構造工学論文集 Vol.37 A (1991年3月) 土木学会

変動軸力を受けるケーブルの動的安定性

Dynamic Stability of Cables Subjected to an Axial Periodic Force

高橋和雄* ・ 一ノ瀬寛幸** ・ 町田健一郎*** ・ 夏秋義広****

By Kazuo TAKAHASHI,Hiroyuki ICHINOSE, Kenichiro MACHIDA,and Yoshihiro NATSUAKI

In this paper,theoretical solutions are reported for the dynamic stability of a flat-sag cable under an axial sinusoidally time-varying force. This problem is solved by using the harmonic balance method described first by Bolotin and lately extended by the author. After presenting the problem in the eigenvalue form,numerical results are presented for dynamic unstable regions of the cable with various sag-to-span ratios and ratio of wave speeds.

1.まえがき

ケーブルの動特性は、きわめて独特かつ複雑である。すなわち、微小振動論より得られる固有振動特性(固有振動数、固有振動形)[1]、減衰特性[2]、幾何学的非線形性を考慮した場合の非線形振動特性[3),4]、非線形分岐応答特性[5]などがサグ比によって異なる。ケーブルの場合、面内と面外の固有振動数が接近しているために、共振現象や動的不安定現象に著しい特徴が現れる。例えば、面外加振による面内振動の連成応答[3),4]、および面内加振による面外係数励振振動[5]などが、その代表例である。さらに、ケーブルでは、支点における軸方向加振によって、弦と同じようにたわみ振動が、発生することが考えられる。例えば、Kovacs[8]は、斜張橋やガイタワーなどの支持ケーブルが主塔もしくは桁の振動によって変動軸力を受けるときの係数励振振動の発生のメカニズムとその制振対策を検討している。また、藤野ら[7]は歩行者用の斜張橋が、人の歩行によって、桁が水平振動を起こす現象を支持ケーブルの係数励振振動も含めて検討している。

これらの理論的な考察は、サグのない弦に対してであり、ケーブルの力学的特性を十分に評価した取り扱いとはなっていない。また、特定のモードを対象とした1自由度系に限定している。ケーブルは連続体であ

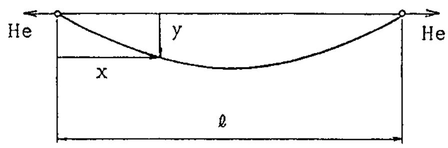
* 工博 長崎大学助教授 工学部土木工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)
** オリエンタル建設(株) (〒812 福岡市中央区天神4丁目1-18 サンビル)
*** 長崎大学学生 工学部土木工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)
**** 工博 (株)片山鉄工所 橋梁技術開発室 (〒551 大阪市大正区南恩加島6-2-21)

り、多自由度系にモデル化した解析が必要であるが、このような研究はまだ行われていない。このために、多自由度系としての解析でのみ得られるモード間の連成振動である結合共振に対する検討はなされていない。

そこで、本論文ではケーブルのサグの影響を考慮した偏平ケーブル(サグ比1/8以下)が、軸方向周期的変動荷重を受ける場合の動的安定性を多自由系として解析する。本研究では、水平ケーブルに限定したか遺跡を行う。数値解析において、ケーブルの不安定領域に及ぼすサグ比および縦波－横波伝播速度比の影響を評価する。

2.運動方程式

Irvineの成書[8]にしたがって、図－1に示すような偏平ケーブルが軸方向周期的変動荷重$H_t \cos \Omega t$を受ける場合の運動方程式を誘導すれば、次のように与えられる。



図－1　ケーブルの一般図

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h\frac{d^2 z}{d x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、m：ケーブルの単位長さあたりの質量、H_e：初期水平張力、H_t：軸方向変動荷重の振幅、Ω：変動水平張力の円振動数、h：付加水平張力、w：たわみ、z：ケーブルの初期形状、t：時間、x：水平方向の座標、また、図－1において、f：ケーブルのサグ。

