当するパワースペクトルを示す。この場合のカオスに至る道筋もパワースペクトルに別な周波数が現れた後にカオスになっているが、前に示した図—9 (b) と比べると、カオスになる直前では、 $i(i \geq 3)$ 倍分岐の振動をすることなく直接カオスになっている。

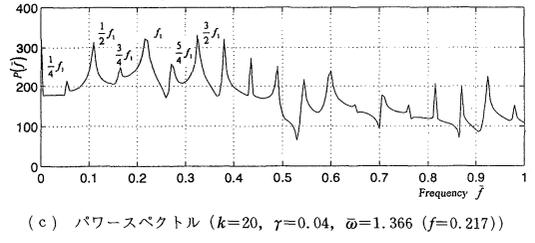
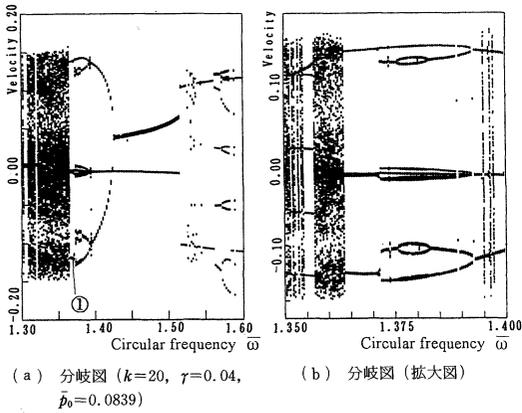
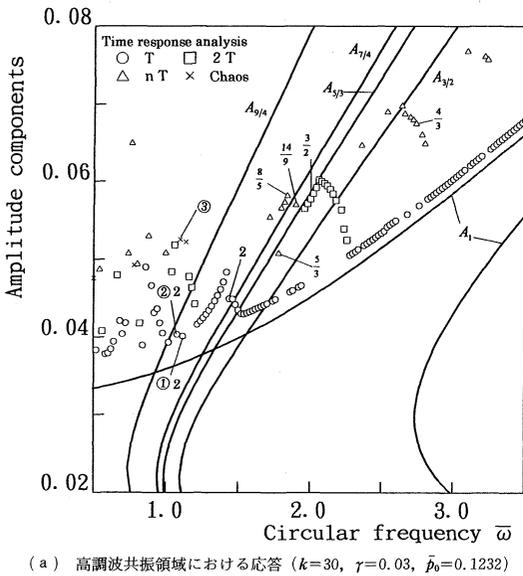
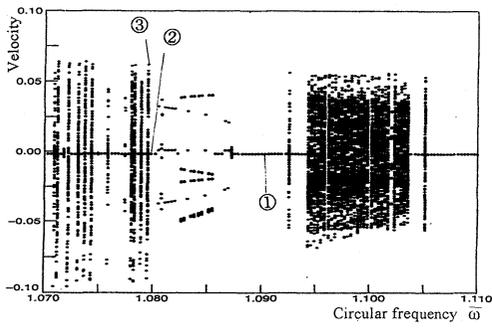


図-10 準周期運動からカオスへ



30, サグ比 $\gamma=0.03$ の偏平ケーブルの高調波共振領域における応答と分岐図を示す。

図-11 (a) の高調波共振領域における応答については、解析解としての荷重強度 $\bar{p}_0=0.0$ の時の $9/4, 7/4, 5/3, 3/2$ 超分数調波共振および $\bar{p}_0=0.1232$ 時の主調波応答ならびに数値シミュレーション結果を示してある。図-11 (b) の分岐図は、カオスに至る道筋を調べるために、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.07\sim 1.11$ の範囲で分岐を調べたものである。無次元加振円振動数 $\bar{\omega}=1.08$ 近傍でカオスが生じている。この分岐図では、無次元加振円振動数 $\bar{\omega}$ を小さくするにつれて、周期 T の振動が分岐を繰り返すことなく、直接カオスになっている。さらに、図-12 (a), (b), (c), (d), (e) および (f) には、間欠的なカオスの様子を詳しく調べるために、図-11 (a) の①, ②および③点に相当する応答波形とパワースペクトルを示す。図-12 (e) の応答波形に示すように、規則的な振動が不規則な振動に置き換わり、カオスに至ることが分かる。このような過程を経て生ずるカオスを間欠的なカオスと呼ぶ。



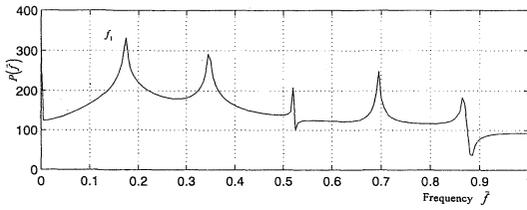
高調波共振領域で発生しているカオスに至る道筋は、周期倍加分岐からカオス、準周期からカオスおよび間欠的なカオスの3種類のカオスに至る道筋がある。

