

変動軸力を受けるはり部材の安定を失った後の動的応答

NONLINEAR RESPONSE OF A BEAM SUBJECTED TO A SINUSOIDALLY TIME-VARYING AXIAL FORCE

高橋和雄*・手塚仁**・其田智洋***

Kazuo TAKAHASHI, Hitoshi TEZUKA, Tomohiro SONODA

Dynamic unstable regions and amplitudes of the responses of a beam subjected to a sinusoidally time-varying axial force for various boundary conditions and loading conditions are reported in this paper. Conservative and follower forces are considered for the fixed-free beam.

Dynamic unstable regions which are obtained by the small deflection theory are discussed at first and amplitudes of unstable motions are obtained by the nonlinear theory of beams caused by axial force due to deflection and nonlinear curvature of beams.

1. まえがき

はり、ケーブル、平板などの構造部材に周期的変動軸力が作用すると、特定の加振振動数の領域でたわみや面外振動が生ずることが知られている¹⁾。この現象は係数励振振動による不安定振動である。微小変形理論によれば、この不安定振動は、減衰力を考慮しても時間とともに増大する。しかし、構造部材では、たわみによって生ずる軸力や非線形曲率の存在によって、振動の振幅は有限な大きさとなる場合がある。したがって、安定を失った後の応答を明らかにするためには、幾何学的非線形を考慮した有限変形理論を適用しなければならない。しかし、このような研究は、はり部材に対しては行われていないようである。そこで、本論文は、はり部材を対象に安定を失った後の応答を明らかにするものである。はりに生ずる非線形項として、両端で軸方向変位が拘束されたはりでは、たわみに起因する軸方向力²⁾を、また、片持ばりのように中立軸の伸びが無視できるはりでは、非線形曲率³⁾⁴⁾を考慮した。本論文では、はりの非線形運動方程式をGalerkin法を用いて、常微分方程式に変換し、これにRunge-Kutta-Gill法を用いて時間応答解析を行う手法を採用する。数値解析において、まず、微小振動論より得られる不安定領域を明らかにし、ついで最大応答をはりの境界条件、初期軸力、減衰力および負荷条件のもとに明らかにする。

2. 運動方程式

* 工博	長崎大学助教授	工学部土木工学科	(〒852 長崎市文教町1-14)
** 工修	㈱熊谷組	技術研究所	(〒162 東京都新宿区津久戸町2-1)
*** 長崎大学大学院学生		土木工学専攻	(〒852 長崎市文教町1-14)

図-1に示すような2つのタイプのはりを対象とする。(a)のはりは、両端で軸方向変位が拘束されている。たわみによって生じる軸力が非線形項になる。この場合、はりの伸びに対する剛性は高いので、たわみは回転半径程度のオーダーになる²⁾。このために、はりの軸方向の変位による慣性力および回転慣性は無視することができる。(b)のはりは、はりの軸方向の変位が自由であるので、はりの中立軸はたわみによって伸びないと仮定することができる³⁾。なお、はりのたわみと軸方向変位がともに大きいので、たわみおよび軸方向変位による慣性力ならびに回転慣性の影響を考慮する。この場合の非線形項は、たわみおよび軸方向変位に関する非線形曲率となる。これらのはりに、静的軸力と変動軸力の和 $P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ が作用する。なお、片持ちりについては、荷重の作用方向が常に一定の場合(保存力: conservative force)と、変形に依存して常に接線方向に作用する場合(従動力: follower force)の2ケースを考える(図-2)。(a)、(b)の各ケースの非線形運動方程式は次のように表わされる。

$$(a) : L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{EA}{2\ell} \int \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$(b) : L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{wA}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (P_0 + P_1 \cos \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \left\{ 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right\} = 0 \quad (2)$$