偏平ケーブルでは、ケーブルの水平方向変位による慣性力を無視することができ、また、ケーブルの形状を放物線 $z=(4f/\ell^2)x(\ell-x)$と仮定することができる。さらに、$x=0,\ell$でケーブルの変位が拘束されていることを考慮すると、ケーブルの活荷重水平張力が次式で与えられる。

$$h = \frac{EA}{L_e}\frac{8f}{\ell^2}\int_0^{\ell} w dx \quad (2)$$

ここに、E：ケーブルのヤング率、A：断面積、$L_e=\ell(1+8\gamma^2)$、$\gamma=f/\ell$：サグ比。

式(1)、および式(2)を用いて、ケーブルの活荷重水平張力 hを消去すれば、次式が得られる。

$$L(w) = m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (H_e + H_t \cos \Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{8f}{\ell^2}\right)^2 \int_0^{\ell} w dx = 0 \quad (3)$$

式(3)より明らかなように、偏平ケーブルでは、逆対称振動の場合$\int_0^{\ell} w dx=0$であるから、ケーブルに伸びは生じない。したがって、偏平ケーブルの逆対称振動の動的安定性はサグのない弦の場合と一致する。また、ケーブルの面外水平方向の運動方程式は、式(3)においてf=0とおいた場合に相当するので、面外振動の動的安定性も弦の場合と一致する。したがって、サグの影響を考慮した解析は、対称振動についてのみ行えばよい。

3.解法

式(2)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \ell \sum_{i=1} T_i(t) W_i(x) \quad (4)$$

ここに、$T_i(t)$：未知の時間関数、$W_i(x)$：境界条件を満足する座標関数。

上式の座標関数 W_iとして、ケーブルの面内振動の固有振動形[8]を用いる。すなわち、

$$W_i = 1 - \tan\frac{\pi \omega_i}{2} \sin \pi \omega_i \xi - \cos \pi \omega_i \xi \quad (5)$$

ここに、$\xi = x/\ell$，ω_i：第i次の無次元固有円振動数($\omega_i = n_i/\pi n_o$，n_i：ケーブルの固有円振動数、

$n_0=\sqrt{H_e}\pi^2/m\ell^2$ ： 弦の1次の固有円振動数)で、次の超越方程式の根で与えられる [8]。

$$\tan\frac{\pi\omega_i}{2}=\frac{\pi\omega_i}{2}-\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\pi\omega_i}{2}\right)^3 \qquad (6)$$

ここに、$\lambda^2=64\gamma^2k^2/(1+8\gamma^2)$, $k=\sqrt{EA/H_e}$ ： ケーブルの縦波－横波伝播速度比。

式(4)を式(3)に代入しても右辺は0にならないので、Galerkin法を適用して、近似解を求める。すなわち

$$\int_0^1 L(w)W_j d\xi=0 \qquad (7)$$

W_iが固有振動形であることを考慮して、式(7)の定積分を実行すると、次式が得られる。

$$\ddot{T}_i+\omega_i^2T_i+\frac{1}{\pi^2}\overline{H}_t\cos\omega\tau\frac{1}{A_{ii}}\sum_{j=1}B_{ij}T_j=0 \qquad (8)$$

ここに、$\overline{H}_t=H_t/H_e$ ： 変動張力の無次元振幅、 $\overline{\omega}=\Omega/n_0$ ： 無次元励振円振動数、 $\tau=n_0t$ ： 無次元時間関数、 $A_{ii}=\int_0^1 W_i^2 d\xi$ ， $B_{ij}=\int_0^1 W_i' W_j' d\xi$。

式(8)は、行列表示を用いて次のように書換えられる。

$$[I]\{\ddot{T}\}+[E]\{T\}+\overline{H}_t\cos\overline{\omega}\tau[F]\{T\}=\{0\} \qquad (9)$$

ここに、$[I]$ ： 単位行列、 $[E]=\mathrm{diag}(\omega_i^2)$ ： 対角行列、 $[F]$ ： 係数励振行列($e_{ij}=B_{ij}/\pi^2A_{ii}$)

