

## 面内変動曲げを受ける薄肉 I 型断面曲がり桁の 扇形腹板の動的安定性

DYNAMIC STABILITY OF THE WEB PLATE OF A VERTICALLY CURVED I-GIRDER  
SUBJECTED TO IN-PLANE DYNAMIC MOMENT

夏秋義広\*・高橋和雄\*\*・手塚仁\*\*\*・小西保則\*\*\*\*

By Yoshihiro NATSUAKI, Kazuo TAKAHASHI, Hitoshi TEZUKA and Yasunori KONISHI

Dynamic stability problem of an annular sector web plate subjected to in-plane dynamic moment at the radial edges is examined. The exact in-plane forces of the web plate considering flange plates are used. The equation of motion based upon the small deflection theory is transformed into an eigenvalue problem by using the Galerkin method and the harmonic balance method. Then, the stability of the system can be directly determined from the sign of the real parts of the eigen-values. Next, the nonlinear response of unstable motion is analyzed by the large deflection theory based upon Berger's approximate equation. As numerical examples, the stress distribution of in-plane forces, buckling and vibration properties, dynamic unstable regions, and amplitudes of unstable motions are obtained under various geometrical parameters.

### 1. まえがき

アーチ橋やラーメン橋脚が交通荷重などによって振動すれば、桁構造の腹板に作用する面内力は周期的に変動する。変動面内力の振動数と腹板の面外振動の固有振動数がパラメトリック共振の条件を満足すれば、腹板は係数励振により振動する可能性がある。この面外振動は疲労や騒音の原因ともなりかねないため、係数励振振動発生の可能性を調査しておくことは工学的に重要な問題であると考えられる。このような観点から、著者らは先に、アーチリブやラーメン構造の円弧隅角部などの扇形腹板に面内変動曲げモーメントが作用する場合の動的安定性を報告し<sup>1)</sup>、面外不安定振動の種類およびその発生領域を各種のパラメーターのもとに明らかにした。解析にあたって、腹板の一部を扇形板にモデル化する際に、フランジの影響を無視していた。曲がり桁の構造では、フランジの存在が、腹板の曲げによる面内力の分布に影響を及ぼす<sup>2), 3)</sup>ため、フランジの影響を考慮した厳密な面内力の分布を用いた取り扱いが必要である。そこで、本研究では、フランジを薄肉円筒シェル、腹板を二次元弾性体(平面問題)として、Chu<sup>2)</sup>によって導かれた厳密な面内力の分布形状を用いて、薄肉 I 型断面曲がり桁の腹板の局部振動の動的安定性を解析するものである。

---

* (株)片山鉄工所	技術開発室	〒572	大阪市大正区南恩加島6-2-21
** 工博 長崎大学助教授	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1の14
*** 長崎大学大学院生	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1の14
**** 工博 長崎大学教授	工学部土木工学科	〒852	長崎市文教町1の14

本研究では、まず微小変形理論に基づいて、振動、座屈および動的安定解析を行う。解析にあたって、面内力を受ける扇形平板の運動方程式をガラーキン法と調和バランス法によって固有値問題に変換する手法<sup>4)</sup>を用いる。ところで、微小変形理論によれば、不安定領域における振動振幅は発散するが、平板の場合、中央面に生ずる引張力によって、振動振幅は有限の大きさとなる。そこで、安定を失ったあとの最大応答を、平板の有限変形に関するBerger<sup>5)</sup>の近似式を用いて、Runge-Kutta-Gill法による数値解法により直接、時間応答解析して求める方法を提案する。

数値解析において、フランジの幅および厚さの無次元パラメーターが応力分布に及ぼす影響を評価し、次いで固有振動特性、座屈特性、面外不安定領域および最大応答に及ぼすフランジの影響を、扇形板の支持条件、内外径比、辺長比およびフランジの幅および厚さのパラメーターのもとに明らかにする。

## 2. 微小変形理論に基づく動的安定解析

図-1に示す1軸対称の薄肉I断面曲がり桁を考える。曲がり桁の直線辺に静的曲げモーメント $M_0$ と変動曲げモーメント $M_1 \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント $M$ が作用する。図のような座標系のもとに扇形板の面内力 $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ は、腹板に対して二次元弾性論とフランジに対して薄肉円筒シェルの理論に基づいて、次のように表わされる<sup>2)</sup>。

$$N_r = \frac{M}{a^2} \frac{1}{G_4} \left\{ -\frac{G_1}{(r/a)^2} + 2G_2 + 2G_3 (1 + 21 \ln \frac{r}{a}) \right\} \quad (1)$$

$$N_\theta = \frac{M}{a^2} \frac{1}{G_4} \left\{ -\frac{G_1}{(r/a)^2} + 2G_2 + 2G_3 (3 + 21 \ln \frac{r}{a}) \right\} \quad (2)$$

$$N_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $G_1, G_2, G_3, G_4$ ：断面の形状およびポアソン比 $\nu$ によって定まる定数 (Appendix A 参照)。

このとき、腹板の分担する曲げモーメント $M_w$ は次のように表わされる<sup>2)</sup>。

$$M_w = \delta M \quad (4)$$

ここに、 $\delta$ ：分担係数 (Appendix B 参照)。

これらの面内力を受ける扇形腹板の安定を失った直後の微小変形の運動方程式は次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $w$ ：板のたわみ、 $D = Ed^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ ：板剛度、 $\rho$ ：板の密度、 $E$ ：ヤング率、 $t$ ：時間。

本研究では、I型断面曲がり桁腹板の局部変形のみを取り扱うので、フランジの弾性変形は考慮しない。すなわち、フランジの水平変位は無視でき、ねじり剛性は零あるいは無限大と仮定する。したがって、扇形腹板の面外変位に対する境界条件は、載荷辺である半径方向補剛材の位置で単純支持とし、円弧辺については単純支持(case I)と固定(case II)の2ケースを考える。

式(5)を解くために、解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} T_{sn} W_{sn} \quad (6)$$