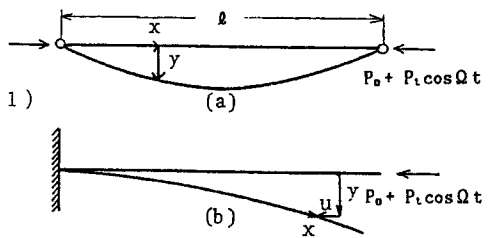


図-1 一般図および記号

ここに、E : ヤング率、I : 断面2次モーメント、w : 単位体積重量、g : 重力の加速度、A : 断面積、x : 変形前の部材軸方向の座標(a)、変形後の部材軸方向の座標(b)、P₀ : 静的軸力、P₁ : 変動軸力の荷重振幅、Ω : 変動軸力の円振動数、t : 時間

式(1)において、中立軸のひずみは次式で与えられている²⁾。

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{ここに、} u : \text{軸方向変位}) \quad (3)$$

また、式(2)においては、非線形曲率は伸びなし変形理論にしたがって、次式で与えられる⁴⁾。

$$\kappa = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} / \left\{ 1 - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{3/2} \quad (4)$$

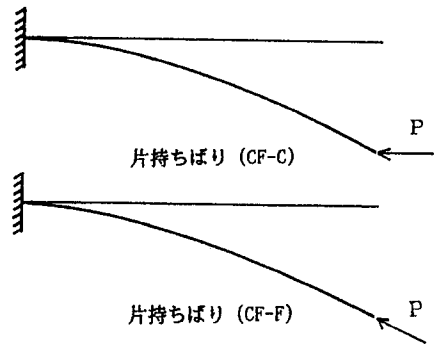


図-2 片持ちりの負荷条件

曲げに対する境界条件から、はりの種類は、軸方向変位が拘束されている場合に、両端ヒンジばり(HH)、一端固定・他端ヒンジばり(CH)および両端固定はり(CC)を対象とする。軸方向変位が拘束されていない場合には、片持ちり(CF)を考える。なお、片持ちりの場合には、保存力と従動力の場合の自由端における境界条件がそれぞれ次のように表わされる。

$$(CF-C) : \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + P \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (CF-F) : \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \quad (5)$$

3. 解法

式(1)、(2)の解を次のように仮定する。

$$(a) : y = \ell \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t), \quad (b) : y = \ell \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t) \quad (6)$$

ここに、 $X_i(x)$:境界条件を満足する座標関数、 $T_i(t)$:未知の時間関数、 r :回転半径、 l :スパン長
 軸力によるはりの非線形振動の場合(a)、非線形項は、回転半径 r のオーダーで、曲率によるはりの非線形振動の場合(b)、非線形項は長さ l のオーダーでそれぞれ効いてくるため、このような無次元化を行っている²⁾⁴⁾。式(6)の座標関数 X_i として、はりの固有振動形を採用する。はりの境界条件がHH、CH、CC、CF-Fのはりでは、はりの固有振動の振動形を用いる⁵⁾。しかし、CF-Cのはりの境界条件は、はりの固有振動形を用いて表わすことは不可能である。このために、片持ちばりの座屈波形を用いて合成した片持ちばりの固有振動形を用いる(Appendix A)。すなわち、

$$X_i = \sum_{j=1}^i a_j^i \{1 - \cos(2j-1)\pi \xi / 2\} \quad (7)$$

ここに、 $\xi = x/l$ 、 a_j^i :定数

上式は片持ちばりの振動に関しては、はりの固有振動形と全く同じ解を与える。しかし、軸力のかかった項では、全く異なった役割を果たす。なお、座標関数 X_i は、最大値が1になるように規準化されている。

式(6)は仮定した解で、式(1)、(2)の厳密解ではない。したがって、式(1)、(2)に式(6)の(a),(b)をそれぞれ代入しても右辺は0にならない。そこで、微分方程式の近似解法であるGalerkin法を適用する。すなわち、

$$\int_0^l L(y) X_i dx = 0 \quad (8)$$

式(8)の定積分を実行して、無次元化すれば、式(1)および(2)は次のような1つの連立常微分方程式にまとめられる。

$$\ddot{T}_i + \alpha_i^2 T_i + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau) \sum_{j=1}^i \kappa_{ji} T_j + \sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i \Gamma_{mnji} T_j T_m T_n = 0 \quad (9)$$