式(9)は、連立のMathieuの方程式である [9)-11]。この一般解は次のように仮定することができる [11]。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\left\{\frac{1}{2}\{\mathbb{b}_0\}+\sum_{k=1}(\{\mathbb{a}_k\}\sin k\overline{\omega}\tau+\{\mathbb{b}_k\}\cos k\overline{\omega}\tau)\right\} \qquad (10)$$

ここに、λ ： 未定定数、$\{\mathbb{b}_0\},\{\mathbb{a}_k\},\{\mathbb{b}_k\}$ ： 時間に無関係なベクトル。

式(10)を式(9)に代入して、調和バランス法を適用すれば、次の同次方程式が得られる。

$$([M_0]-\lambda[M_1]-\lambda^2[M_2])\{X\}=\{0\} \qquad (11)$$

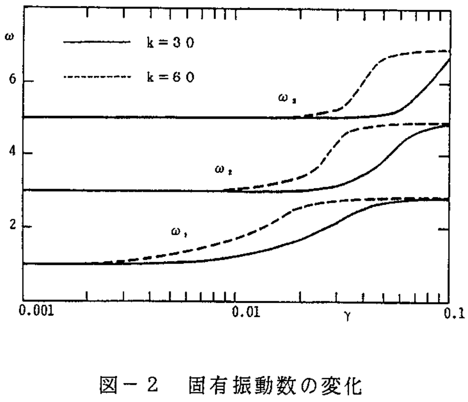
ここに、$[M_0],[M_1],[M_2]$はλの0次、1次および2次の係数行列、$\{X\}$ ： $\{\mathbb{b}_0\},\{\mathbb{b}_k\}$および$\{\mathbb{a}_k\}$からなるベクトル。

いま、$\{Y\}=\lambda\{X\}$という新しいベクトルを導入すれば、式(11)は2倍サイズの行列の固有値問題に変換される。得られた固有値の実数部が1つでも正であれば不安定、すべて負であれば安定、という条件を用いて系の安定性を判別することができる。

4.数値結果

(1)固有振動特性

式(6)から、対称3次振動までの無次元固有振動数ωとサグ比γとの関係を求めると、図－2の結果を得る [8]。ケーブルの対称振動数は、特定のサグ比で増大し、これにともなって振動形が一段階高次の振動形に遷移する。また、振動形の遷移領域は縦波－横波伝播速度比 kによって異なる [1),8]。このようなケーブルの動特性のために、特定のサグ比で固有振動数が接近する。例えば、k=30ではγ=0.04付近で、1次振動と2次振動が接近し、γ=0.06付近で、2次と3次が接近する。結合共振は2つの固有振動数が接近している場合に広くなるので、結合共振の現れ方はサグ比によって異なることが予想される。



図－2　固有振動数の変化

(2)不安定領域の種類

式(9)の係数励振行列[F]の要素構成を調べたところ、全要素が零以外の大きさをもち、また、非対角要素についてf_{ij}とf_{ji}が同じ符号をもつことが判明した。これより、本ケーブルの不安定領域には、単純共振と和形の結合共振が含まれる[12]。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= 2\omega_i/q \text{ 付近に生ずる単純共振} \\ \bar{\omega} &= (\omega_i+\omega_j)/q \text{ 付近に生ずる結合共振} \end{aligned} \tag{12}$$

ここに、q=1 ： 主不安定領域 ，q≧2 ： 副不安定領域(q=2 ： 第2不安定領域、…)。

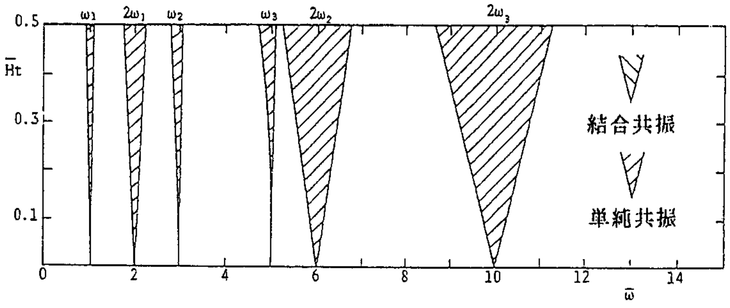
つまり、サグをもつケーブルでは、モード間の連成項が存在するので、多自由度系としての取り扱いが必要である。このため、既往の1自由度系の取り扱いでは不自由分であるといえる。