7. 高調波共振領域の $n/m (n > m)$ 超分数調波共振付近で発生するカオス

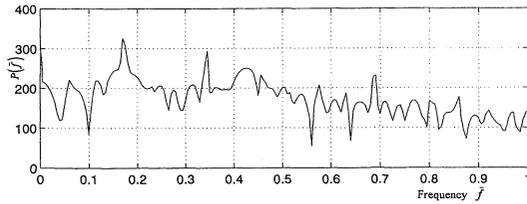
サグ比 $\gamma=0.03$ の偏平ケーブル ($k=20$) の応答は、図-9 (a) で示してある。サグ比 $\gamma=0.03$ および 0.04 の偏平ケーブル ($k=30$) の応答は、図-11 (a) および図-8 (a) で示してある。なお、これらの応答を求めるにあたって、主調波応答の場合、 $\bar{\omega}=0.0$ に相当する静的応答 A_1 が 0.0138 になるように設定している。減衰定数は $h=0.005$ である。また、高調波共振領域の超

(3) 間欠的なカオス

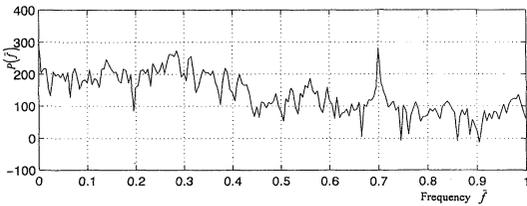
図-11 (a), (b) には、縦波・横波伝播速度比 $k=$



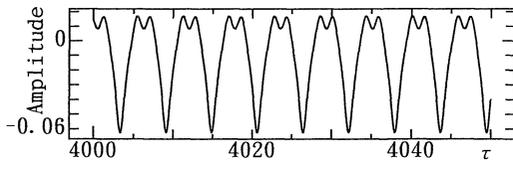
(a) パワースペクトル (ポイント①, $\bar{\omega}=1.090$ ($\bar{f}=0.174$))



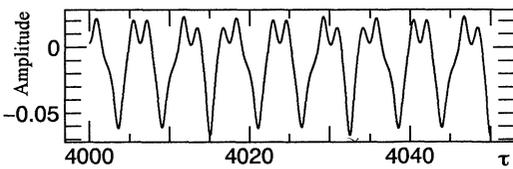
(b) パワースペクトル (ポイント②, $\bar{\omega}=1.080$ ($\bar{f}=0.172$))



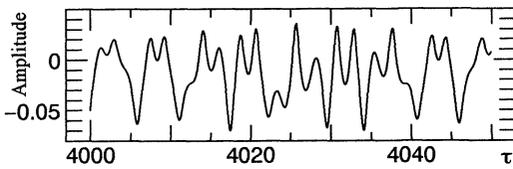
(c) パワースペクトル (ポイント③, $\bar{\omega}=1.07895$ ($\bar{f}=0.17172$))



(d) 応答波形 (ポイント①, $\bar{\omega}=1.090$ ($\bar{f}=0.174$))



(e) 応答波形 (ポイント②, $\bar{\omega}=1.080$ ($\bar{f}=0.172$))



(f) 応答波形 (ポイント③, $\bar{\omega}=1.07895$ ($\bar{f}=0.17172$))

図—12 間欠的なカオス ($k=30$, $\gamma=0.03$, $\bar{p}_0=0.1232$)

分数調波応答の場合は背骨曲線に相当し、荷重強度 $\bar{p}_0 = 0.0$ 、減衰定数 $h=0.0$ である。

高調波共振領域に発生するカオスに着目すると、縦波・横波伝播速度比 $k=30$ 、サグ比 $\gamma=0.04$ (図—8 (a)), $k=20$, $\gamma=0.03$ (図—9 (a)) および $k=30$, $\gamma=0.03$ (図—11 (a)) の他に、 $k=20$, $\gamma=0.04$ の偏平ケーブルに発生している。つまり、高調波共振領域で発生しているカオスは、1/2 分数調波共振近傍で発生するカオスと同様に、2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性を持つ偏平ケーブルの場合にカオスが発生しやすい。

8. まとめ

本研究では、偏平ケーブルの 1/2 分数調波共振近傍および超分数調波共振近傍で発生するカオスの特性を時系列応答波形、Poincaré 写像、Lyapunov 指数、パワースペクトルおよび分岐図の判定法を用いて解析した。さらに、1/2 分数調波共振近傍および超分数調波共振近傍で発生するカオスの発生領域をケーブル形状 (サグ比)、材料 (縦波・横波伝播速度比) および荷重強度のパラメータのもとに明らかにしたものである。得られた結果をまとめると次のとおりである。

(1) カオスは、2 次の非線形項が支配的な軟化バネ特性を示すサグ比をもつ偏平ケーブルに発生しやすい。このときの振動モードは、一段高次の振動モードに遷移しているサグ比に相当する。