ここに、 $\bar{P}_0 = P_0/P_{cr}$ 、 $\bar{P}_t = P_t/P_{cr}$ 、 $P_{cr} = \epsilon^2 EI/l^2$ 、 $\tau = \omega_i t$ 、 $\alpha_i = (\lambda_i/\lambda_1)^2$ 、

$$\lambda_i^4 = l^4 \omega \omega_i^2 / EIg$$

$$\kappa_{ji} = \epsilon^2 \beta_{ji} / \lambda_1^4 \delta_i$$

$$(a) \Gamma_{mnji} = \gamma_{mn} \beta_{ji} / 2 \lambda_1^4 \delta_i, \quad \delta_i = \int_0^1 X_i^2 d\xi, \quad \beta_{ji} = -\int_0^1 X_i' X_j' d\xi, \quad \gamma_{mn} = \int_0^1 X_m' X_n' d\xi$$

$$(b) \Gamma_{mnji} = \int_0^1 (2X_m' X_n'' X_k''' + X_m'' X_n'' X_k''') X_i d\xi, \quad \delta_i = \int_0^1 X_i^2 d\xi, \quad \beta_{ji} = \int_0^1 X_i' X_j d\xi,$$

$$\gamma_{mn} = \int_0^1 X_m' X_n' d\xi$$

ϵ :境界条件によって定まるオイラー座屈の係数、 P_{cr} :オイラーの座屈荷重、 \bar{P}_0 :無次元静的荷重、

\bar{P}_t :無次元変動荷重の振幅、 ω_i :1次の固有円振動数、 τ :無次元時間、 $\bar{\omega}$:無次元加振振動数

式(9)は非線形のMathieuの方程式である。与えられた境界条件および静的荷重 \bar{P}_0 のもとに、 \bar{P}_t と $\bar{\omega}$ の組合せによって、式(9)の一般解には、時間とともに振動が有限の大きさに成長する解および、与えられた初期条件の近傍に振動が留まる解の2種類が存在する。式(9)の非線形方程式を数値的に解いて、解の性質を明らかにすることは、計算時間および解の全体的挙動の把握の観点から得策とはいいがたい。そこで、本論文は、最初に線形解を求め、次いで非線形解を求める手法を採用する。すなわち、まず式(9)の非線形項を無視して、動的安定解析より、振動が成長する不安定領域を解析的に明らかにする。非線形項を無視した場合(線形解)には、不安定領域において、振動は時間とともに成長し、無限大に発散する。次いで、この不安定領域内において、式(9)の非線形方程式を解けば、不安定領域の振動に及ぼす非線形項の影響を評価することができる。

4. 動的安定解析

式(9)の非線形項を無視すれば、係数励振振動系の運動方程式が得られる。

$$[I]\{\ddot{T}\} + [A]\{T\} + (\bar{P}_0 + \bar{P}_t \cos \bar{\omega} \tau)[B]\{T\} = \{0\} \quad (10)$$

ここに、 $[I]$: 単位行列、 $[A]=\text{diag}(\alpha_i^2)$ 、 $[B]=[\kappa_{ij}]$ 、 $\{T\}=(T_1 T_2 \dots T_n)^T$
 式(10)の一般解は次のように仮定することができる⁹⁾。

$$\{T\} = e^{\lambda \tau} \left\{ \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n \bar{\omega} \tau + b_n \cos n \bar{\omega} \tau) \right\} \quad (11)$$