(3)不安定領域

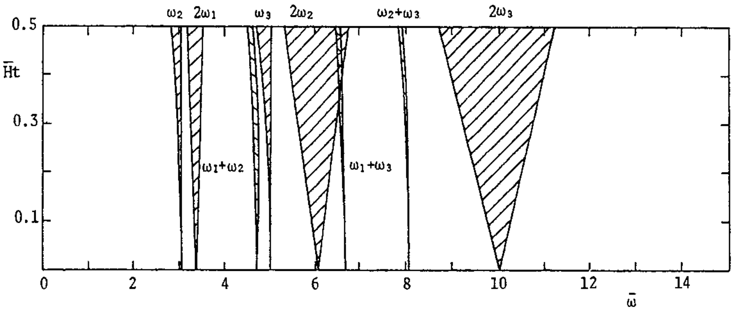
本研究では、自由度を3とした場合(3個の固有振動形を採用)のたわみ振動が生ずる不安定領域を求める。計算に用いたケーブルの3次振動までのサグ比γと固有振動数ω_iとの関係を表－1に示す。無次元変動軸荷重の振幅$\bar{H}_t$=0.5において、不安定領域の幅が0.05以上のものをプロットし0.05以下の幅の狭い不安定領域を省略した 縦波－横波伝播速度比 k=30のケーブル不安定領域をサグ比γ=0.001~0.1の代表例を図－3～8に示す。これらの図において、縦軸$\bar{H}_t$は無次元変動張力の振幅を示し、横軸$\bar{\omega}$は、無次元励振振動数を示す。また、図中の右上がりの斜線部が単純共振の不安定領域を示す。図中に付した記号$2\omega_i$(i=1,2,3)は、単純共振の主不安定領域を示す。また、$\omega_i+\omega_j$は、i次とj次の2つの固有振動形をもった結合共振の主不安定領域を意味する。図－3のサグ比がきわめて小さく弦に近い場合(γ=0.001)には、単純共振の不安定領域$2\omega_i$およびω_iのみが存在する。単純共振の不安定領域の幅は、振動次数が高くなるにつれ

表－1　ケーブルの固有振動数ω_iとサグ比γとの関係
k ：縦波－横波伝播速度比、γ ：サグ比
i ：モード次数

k	30			60		
γ ＼ i	1	2	3	1	2	3
0.001	1.0024	3.0001	5.0000	1.0094	3.0004	5.0001
0.002	1.0094	3.0004	5.0001	1.0371	3.0014	5.0003
0.01	1.2120	3.0093	5.0019	1.6793	3.0447	5.0083
0.02	1.6781	3.0445	5.0083	2.5566	3.4096	5.0462
0.03	2.1830	3.1412	5.0210	2.7779	4.3545	5.2353
0.04	2.5518	3.4023	5.0455	2.8216	4.7851	6.0484
0.05	2.7133	3.8542	5.0967	2.8374	4.8603	6.7290
0.06	2.7754	4.3273	5.2220	2.8450	4.8841	6.8627
0.08	2.8198	4.7724	5.9739	2.8520	4.9013	6.9122
0.1	2.8358	4.8545	6.6810	2.8550	4.9077	6.9251



図－3　ケーブルの不安定領域(γ=0.001,k=30)

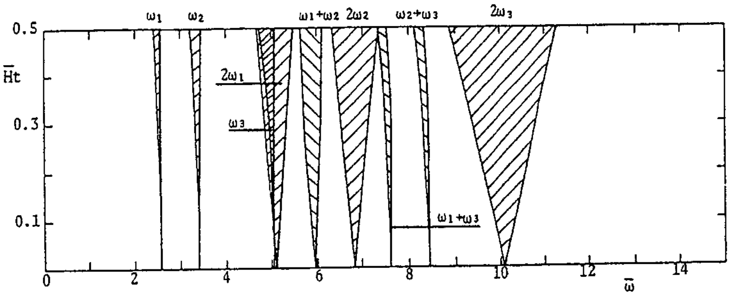


図－4　ケーブルの不安定領域(γ=0.02,k=30)