ここに、 $T_{sn}$ ：未知の時間関数、 $W_{sn}$ ：境界条件を満足する座標関数、 $n=1, 2, \dots$ 。

式(5)の座標関数として、面内力が作用しない扇形板の固有振動形を用いるものとすれば、次のように与えられる<sup>6)</sup>。

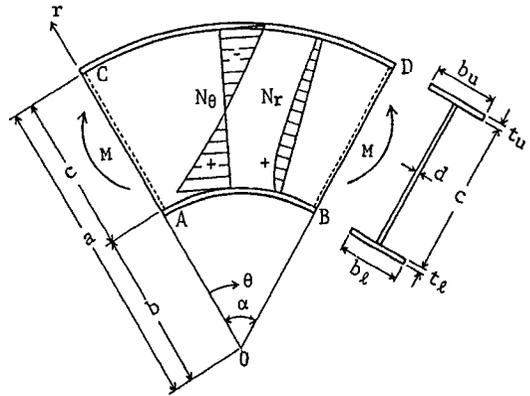


図-1 一般図および座標系

$$W_{sn} = R_{sn}(\xi) \sin \alpha_n \theta \quad (7)$$

ここに、 $R_{sn}(\xi) = A_{sn} J_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + B_{sn} Y_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + C_{sn} I_{\alpha_n}(k_{sn} \xi) + D_{sn} K_{\alpha_n}(k_{sn} \xi)$ 、 $J_{\alpha_n}, Y_{\alpha_n}$ :  $\alpha_n$  次の第1種、第2種 Bessel関数、 $I_{\alpha_n}, K_{\alpha_n}$ : 変形された  $\alpha_n$  次の第1種、第2種 Bessel関数、 $A_{sn}, B_{sn}, C_{sn}, D_{sn}$ : 境界条件より定まる積分定数、 $\alpha_n = n\pi/\alpha$ 、 $n$ :  $\theta$  方向の半波数、 $s$ :  $r$  方向の半波数、 $\xi = r/a$ 。

式(6),(1)および(2)を式(5)に代入して、ガラーキソ法を適用すれば、次のような連立の Mathieu方程式が得られる。

$$[I]\{\dot{T}_n\} + [A]\{T_n\} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau)[B]\{T_n\} = \{0\} \quad (8)$$

ここに、 $[I]$ : 単位行列、 $[A]$ および $[B]$ : 正方行列 (Appendix C 参照)、 $\{T_n\} = \{T_{1n} \ T_{2n} \ \dots \ T_{nn}\}^T$ 。

次の無次元量が上式に導入されている。

$$\bar{M}_0 = \frac{M_0}{M_{cr}}, \quad \bar{M}_t = \frac{M_t}{M_{cr}}, \quad \bar{\omega} = \frac{\Omega}{\Omega_1}, \quad \tau = \Omega_1 t \quad (9)$$

ここに、 $M_{cr} = \lambda_{cr} D$ : 座屈モーメント、 $\lambda_{cr}$ : 座屈固有値<sup>7)</sup>、 $\Omega_1 = k_{11}^2 \sqrt{D/\rho da^4}$ : 1 次の固有円振動数、 $k_{11}$ :  $k_{sn}$ において  $s=1, n=1$  のときの振動の最低次の固有値。

式(8)の一般解を、指数関数とフーリエ級数との積に仮定のうへ、調和バランス法を用いれば、非対称行列の固有値問題に変換され、得られた固有値の実数部の正負により直接、系の安定性が評価できる<sup>4)</sup>。

式(8)において  $\bar{M}_t = 0.0$  とおけば、静的曲げモーメントのみが作用する場合の運動方程式が得られる。さらに、 $\bar{M}_0 = 1.0$  とおいて時間の項を無視すれば、座屈解析の基礎式が得られる。これら振動および座屈の固有値および固有ベクトルは、通常の固有値解析のプログラムを用いて容易に求めることができる。

### 3. 有限変形理論に基づく非線形時間応答解析

平板の面内ひずみの第2不変量を無視し、かつ面内変位による慣性力を無視すれば、面内変動曲げを受ける扇形腹板の安定を失った後の幾何学的非線形を考慮した運動方程式は、Bergerの有限変形の近似基礎式<sup>5)</sup>に慣性力の項を加えることによって、次のように得られる。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - N_f \nabla^2 w = 0 \quad (10)$$

$$\frac{N_r d^2}{12D} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 = \text{一定} \quad (11)$$

ここに、 $u, v$ : 面内変位、 $N_f$ : 定数 ( $r, \theta$  に無関係): ひずみの第一不変量。

面外たわみに関する境界条件は、動的安定解析の場合と同じケースを考える。また、面内方向の変位は全周辺で固定されているものとする。このような場合、式(11)に含まれる面内変位 ( $u, v$ ) は消去でき、 $N_f$  はたわみ  $w$  のみを用いて、次のように表わされる<sup>5)</sup>。

$$N_f = - \frac{12D}{\alpha (a^2 - b^2) d^2} \iint w (\nabla^2 w) r dr d\theta \quad (12)$$

式(10)の解を、動的安定解析の場合と同様、式(6)のように仮定する。式(6)および式(12)を式(10)に代入して、Galerkin法を適用すると、次のような非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_{sn} + \omega_{ns}^2 T_{sn} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \bar{\omega} \tau) \sum_p E_{spn} T_{pn} + \sum_p F_{spn} T_{pn} \sum_{k,l} G_{kln} T_{kn} T_{ln} = 0 \quad (13)$$

ここに、 $\omega_{ns} = \Omega_{ns} / \Omega_1$ : 無次元固有円振動数、 $E_{spn}, F_{spn}, G_{kln}$ : Galerkin法の積分項 (Appendix D 参照)。

式(13)をRunge-Kutta-Gill法を用いて直接、数値積分することによって、時間応答解析を行う。数値解析において、微小振動の初期条件を与えて、安定を失ったあとの面外応答を追跡する。

#### 4. フランジ付き扇形板の無次元パラメーター

フランジ付き扇形板の形状に関するパラメーターとしては、開き角 $\alpha$ と内外径比 $\beta (=b/a)$ のほかに、フランジの断面を上下とも同じ(2軸対称断面)にした場合には、フランジの幅厚比 $e_f (=b_f/t_f)$ 、腹板の幅厚比 $e_w (=c/d)$ およびフランジの無次元板厚 $\bar{t}_f (=t_f/c)$ がある。また、扇形板の形状を対応する長方形板に換算するパラメーターとして、直線辺の長さ $c$ に対する平均円弧長 $\ell [(a+b)\alpha/2]$ の比を扇形板の縦横比 $\mu$ と定義する。すなわち、 $\mu = \ell/c = (1+\beta)\alpha / \{2(1-\beta)\}$ 。