式(11)を式(10)に代入して調和バランス法を適用すれば、同次方程式が得られる。未知のベクトルが0ベクトルでない条件から、2倍サイズの固有値問題に変換される。固有値の実数部がすべて負ならば安定、一つでも正ならば不安定という条件から、系の安定性が評価される。式(10)の \bar{P}_0 、 \bar{P}_1 および $\bar{\omega}$ のパラメータの組合せによって不安定領域を求めることができる。式(10)の不安定領域には単純共振および結合共振の2種類が存在する。 $k=1$ の場合を主不安定領域、 $k \geq 2$ の場合を副不安定領域と呼ぶ。結合共振の符号+の場合を和形、-の場合を差形とよぶ。これらの不安定領域のうち、どの不安定領域が存在するかは、行列 $[B]$ の要素構成によって異なる。各境界条件について、係数励振行列 $[B]$ の要素構成に注目する⁷⁾。HHでは、 $[B]$ は対角行列($\kappa_{ij}=0(i \neq j)$)となるために単純共振のみが存在する。また、CH,CC,CF-Cのはりでは κ_{ij} と κ_{ji} の符号が同じであるので、単純共振の他に和形の結合共振が存在する。CF-Fでは κ_{ij} と κ_{ji} が異符号の要素も含まれているので、差形の結合共振も存在する。

5. 安定を失った後の応答

動的安定解析より、単純共振および結合共振が生ずる不安定領域が得られる。これらの振動がどのように成長するかを、式(9)の非線形項を考慮して評価する。式(9)の厳密解を得ることは不可能であるので、本論文では、一階の常微分方程式群に変換する。Runge-Kutta-Gill法を用いた数値積分を行う。単純共振は1自由度系、結合共振は2自由度系の振動であるから、安定を失った後の応答解析には2自由度系を採用すれば十分であるので、本研究では、式(9)から適宜関係する2自由度を選んで計算を行う。なお、振動の初期条件として、微小振動の範囲の外乱($T_i, T_j \ll 1$)を与えた。

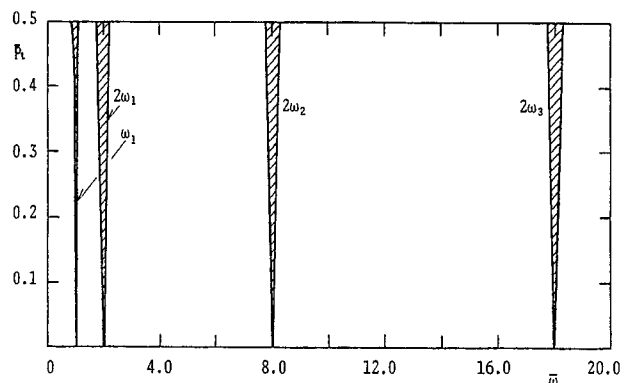


図-3 両端ヒンジばり(HH)の不安定領域図

6. 数値結果

(1)不安定領域 図-3~6に両端ヒンジばり(HH)、両端固定ばり(CC)、片持ちばり(CF-C,CF-F)の不安定領域を示す。これらの図において、横軸は、1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ を、また、縦軸は無次元変動軸力の振幅 \bar{P}_1 である。また、不安定領域につけた右上がりの斜線部は単純共振を、右下がりの斜線部は結合

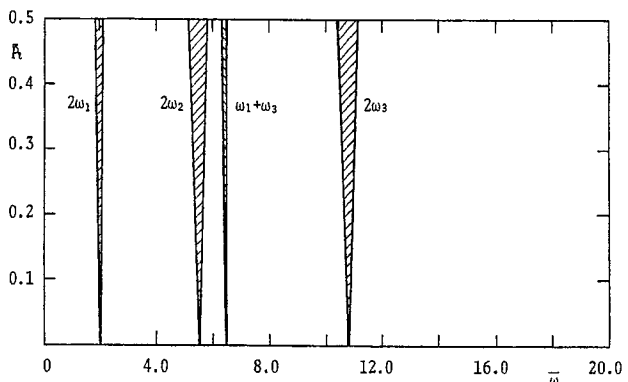


図-4 両端固定ばり(CC)の不安定領域図

共振を示す。図-3~5のように保存力の場合には、単純共振と和形の結合共振が見受けられる。また、保存力の場合に結合共振の幅は、単純共振の幅よりも小さい。これにたいして、図-6に示したCF-Fの従動力の場合には、不安定領域の幅は保存力と比較してかなり広く、また、結合共振には差形の共振が含まれる。