(2) 縦波・横波伝播速度比はカオスが発生するサグ比の領域を変化させる効果をもつ。縦波・横波伝播速度比が大きいほど、サグ比の小さい領域で、カオスが生じる。

(3) 1/2 分数調波共振近傍で、カオスに至る道筋は、周期的振動が周期倍加分岐を繰返しカオスに至るとはいえない。周期的振動がカオスもしくはカオスに近い周期 iT ($i \geq 2$) の振動に至る。

(4) 1/2 分数調波共振近傍で荷重強度を増大させると、ジャンプ現象の近辺に周期 iT ($i > 2$) およびカオスが発生する。しかし分岐に規則性はなく、また、はっきりとした境界を持たない不完全な領域を形成する。

(5) 高調波共振領域で生ずる超分数調波共振においては、カオスに至る道筋は、周期倍加分岐からカオス、間欠的なカオス、準周期からカオスに至る道筋の 3 種類が存在する。

(6) 超分数調波共振近傍で生ずるカオスは、1/2 分数調波共振で生ずるカオスよりも発生しやすい。

まえがきの注 2) でも述べたように、本研究では偏平ケーブルを 1 自由度系モデルで近似し、ケーブルに現れるカオスを解析できた。しかし、広い振動数領域におけ

るカオスの解析や高次モードの影響を評価するためには、多自由度系モデルの解析が必要である。また、実験による確認も必要であり、これらについては、引き続いて研究を進める計画である。

なお、数値計算には長崎大学情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。また、本論文を修正するにあたっては、長崎大学大学院生山口健市氏の熱心な協力を得たことを付記する。

参考文献

- 1) Moon, F.C. and Li, G.X. : Criteria for Chaos of a Three-Well Potential Oscillator with Homoclinic and Heteroclinic Orbits, *Journal of Sound and Vibration*, 136(1), pp.17-34, 1990.
- 2) Mahfouz, I.A. and Badrakhn, F.B. : Chaotic Behaviour of Some Piecewise-Linear Systems Part I : Systems with Set-Up Spring or with Unsymmetric Elasticity, *Journal of Sound and Vibration*, 143(2), pp.255-288, 1990.
- 3) 高橋和雄, 田川 賢, 佐藤秀雄 : ケーブルの面外不安定振動, 土木学会論文集, 第 350 号 / I-2, pp. 355-358, 1984.
- 4) 高橋和雄, 白石隆俊 : 水平ケーブルの面内対称加振による逆対称分岐応答, 構造工学論文集, Vol.36 A, pp. 711-718, 1990.
- 5) Rega, G. and Benedettini, F. : *1/2 Subharmonic Resonance*

and Chaotic Motions in a Model of Elastic Cable, Nonlinear Dynamics in Engineering Systems, Springer-Verlag, pp.27-34, 1990.

- 6) Irvine, H.M. : *Dynamics of a Suspended Cable, Cable Structures*, The MIT Press, pp.87-134 1981.
- 7) 高橋和雄, 一ノ瀬寛幸, 町田健一郎, 夏秋義広 : 変動軸力を受けるケーブルの動的安定性, 構造工学論文集, Vol. 37 A, pp. 921-928, 1991.
- 8) 高橋和雄, 河原清勝, 山辺輝久 : はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による解析の収束性および安定性について, 土木学会論文報告集, 第 293 号, pp.9-22, 1980.
- 9) 長島弘幸, 馬場良和 : カオス入門, 培風館, 1992.
- 10) Wolf, A., Swift, B., Swinny, L. and Vastano, A. : Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica 16 D*, pp.285-317, 1985.
- 11) Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., 武者利光監, 橋口住久訳 : 非線形力学とカオス, オーム社, 1988.
- 12) Szemplinska-Stupnika, W. and Niezgodzki, P. : The Approximate Approach to Chaos Phenomena in Oscillators Having Single Equilibrium Position, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.141(2), pp.181-192, 1990.
- 13) 山口宏樹, 伊藤 学 : 単一ケーブルの三次元線形自由振動, 土木学会論文集, 第 286 号, pp.29-36, 1979.
- 14) 下條隆嗣 : カオス力学入門, 近代科学社, 1992.

(1994. 5. 11 受付)

CHAOTIC VIBRATION OF A SMALL SAG CABLE UNDER SINUSOIDALLY TIME-VARYING LOAD

Kazuo TAKAHASHI, Susumu MATSUNO, Tomoyuki KAMATA
and Kenichiro MACHIDA

Chaotic vibration of a small-sag cable under sinusoidally time-varying load near the $1/2$ subharmonic response and the n/m ultra-subharmonic response is discussed. The basic equation is solved by a Galerkin method and the resulting time variable is integrated by the Runge-Kutta-Gill method. Chaotic vibrations are obtained by using Lyapunov exponents, Poincaré map, power spectrum and etc. Chaotic behaviors are shown for various sag-to-span ratios and ratios of wave speeds.