#### 5. 数値結果

##### (1) 面内力の分布

図-2, 3は、フランジ付きの扇形板の面内力の分布をフランジ厚とフランジ幅をパラメーターにして表示したものである。図-2から明らかなように、円周方向の面内力 $N_\theta$ はフランジがない場合に比べて小さくなる。また、半径方向の面内力 $N_r$ は $r=b$ と $a$ の内径と外径の位置で零とならない。フランジ厚が大きくなるにしたがって、円周方向の面内力 $N_\theta$ は減少し、半径方向の面内力 $N_r$ は内・外径側で大きくなって、その分布形状は直線分布に近づく。一方、フランジ幅の変化が応力分布に及ぼす影響は、図-3に示すように、 $e_f$ の小さい範囲でフランジ厚と同様の効果をもつが、 $e_f$ が10を越すとその後の応力分布に大きな変化を与えない。この理由は、フランジ幅の増加に伴って有効幅比が減少するためである。

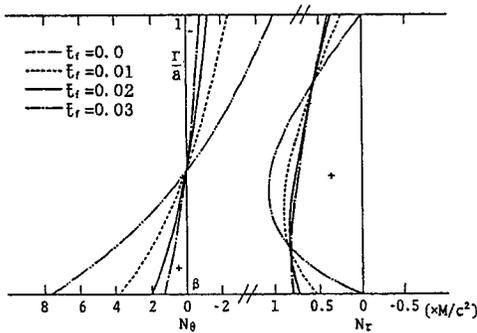


図-2 フランジ厚の変化に伴う面内力の分布の変動  
( $\beta=0.5, e_w=100, b_f/c=0.3$ )

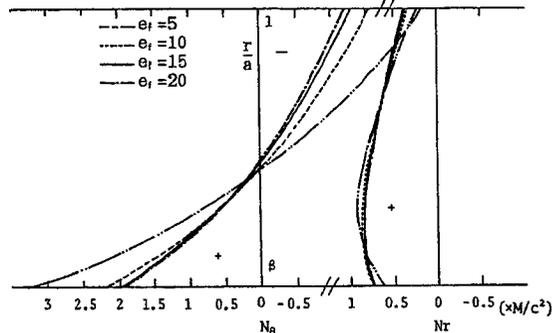


図-3 フランジ幅の変化に伴う面内力の分布の変動  
( $\beta=0.5, e_w=100, \bar{t}_f=0.02$ )

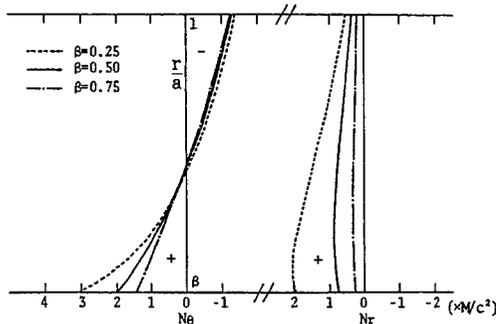


図-4 内外径比の変化に伴う面内力の分布の変動  
( $e_w=100, \bar{t}_f=0.02, e_f=15$ )

表-1 座屈固有値の精度比較

(case I,  $\alpha = \pi/2, \beta = 0.5, e_w = 100, b_f/c = 0.3$ )

$\bar{t}_f$	本法	Ritz法	本法/Ritz法
0.05	-22.092	-22.590	0.978
0.04	-22.134	-22.694	0.975
0.03	-22.286	-22.916	0.973
0.02	-22.674	-23.342	0.971
0.01	-23.865	-24.189	0.987
0	-26.083	-26.170	0.987

図-4は内外径比 $\beta$ の変化に伴う面内力分布の形状の変化を示したものである。内外径比が小さくなるにしたがって、半径方向の面内力 $N_r$ が増大し、円周方向の面内力 $N_\theta$ も内径側での値が大きくなる。以上のような面内力の分布特性は、扇形板の座屈に影響を及ぼす。

(2) 座屈特性

表-1は、本法により得られた座屈固有値 $\lambda_{cr}$ をChu(Ritz法)による値<sup>2)</sup>と比較したものである。表-1より、エネルギー法に基づくRitz法による値が厳密解より必ず大きめの解を与えることを考慮すると、Chuによる値より約3%程度小さい本法の値は、十分な精度を有しているものと思われる。

図-5は、座屈固有値の収束状況を種々の板厚に対して示したものである。横軸 $s$ は座屈関数に用いた基準関数の項数を、縦軸 $\eta$ は $s$ 項解を10項解に対する比で表わしたものである。図より、板厚が増加するにしたがい、収束性がよくなっているのがわかる。つまり、板厚の増加に伴い半径方向面内力の分布が直線分布に近づくため、座屈モードが振動モードに似てくるものと想定される。

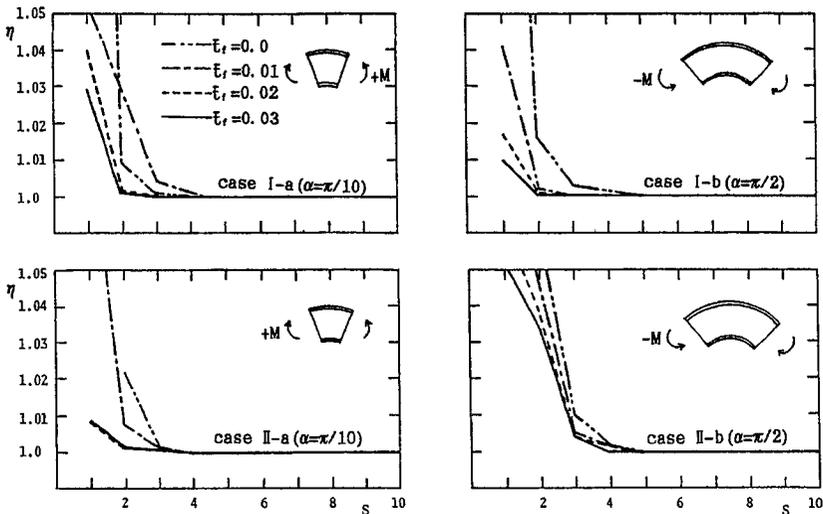


図-5 座屈固有値の収束状況 (case I,  $\beta=0.5, e_w=100, b_r/c=0.3$ )