(2) 不安定領域に及ぼす減衰力の影響

運動方程式に各モードに分解できる減衰力を考慮した場合、減衰力が不安定領域におよぼす影響を評価する。CF-Fに対する不安定領域は、図-7に示すとおりである。減衰定数 h の大きさは、その特性が現われるように調整している。減衰力の存在は、一般に幅の狭い不安定領域を安定に変える。その傾向は高次振動ほど顕著になる。しかし、結合共振にたいしては、このことは必ずしも成り立たず、CF-Fの $\omega_2 - \omega_1$ および $\omega_1 + \omega_3$ の不安定領域は、かえって広がっている。この現象は脱安定化効果と呼ばれている。結合共振の場合、減衰を考慮しないと、その不安定領域が確定しないことを示すものである。

(3) 最大応答 不安定領域内で時間応答

解析すれば、励振振幅 \bar{P}_t の最大応答 A との関係が明らかにされる。図-8, 9に両端固定ばり(CC)の単純共振 $2\omega_1$ と結合共振 $\omega_1 + \omega_3$ の時間応答を示す。減衰のない場合の時間応答はうなりを伴った特有の応答波形をもつ。このうなりの最大値から最大応答が得られる。これらの最大応答は、非線形項の場合にははりの回転半径で無次元化されており、また曲率による非線形項の場合には、はりの長さで無次元化されている。両端ヒンジばり(HH)および両端固定ばり(CC)の最大応答 A と励振振幅 \bar{P}_t との関係を示すと、図-10, 11のとおりである。励振振幅 \bar{P}_t は、無次元変動軸力の振幅であって、境界条件が異なればその絶対値は異なる。図のように、軸力による非線形項の場合、最大応答は、はりの回転半径程度