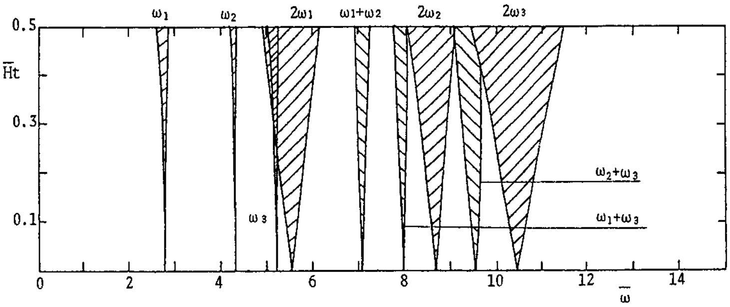
て広くなる特性をもつ。主不安定領域$2\omega_i$の幅が、副不安定領域ω_iよりも広い。

ケーブルとしての特性が現れてくるサグ比γ=0.02以上のケーブルになると、単純共振に加えて、結合共振の主不安定領域$\omega_1+\omega_2$, $\omega_2+\omega_3$および$\omega_1+\omega_3$が現れてくる。結合共振の幅は、サグ比によって変化するが、単純共振の主不安定領域の幅に比べて狭く、単純共振の副不安定領域の幅と同程度である。したがって、サグのあるケーブルには、結合共振は存在するが、その幅は狭い。

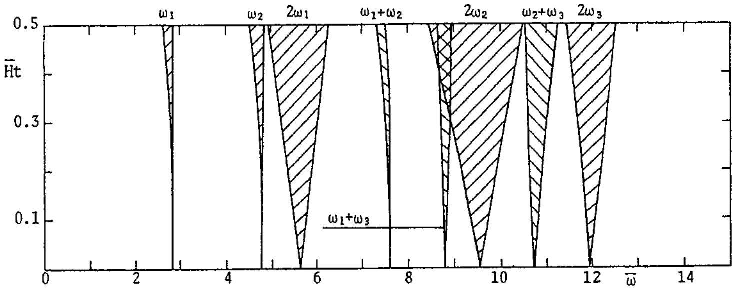
本研究では、対称振動を対象としているが、比較対照のために、逆対称振動の不安定領域の不安定領域を示せば、図－９の結果をえる。図中の記号ω_iは、図－３～８と異なって、逆対称振動のみについて番号をつけた振動次数である。偏平ケーブルの仮定のもとでは、逆対称振動は、サグ比の影響を受けないから、図－９の結果は、サグ比に無関係であり、弦の不安定領域と一致する。不安定領域には、単純共振のみが含まれる。



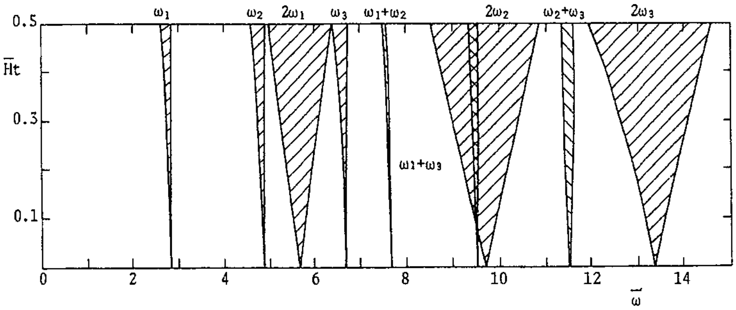
図－５　ケーブルの不安定領域(γ=0.04,k=30)



図－６　ケーブルの不安定領域(γ=0.06,k=30)



図－７　ケーブルの不安定領域(γ=0.08,k=30)