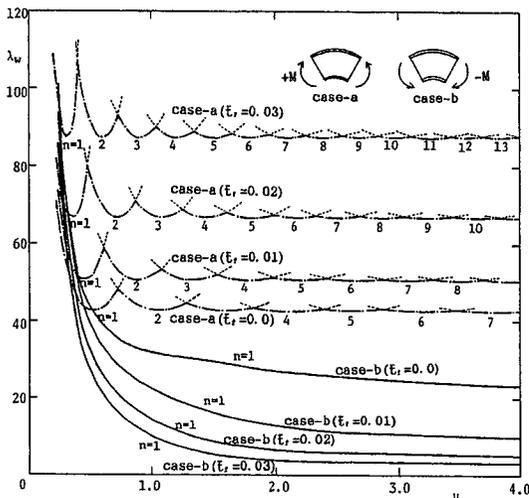


図-6 フランジ厚の変化に伴う座屈曲線の変動 (case I,  $\beta=0.5, e_w=100, b_r/c=0.3$ )

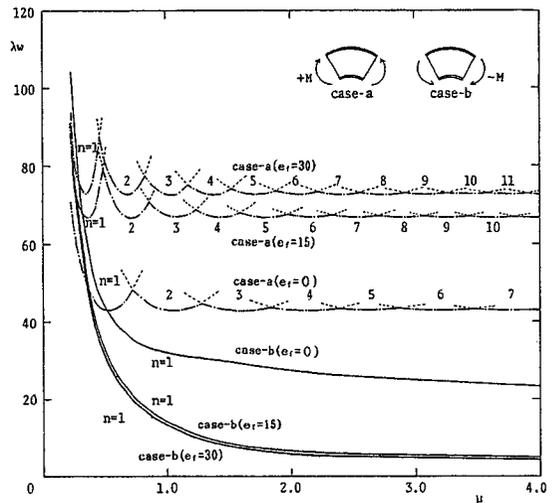


図-7 フランジ幅の変化に伴う座屈曲線の変動 (case I,  $\beta=0.5, e_w=100, \bar{\tau}_r=0.02$ )

図-6, 7は内外径比 $\beta=0.5$ の扇形腹板に対して、フランジ厚と幅をそれぞれ変化させて得られた座屈曲線を示したものである。横軸 $\mu$ は扇形腹板の縦横比で、縦軸 $\lambda_w$ は、式(4)の分担係数を考慮した腹板のみが受け持つ無次元座屈モーメント(座屈固有値  $\lambda_w = \delta \lambda_{cr}$ )である。図中の case-a, case-b は、それぞれ正の曲げ、負の曲げに対する座屈固有値を意味し、 $n=1, 2, \dots$ は $\theta$ 方向の座屈波形の半波数を示す。これらの図より、フランジの断面(厚, 幅)が増大するにしたがって、case-aとcase-bの値の差が大きくなる。文献9)にも指摘されているように、ラーメンの隅角部などの負の曲げを受ける場合、フランジの存在を考慮すると局部座屈固有値は、フランジを無視した場合よりも低下する。また、フランジ厚の変化の方が、フランジ幅の変化よりも座屈モーメントに及ぼす影響が大である。

図-8は、内外径比 $\beta$ の変化に伴う座屈固有値の変動を示したものである。内外径比 $\beta$ が小さくなるにしたがい、case-aとcase-bの差が大きくなる。扇形板では内外径比 $\beta$ が0.67より大きい場合には、負の曲げ(case-b)に対する座屈曲線は極値をもつパターンであった<sup>7)</sup>。しかし、フランジを考慮すると、半径方向内力 $N_r$ の影響により、内外径比 $\beta$ が0.75と比較的大きい場合でも、case-bは単調減少曲線となる。

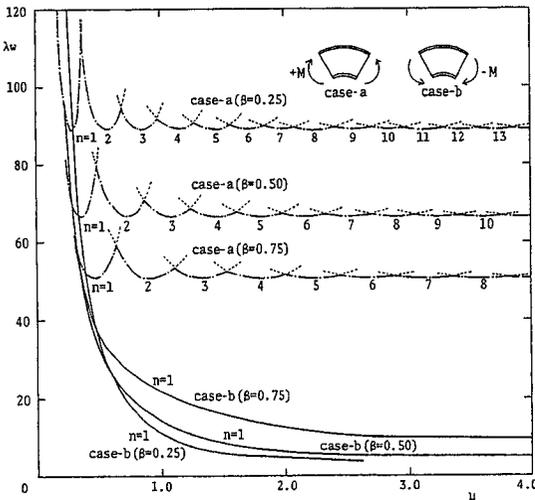


図-8 内外径比の変化に伴う座屈曲線の変動  
(case I,  $e_w=100, \bar{\epsilon}_r=0.02, \epsilon_r=15$ )

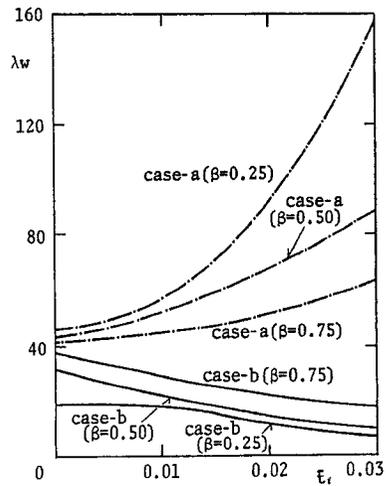


図-9 フランジ厚と最小座屈モーメントとの関係  
(case I,  $\mu=1.0, e_w=100, b_r/c=0.3$ )