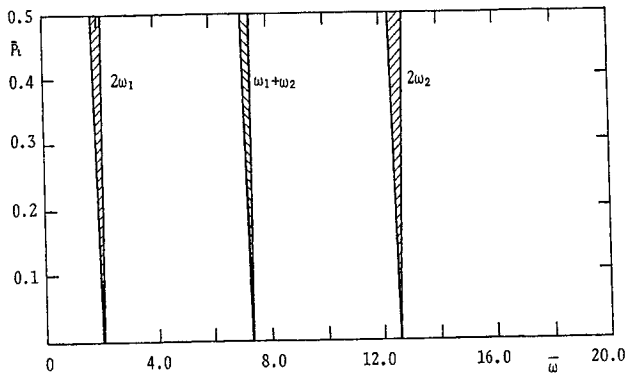


図-5 片持ちばり(CF-C)の不安定領域図

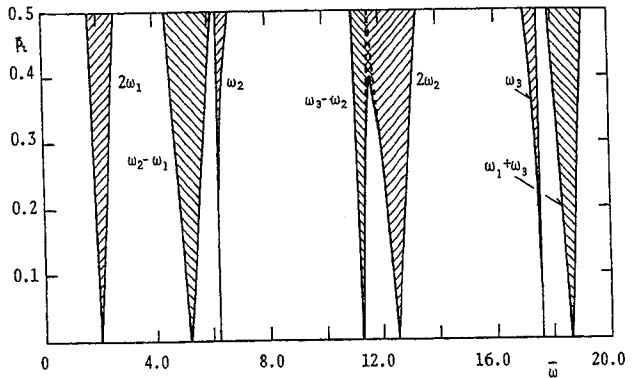


図-6 片持ちばり(CF-F)の不安定領域図

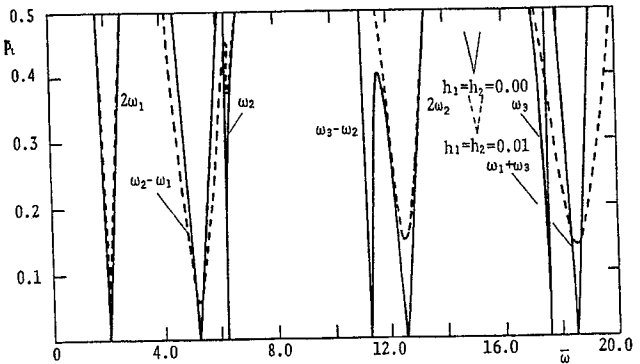


図-7 片持ちばり(CF-F)の不安定領域に及ぼす減衰力の影響

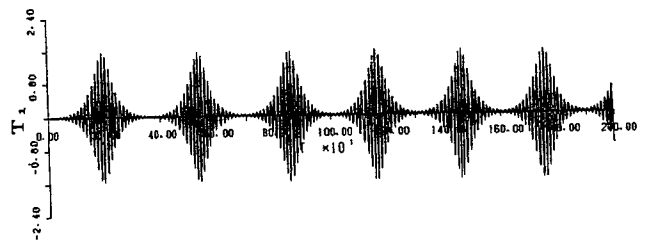


図-8 時間応答波形(単純共振 $2\omega_1$)

である。低い振動数領域側に存在する不安定領域の振幅が最も大きく、高次側になるにつれて小さくなる。不安定領域のもつ広さには直接関係しない。この傾向は、CH、CCのはりにおいても同じである。各境界条件の主不安定領域 $2\omega_1$ の最大応答を求めると、図-12の結果となる。同じ大きさの無

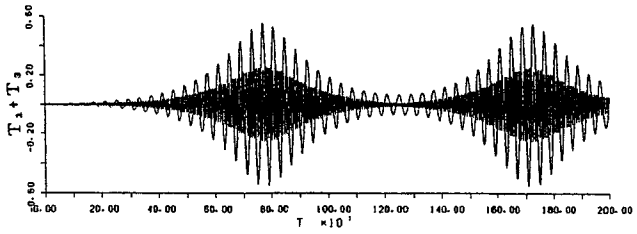


図-9 時間応答波形(結合共振 $\omega_1 + \omega_3$)

次元変動軸力 P_i のもとではHH、CH、CCの順に最大応答が大きくなる。たわみに起因する非線形項の大きさは、境界条件にかかわらず、ほぼ一定であるから、曲げに対する剛性が小さいはりほど相対的に線形項に比べて非線形項が大きくなるため、非線形項が効いてくる。したがって、非線形項が大きいはりの振幅が小さくなるものと考えられる。

図-13に、両端固定ばりの最大応答に及ぼす減衰力の影響を示す。一般に、減衰力は、振幅を小さくする効果を持ち、特に励振振幅が小さい領域で効いてくる。以上のように、軸力による非線形項を考慮した場合、はりの最大応答は、はりの回転半径のオーダー程度で与えられ、かなり強い非線形性を示す。したがって、安定を失った後の応答は、有限な大きさとなる。一方、片持ちばりでは、たわみが増大しても、負荷に抵抗する内力の分担型式には本質的な変化がない。事実、片持ちばりの保存力の場合について最大応答を求めたところ、CF-CおよびCF-F

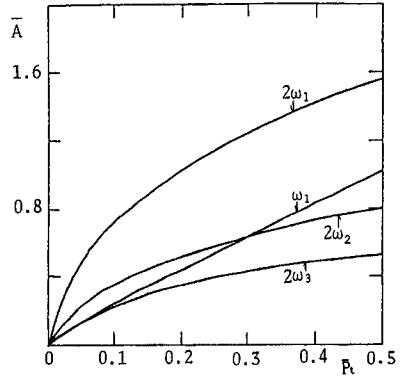


図-10 両端ヒンジりの最大応答

に対して図-14、15の結果を得る。励振振幅が小さいときのみ、最大応答が有限な大きさ($A < 1$)となる。励振振幅が大きくなると、解析の前提を越えた最大応答となり、振幅は有限な大きさに留まらなくなる。したがって、片持ちばりでは、安定を失った後の応答は、非線形項を考慮しても、発散を押えることができない。つまり、係数励振振動の発生は、そのまま構造部材の振動の発散を意味する。