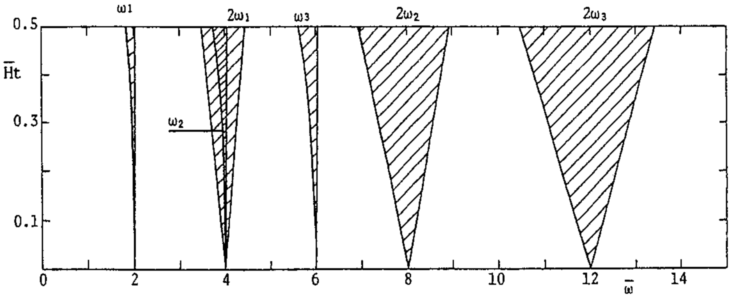


図－８　ケーブルの不安定領域(γ=0.1,k=30)

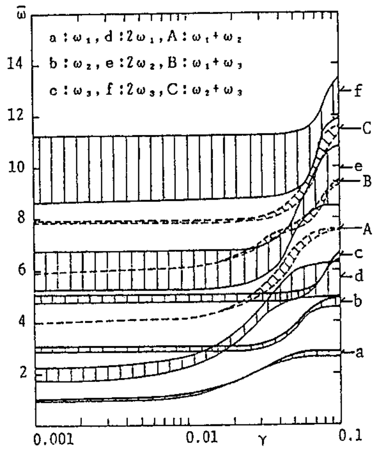
（４）不安定領域に及ぼすサグ比の影響

ケーブルの不安定領域の幅$\bar{\omega}$とサグ比γの関係を明らかにするために、縦波－横波伝播速度比 k=30および

60のケーブルの$\overline{H}_t$=0.5における不安定振動の発生領域$\overline{\omega}$とサグ比γとの関係を求めれば、図－10および11の結果を得る。これらの図から明らかなように、対称振動の不安定領域の幅はサグ比γ、つまり、図－2に示した固有振動特性の変化にともなって変化する。単純共振の主、および副不安定領域は、モードの遷移領域で弦の幅よりも狭くなり、モードの遷移後には、不安定領域の幅は1段階高次振動の不安定領域の幅に近づく($2\omega_1 \to 2\omega_2, 2\omega_2 \to 2\omega_3, \omega_1 \to \omega_2, \omega_2 \to \omega_3$)。一方、結合共振の幅は、特定のサグ比の領域で広くなり、その他のサグ比では狭い。結合共振$\omega_i+\omega_j$の不安定領域が広いサグ比は、図－2の固有振動曲線で明らかなように、2つの固有振動が接近している、つまり、低次側の固有振動形が遷移を起こし、高次側が遷移をまだ始めていないとき、両者の固有振動数が接近する。このようなサグ比の領域で、結合共振の幅が広くなっている。2つの固有振動形がともに遷移を終えた後には、再び2つの固有振動数が離れるので、結合共振の幅は狭くなる。図－2のように縦波－横波伝播速度比 kの影響は、固有振動形の遷移領域に効いてくる。したがって、図－10,11の比較から明らかなように、伝播速度比 kが大きくなると、小さいサグ比の領域で、単純共振および結合共振の幅が変化する。



図－9　ケーブルの不安定領域(逆対称振動)



図－10　ケーブルの不安定領域の幅とサグ比との関係($\overline{H}_t$=0.5,k=30)

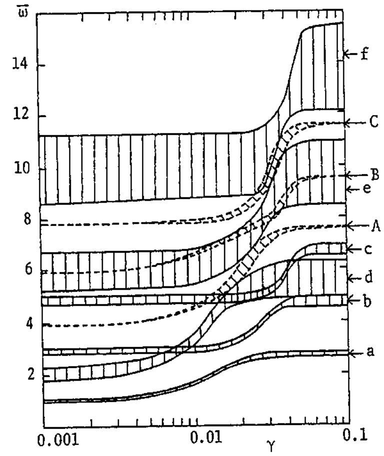
(5)不安定領域に及ぼす減衰の影響

不安定領域に及ぼす減衰の影響を明らかにするために、運動方程式に速度に比例する減衰力を加えた解析を行う。各自由度とも一定の減衰定数 h=0.02を考慮した場合の不安定領域を図－12に示す。減衰の効果は、幅の狭い不安定領域を安定領域に変える。減衰を考慮すると、結合共振は現れなくなり、幅の広い単純共振の主不安定領域のみが卓越する。