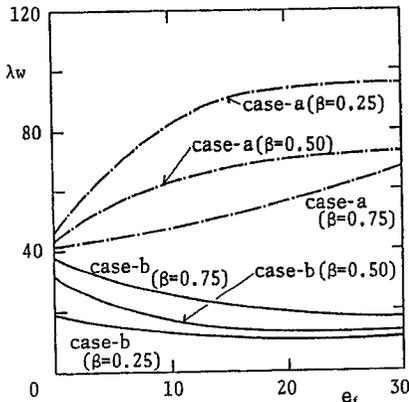


図-10 フランジ幅と最小座屈モーメントとの関係  
(case I,  $\mu=1.0, e_w=100, \bar{\epsilon}_r=0.02$ )

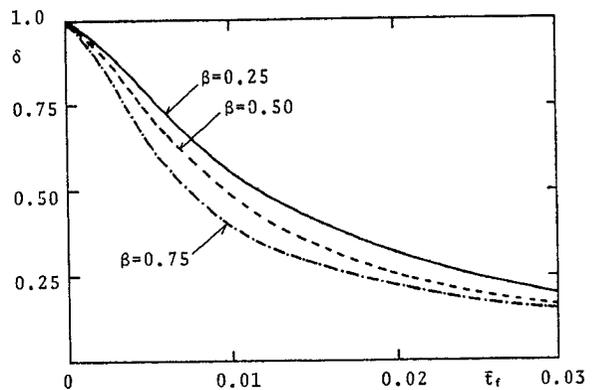


図-11 フランジ厚と分担係数との関係  
( $e_w=100, b_r/c=0.3$ )

図-9,10は、フランジ厚  $t_f$  とフランジ幅  $e_f$  の変化に伴う座屈固有値の変動を、内外径比  $\beta$  をパラメータにプロットしたものである。正・負の曲げによって、フランジの効果が異なること、内外径比が小さいほど、フランジの存在の影響を著しく受けるといえる。

本論文では、腹板の動的安定性を取り扱うため、腹板のみが受け持つ座屈モーメントに着目している。したがって、桁全体の座屈モーメント  $\lambda_{cr} (= \lambda_w / \delta)$  を評価するためには、分担係数を考慮する必要がある。図-11は、フランジ厚と分担係数との関係を、図-9のパラメータに対応して示したものである。フランジ厚の増加に伴い、分担係数が減少するため、桁全体の座屈モーメントは負の曲げに対しても増大する。

以上はcase I に対する解析結果であるが、case II の場合にも、case I と現象的に同じパターンを示すことを確認している。図-12は、フランジの断面の変化に伴う座屈波形の変化を、case II の扇形腹板の case-b に対して示したものである。フランジの断面が増大するにつれて、座屈波形の腹の位置が内径側から中央へ移っていくことが判る。

### (3) 固有振動特性

面内力の分布の変化に伴って、静的曲げモーメントが固有振動数に及ぼす影響も変化する。図-13は、静的曲げ  $M_0$  の変化に伴う固有振動数の変動を示したものである。横軸は、無次元固有振動数  $\bar{n} (= \omega_n^s / \omega_1^s)$  を示す。 $(n, s)$  は、それぞれ円周方向および半径方向の次数を示す。フランジがない場合固有振動特性と比較すると、静的曲げの増大に伴って増加していた振動形  $(n, 1)$  に顕著な変化が見られる。このときの変化の様子を  $(4, 1)$  の固有振動  $\omega_4^s$  について、フランジ厚と幅を変化させたときの無次元固有振動特性を示すと、図-14のとおりである。フランジ断面の増大とともに、固有振動数の増加の割合が小さくなる。この原因は、フランジのある場合、 $N_r$  の項が大きくなり、圧縮力として寄与することに起因すると思われる。

$t_f$	Cross-section	buckling mode (case-b)
0.01		
0.02		
0.03		

図-12 フランジ断面の変化に伴う座屈モードの変動  
(case II,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $b_f/c = 0.3$ ,  $e_w = 100$ )

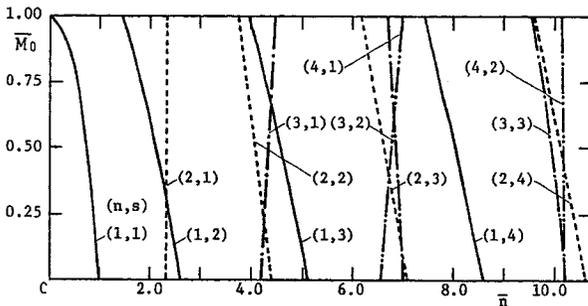
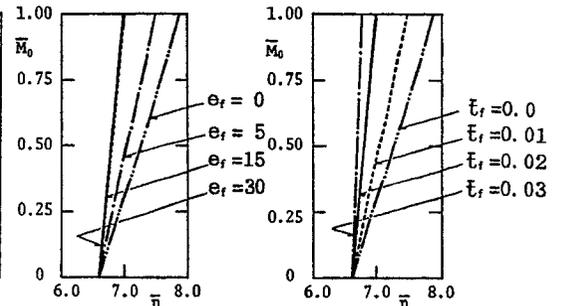


図-13 静的曲げモーメントと固有振動数の関係  
(case I,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\mu = 1.0$ ,  $e_w = 100$ ,  $t_f = 0.02$ ,  $e_f = 15$ )



(a) 板幅の変化 ( $t_f = 0.02$ )  
(b) 板厚の変化 ( $b_f/c = 0.3$ )

図-14 静的曲げと固有振動数  $\omega_4^s$  との関係

(4) 面外不安定領域

図-15は、フランジの無次元パラメーター ( $e_f=15, \bar{t}_f=0.02, e_w=100$ ) の扇形腹板 (case I,  $\alpha=\pi/3, \mu=1.0$ ) の静的曲げが作用しない場合 ( $M_0=0.0$ ) の面外不安定領域である。図中の横軸  $\bar{\omega}$  は無次元加振振動数で、縦軸  $\bar{M}_t$  は無次元変動曲げモーメントの振幅である。図中の斜線部の不安定領域に付した記号  $2\omega^{n_1}$  は単純共振の主不安定領域を、 $\omega^{n_1}+\omega^{n_2}$  は結合共振の主不安定領域を意味する。フランジのない場合の不安定領域<sup>1)</sup>と比較すると、不安定領域の種類はまったく変わらないが、その幅に変化が見受けられる。