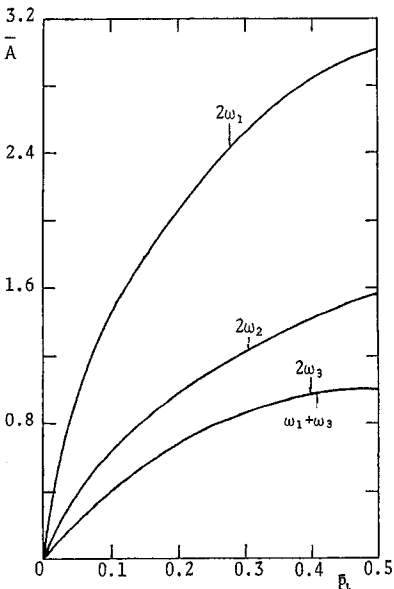


図-11 両端固定ばりの最大応答(CC)

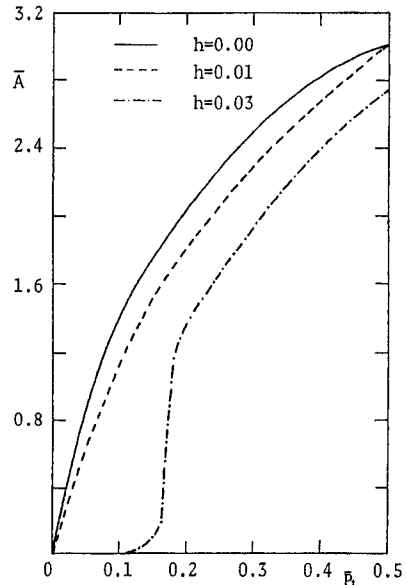


図-13 最大応答に及ぼす減衰力の影響(CC), $2\omega_1$

7. まとめ

本論文は、変動軸力を受けるはりの動的不安定領域および安定を失った後の動的応答を明らかにしたものである。得られた結果をまとめると次のとおりである。

(1) はりの動的不安定領域の種類は、はりの境界条件および負荷条件

の影響を著しく受ける。軸力の作用方向が、一定である保存力と変形に依存して変化する従動力では、不安定領域の幅および種類が異なる。保存力の場合には、単純共振が支配的であり、結合共振は、和型が含まれるが、その幅は単純共振に比べて狭い。これに対して、従動力の場合には、不安定領域の幅が広く、和型に加えて、差型の結合共振も含まれる。

(2) 減衰力は、一般に、不安定領域を安定化させる効果をもつが、結合共振については、かえって広がる場合がある。

(3) 安定を失った後の動的応答は、はりに生ずる非線形項を考慮して求められる。両端で軸方向変位が拘束されたはりでは、たわみによって生ずる軸力が非線形項となり、振幅の大きさははりの回転半径のオーダーになる。はりの端部の曲げに対する拘束度が小さいはりほど、非線形項の寄与が大きくなり、応答振幅が小さくなる。また、低次のモードの振動の振幅が大きい。

(4) たわみによるはりの中立軸の伸びが、無視できる片持ちばりでは、軸力の代わりに曲率による非線形性が効いてくる。この場合、はりの長さのオーダーになって非線形性が効いてくるために、励振振幅が小さいときを除いて非線形項は、最大応答を有限に押えることができない。

最後に、本研究を行うにあたり、多大な御援助を賜った長崎大学工学部小西保則教授に深く感謝の意を表す。なお、本研究の数値計算には、長崎大学総合情報処理センターのFACOM M-760モデル30を使用したこと、および平成元年度、2年度の文部省科学研究補助金(一般研究(C)、課題番号01550368)を得たことを付記する。

Appendix A

はりの座屈に関する4階の常微分方程式は次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \tag{A-1}$$