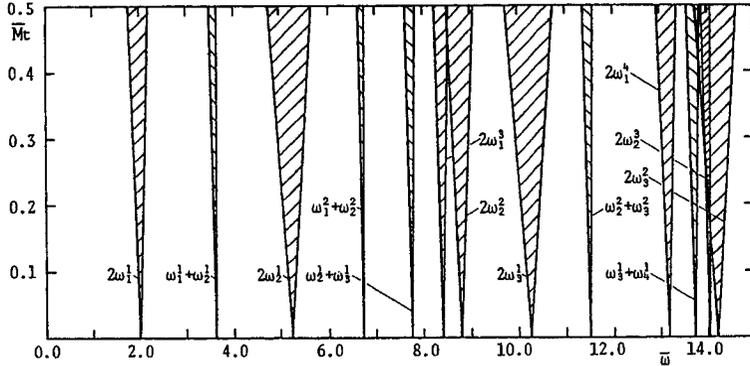


図-15 扇形腹板の面外不安定領域 (case I,  $\alpha=\pi/3, \mu=1.0, e_w=100, \bar{t}_f=0.02, e_f=15$ )

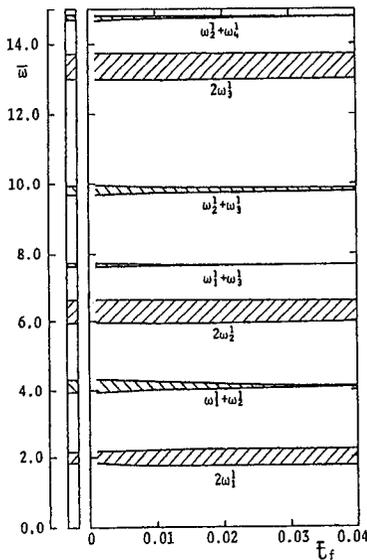


図-16 フランジ厚の変化に伴う不安定領域の変動 (case I,  $\alpha=\pi/3, \mu=1.0, e_w=100, b_f/c=0.3$ )

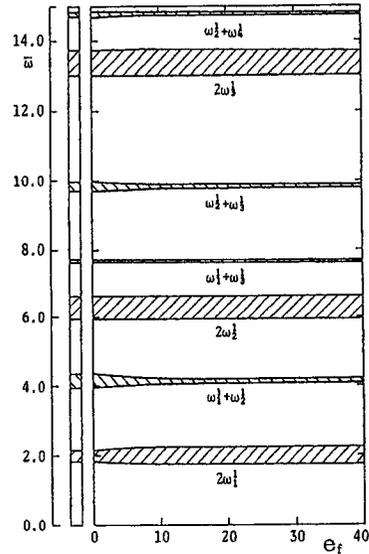


図-17 フランジ幅の変化に伴う不安定領域の変動 (case I,  $\alpha=\pi/3, \mu=1.0, e_w=100, \bar{t}_f=0.02$ )

フランジの厚さと幅の変化に伴う不安定領域の変動をはっきりさせるために、フランジ厚およびフランジ幅を変化させた場合の  $\bar{M}_t=0.5$  における不安定領域の幅の変動を図-16, 17に示す。これらの図より明らかに、フランジ厚および幅が増大すると、結合共振の幅が狭くなっていく。しかし、単純共振の幅はほとんど影響を受けない。フランジが存在すると、図-12のように、座屈波形が振動波形によく似てくるので、2個のモードが励起される結合共振が狭くなるものと思われる。

(5) 最大応答

(4)の結果は、2節の微小変形理論に基づくものである。この場合、不安定領域における平板の振動は、発散する。しかしながら、実際には平板の中央面に生ずる引張力のため、振幅は有限の大きさとなる。幾何学的非線形性を考慮した時間応答波形は、図-18のようになる。図の縦軸は、面外変位の最大値を板厚  $d$  で無次元化した応答値である。横軸は、無次元時間  $\tau (= \Omega_1 t)$  である。図に示すように、時間応答はうなりを伴う。本研究では、うなり振動の振幅のうち最も大きい値を最大応答とした。本題に対しては、最初の2,3回のうなり振動の最大値が最大応答を与える。

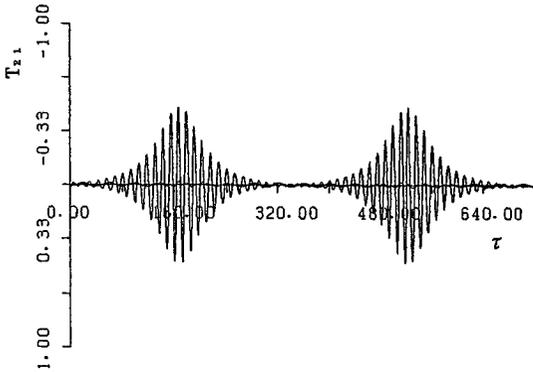


図-18 単純共振  $2\omega_1^2$  の非線形時間応答波形  
(case I,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $e_w = 100$ ,  $\bar{\epsilon}_f = 0.02$ ,  $e_f = 15$ )

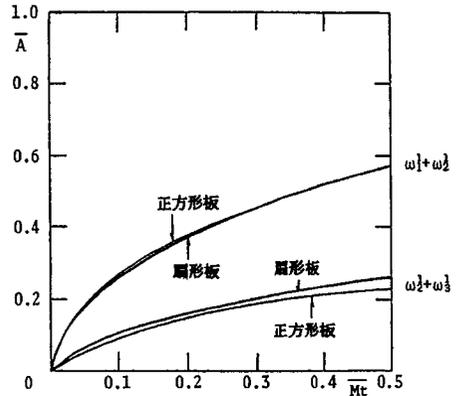


図-19 精度の検討  
(case I,  $\alpha = \pi/18$ ,  $\beta = 0.839$ )

正方形板にきわめて形状に近い扇形板 (case I,  $\alpha = \pi/18$ ,  $\beta = 0.839$ ) について  $\omega_1 + \omega_2$  と  $\omega_2 + \omega_3$  の振幅比  $\bar{A}$  (最大応答) と変動曲げの振幅  $M/c$  との関係を示すと図-19のとおりである。図のように正方形板<sup>10)</sup>と扇形板の振幅はほぼ一致している。したがって、本基礎式は取り扱いを簡単にした近似有限変形理論ではあるが、より厳密な Kármán の基礎式による解と同程度の解を与えていることが確認される。