上式をCF-Fの境界条件のもとに解くと、座屈波形が次のように得られる。

$$y_i = 1 - \cos(2i-1)\pi \xi / 2 \tag{A-2}$$

ここに、 $i=1,2,\dots$, $\xi = x/l$

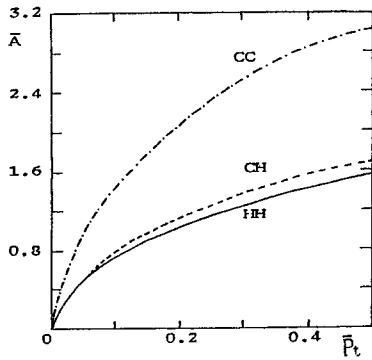


図-12 境界条件の影響(2 ω_1)

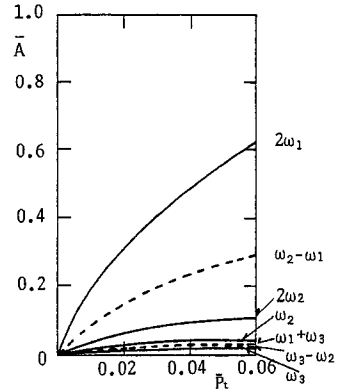


図-14 片持ちばりの最大応答(CF-C)

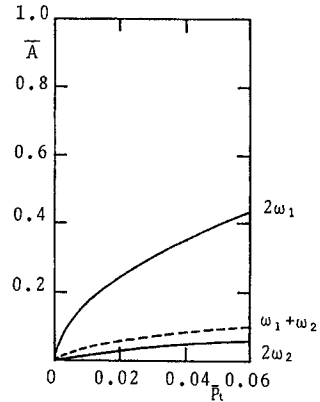


図-15 片持ちばりの最大応答(CF-F)

式(A-2)を用いて、はりの固有振動解析を行う。振動の解を次のように仮定する。

$$y = \sum_{i=1}^n a_i y_i \cos nt \quad (\text{A-3})$$

式(A-3)をはりの運動方程式に代入して、Galerkin法を適用すれば、次式が得られる。

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{EI}{\rho^4} \frac{d^4 y_i}{d\xi^4} - \frac{wA}{g} n^2 y_i \right\} y_j d\xi = 0 \quad (\text{A-4})$$

ここに、 $j=1, 2, \dots$

つまり、

$$([A] - \lambda^4 [B])\{X\} = \{0\} \quad (\text{A-5})$$

ここに、

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{d^4 y_i}{d\xi^4} y_j d\xi, \quad b_{ij} = \int_0^1 y_i y_j d\xi, \quad \lambda^4 = \frac{wAn^2 \rho^4}{gEI}, \quad \{X\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$$

上式を行列の固有値問題として解くと、固有値 λ^4 と固有振動のベクトル $\{X\}$ が求められる。

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_j^i \{1 - \cos(2j-1)\pi \xi / 2\} \quad (\text{A-6})$$

参考文献

- 1) Bolotin, V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco, Holden-Day Inc., 1964.
- 2) 八巻：弾性体の非線形振動、日本機械学会第373回講習会「非線形振動の理論と実際」, pp.31~50, 1973.
- 3) 吉村・植村：棒の横振動に於ける振幅の影響、東京大学理工学研究所報告書, 第2巻, 第3・4号, pp.57~61, 1948.
- 4) Takahashi, K.: Non-linear Free Vibration of Inextensible Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol.64, pp.31~34, 1979.
- 5) 小坪：土木振動学, 森北出版, pp.182~188, 1973.
- 6) Takahashi, K.: Instability of Parametric Dynamic System with Non-Uniform Damping, Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257~262, 1982.
- 7) Hsu, C.S.: On the Parametric excitation of a Dynamic System Having Multiple Degrees of Freedom, Journal of Applied Mechanics, Vol.30, pp.367~372, 1963.

(1990年10月12日受付)