図-20, 21はフランジ厚とフランジ幅を変化させたときの不安定領域 ( $n=1$ ) の  $M/c=0.5$  における最大応答を示したものである。最大応答は、単純共振の方が結合共振よりも大きい。また、単純共振  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$  はフランジの存在の影響を受けない。しかし、結合共振  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_2 + \omega_3$  では、フランジ幅およびフランジ厚が増大するにつれて、最大応答は減少する。

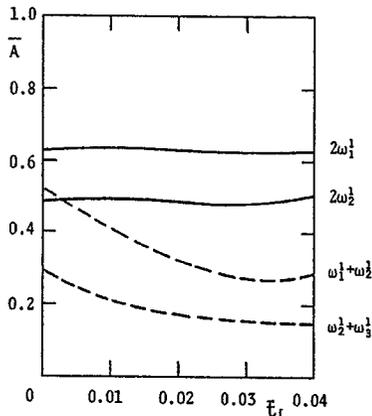


図-20 最大応答に及ぼすフランジ厚の影響  
(case I,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $e_w = 100$ ,  $b_f/c = 0.3$ )

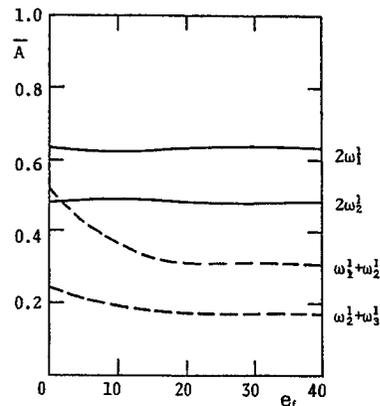


図-21 最大応答に及ぼすフランジ幅の影響  
(case I,  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $e_w = 100$ ,  $\bar{\epsilon}_f = 0.02$ )

## 6. まとめ

本論文は、面内変動曲げを受ける薄肉 I 型断面曲がり桁の扇形腹板の局部振動の動的安定性を明らかにしたものである。本研究で得られた結論は次のとおりである。

- (1) 面内曲げを受ける薄肉 I 型断面曲がり桁の扇形腹板の局部座屈強さは、扇形板に作用する面内力の分布形状および大きさがフランジのない場合と異なるために、フランジ厚および幅の影響を受ける。特に負の曲げを受ける場合の局部座屈モーメントは、フランジ断面の増加に伴い、半径方向の圧縮面内合力が大きくなるため、フランジがない場合の座屈モーメントよりも小さくなる。
- (2) 静的曲げを受ける扇形板の固有振動数については、フランジのない場合に増加していた特定の固有振動形のみが、フランジの影響を受ける。フランジ断面の増加とともに、固有振動数の増加の割合が小さくなる。
- (3) 面内変動曲げを受ける場合の面外不安定領域は、フランジのない場合と同様に、単純共振の主不安定領域が優勢である。フランジ断面の増加とともに、結合共振の不安定領域は狭くなる。
- (4) 幾何学的非線形性を考慮した扇形腹板の最大応答は、単純共振の方が結合共振よりも大きい。また、単純共振はフランジの存在の影響をあまり受けない。しかし、結合共振では、フランジ幅およびフランジ厚が増大するにつれて、最大応答が減少する。

## 謝 辞

本研究に際しては、大学院学生 平川倫明氏(現、日本工営)および卒業生 平山賢治氏(現、吉田組)の協力を得た。ここに記して謝意を表します。また、本研究の数値計算には、長崎大学総合情報処理センターの計算機 FACOM M-760/30を使用したことを付記する。

## Appendix A : $G_1, G_2, G_3, G_4$

$$G_1 = 4 \beta^2 \{ (1-\nu)^2 \ln \beta - (1-\nu) \left( \frac{t_u}{a} + \frac{1}{\beta} \frac{t_g}{a} \right) + \eta_u \left[ 1 - \frac{1}{\beta} \frac{t_g}{a} + (1-\nu) \ln \beta \right] + \eta_g \left[ 1 + \frac{t_u}{a} - (1-\nu) \ln \beta \right] - \eta_u \eta_g \ln \beta \},$$

$$G_2 = -(1+\nu) \{ (3-\nu)(1-\beta^2) + 2 \left( \frac{t_u}{a} + \beta \frac{t_g}{a} \right) - 2\beta^2(1-\nu) \ln \beta \} - \eta_u \{ (1+\nu) + (3-\nu)\beta^2 - 2\beta \frac{t_g}{a} + 2\beta^2(1-\nu) \ln \beta \} - \eta_g \{ (3-\nu) + 2 \frac{t_u}{a} + \beta^2(1+\nu)(1+2 \ln \beta) \} - \eta_u \eta_g (1-\beta^2 - 2\beta^2 \ln \beta),$$

$$G_3 = (1-\nu^2)(1-\beta^2) + \eta_u \{ (1+\nu) + (1-\nu)\beta^2 \} + \eta_g \{ (1-\nu) + (1+\nu)\beta^2 \} + \eta_u \cdot \eta_g (1-\beta^2),$$

$$G_4 = G_1 \left\{ \ln \beta - \frac{1}{2} \left( \frac{t_u}{a} + \frac{1}{\beta} \frac{t_g}{a} \right) \right\} - G_2 \left\{ (1-\beta^2) + \left( \frac{t_u}{a} + \beta \frac{t_g}{a} \right) \right\} + 2 G_3 \left\{ \beta \left( \beta - \frac{t_g}{a} \right) \ln \beta - \frac{1}{2} \left( \frac{t_u}{a} + \beta \frac{t_g}{a} \right) \right\}.$$

ここに、

$$\eta_u = \frac{\lambda_u d \left[ 2 + \cosh \frac{\lambda_u b_u}{(a+t_u/2)} + \cos \frac{\lambda_u b_u}{(a+t_u/2)} \right]}{2 t_u \left[ \sinh \frac{\lambda_u b_u}{(a+t_u/2)} + \sin \frac{\lambda_u b_u}{(a+t_u/2)} \right]}, \quad \eta_g = \frac{\lambda_g d \left[ 2 + \cosh \frac{\lambda_g b_g}{(b-t_g/2)} + \cos \frac{\lambda_g b_g}{(b-t_g/2)} \right]}{2 t_g \left[ \sinh \frac{\lambda_g b_g}{(b-t_g/2)} + \sin \frac{\lambda_g b_g}{(b-t_g/2)} \right]},$$

$$\lambda_u = \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{(a+t_u/2)/t_u}, \quad \lambda_g = \sqrt{3(1-\nu^2)} \cdot \sqrt{(b-t_g/2)/t_g}.$$

Appendix B: 分担係数  $\delta$

$$\delta = \left\{ 1 + \frac{1}{G_4} (G_1 + 2G_3) \cdot \left[ 1 - \beta + \frac{1}{2} \left( \frac{t_u}{a} + \frac{t_d}{a} \right) \right] + \frac{1}{G_4} \left[ G_1 \left( 1 - \frac{1}{\beta} \right) + 2G_2 (1 - \beta) + 2G_3 (1 - \beta - 2\beta \ln \beta) \right] \left[ \beta - \frac{1}{2} (1 + \beta) - \frac{1}{2} \frac{t_d}{a} \right] \right\}$$

Appendix C: 係数マトリックス [A] および [B]

$$[A] = \text{diag}(a_{sn}^2)$$

ここに、 $a_{sn} = k_{sn}^2 / k_{11}^2$  .

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11n} & b_{21n} & \cdots & b_{N1n} \\ b_{12n} & b_{22n} & \cdots & b_{N2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1Nn} & b_{2Nn} & \cdots & b_{NNn} \end{bmatrix}$$

ここに、 $b_{spn} = I_{spn} / I_{sn}$ 、 $I_{sn} = \int_{\beta}^1 R_{sn}^2 \xi d\xi$ 、

$$I_{spn} = - \frac{\lambda_{cr}}{k_{11}^4} \int_{\beta}^1 \left\{ \xi f_1(\xi) \frac{dR_{sn}}{d\xi} \frac{dR_{pn}}{d\xi} + \frac{\alpha_n^2}{\xi^2} f_2(\xi) R_{sn} R_{pn} \right\} d\xi$$

$$f_1(\xi) = \frac{1}{G_4} \left\{ \frac{\bar{G}_1}{\xi^2} + 2\bar{G}_2 + 2\bar{G}_3 (1 + 2 \ln \xi) \right\}, \quad f_2(\xi) = \frac{1}{G_4} \left\{ - \frac{\bar{G}_1}{\xi^2} + 2\bar{G}_2 + 2\bar{G}_3 (3 + 2 \ln \xi) \right\}$$

$\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4$ :  $G_1, G_2, G_3, G_4$  を無次元表示した定数。

Appendix D: Galerkin法の積分項  $E_{spn}$ 、 $F_{spn}$ 、 $G_{kin}$

$$E_{spn} = I_{spn} / I_{sn}, \quad F_{spn} = J_{spn} / I_{sn}, \quad G_{kin} = \int R_{kn} S_{ln} \xi d\xi$$

$$\text{ここに、} J_{spn} = \frac{6}{1 - \beta^2} \frac{\lambda_{cr}}{k_{11}^4} \int R_{sn} S_{pn} \xi d\xi$$

$$R_{kn} = A_{kn} J_{\alpha_n}(k_{kn} \xi) + B_{kn} Y_{\alpha_n}(k_{kn} \xi) + C_{kn} I_{\alpha_n}(k_{kn} \xi) + D_{kn} K_{\alpha_n}(k_{kn} \xi)$$

$$S_{ln} = k_{ln}^2 \left\{ -A_{ln} J_{\alpha_n}(k_{ln} \xi) - B_{ln} Y_{\alpha_n}(k_{ln} \xi) + C_{ln} I_{\alpha_n}(k_{ln} \xi) + D_{ln} K_{\alpha_n}(k_{ln} \xi) \right\}$$

$J_{\alpha_n}, Y_{\alpha_n}$ :  $\alpha_n$  次の第1種、第2種 Bessel関数、

$I_{\alpha_n}, K_{\alpha_n}$ : 変形された  $\alpha_n$  次の第1種、第2種 Bessel関数、

$A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, D_{kn}$ : 境界条件より定まる積分定数、

$I_{spn}, I_{sn}$ : Appendix C 参照、

$k_{kn}$ :  $(n, k)$  次の振動の固有値、

$\lambda_{cr}$ : 最低次の座屈固有値、

$\beta = b/a$ : 内外径比、 $\xi = r/a$  .

## 参考文献

- 1) Takahashi,K.,Natsuaki,Y.,Konishi,Y. and Hirakawa,M.:Dynamic Stability of an Annular Sector Plate Subjected to In-plane Dynamic Moment,Proc.of JSCE,Vol.410/I-12,pp.201-211,1989.
- 2) Chu, K. Y.: Beuluntersuchung von ebenen Stegblechen kreisförmig gekrümmter Träger mit I-Querschnitt, Stahlbau, 35Jg., H.5, s.129~142, 1966.
- 3) 大野: 曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式, 土木学会誌, Vol.37, No.7, pp.300~305, 1952.
- 4) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257~262, 1982.
- 5) Berger,H.M.:A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates,J.Appl.Mech.,Vol. 22,pp.465-472,1955.
- 6) 山崎・樗木・金子: 扇形板の自由振動解析, 九州大学工学部集報,第42巻,第4号,pp.576-583,1969.
- 7) Takahashi,K.,Natsuaki,Y.,Hirakawa,M and Konishi,Y.:Buckling of an Annular Sector Plate Subjected to In-plane Moments,Proc.of JSCE,Vol.404/I-11,pp.91-99,1989.
- 8) 樗木・高橋: 扇形板の非線形振動, 土木学会論文報告集, 第204号, pp.1-13, 1972.
- 9) 三上・赤松・武田: 純曲げを受ける薄肉 I 断面曲がり桁の局部座屈と連成座屈, 土木学会論文報告集, 第230号, pp.45-54, 1974.
- 10) Takahashi,K.,Konishi,Y.,Ikeda,T. and Kawano,R.: Nonlinear Response of a Rectangular Plate Subjected to Inplane Dynamic Moment,Proc.of JSCE,No.374/I-6,pp.79-87,1986.

(1989年10月2日受付)