5.まとめ

本研究では、変動軸力を受ける偏平ケーブルの動的安定性を微小振動の範囲で多自由度系としてサグ比をパラメーターに解析したものである。得られた結果を要約すると次のとおりである。

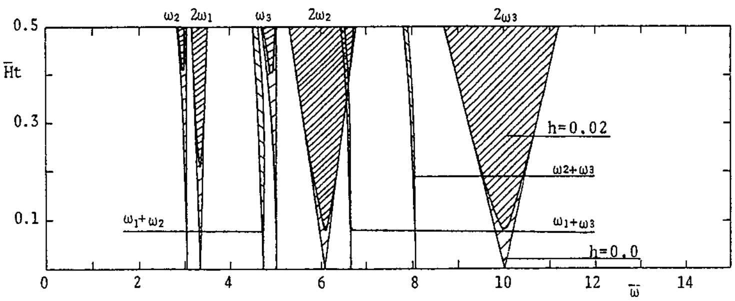
(1)変動軸力を受けるケーブルのたわみ振動が生ずる不安定



図－11　ケーブルの不安定領域の幅とサグ比との関係($\overline{H}_t$=0.5,k=60)

領域には、単一の固有振動形をもつ単純共振と２個の固有振動形をもつ和形の結合共振が存在する。

(２)単純共振の主不安定領域が、結合共振の主不安定領域および単純共振の副不安定領域より広い。



図－12　ケーブルの不安定領域

(減衰定数h=0.02, γ=0.02, k=60)

(３)単純共振の不安定領域の幅は、ケーブルのサグ比によって変化する。単純共振の不安定領域はケーブルの固有振動形の遷移領域で狭くなり、遷移後は１段高次の弦の不安定領域の幅に近づく。

(４)結合共振の不安定領域は、ある次数の固有振動形が遷移を起こし、１次高次の固有振動形がまだ遷移を起こしていないサグ比、すなわち、２個の固有振動形が接近するサグ比をもつケーブルでは広い。

(５)偏平ケーブルでは、面外振動および逆対称振 動の不安定領域は、サグ比の影響を受けない。つまり、弦の不安定領域と一致する。

(６)減衰力を考慮すると、幅の狭い不安定領域を安定にする。幅の広い単純共振のみが存在する。

本研究によって、変動軸力を受けるケーブルの動的安定性の特性が解明された。ケーブルの固有振動特性、減衰特性、非線形振動特性などと同様に、動的不安定領域もサグ比によって特有の挙動を示すことが明らかとなった。安定を失った後の動的応答は非線形項を考慮した取り扱いが必要で、これについては原稿を改めて報告する。なお、本研究の数値計算には、長崎大学総合情報センターのFACOM M-760モデル30を使用したことを付記する。また、本研究には、平成元年度、２年度の文部省科学研究補助金（一般研究（C）、課題番号01550368）を使用したことを付記する。

参考文献

1）山口･伊藤 ：単一ケーブルの三次元線形自由振動，土木学会論文集，第286号，pp.29~36，1979.

2）Yamaguchi,H.and Fujino,Y. : Modal Damping of Flexural Oscillation in Suspended Cables,Proc. of JSCE,No.386/I-8,pp.413~421.1987.

3）山口･宮田･伊藤：正弦波外力を受けるケーブルの時間応答解析，土木学会論文報告集，第308号，pp.37~45，1981.

4）高橋･藤本･村中･田川：調和バランス法によるケーブルの非線形振動解析，土木学会論文報告集，第338号，pp.59~68，1983.

5）高橋･白石･麻生･小西：面内加振を受けるケーブルの面外分岐応答，構造工学論文集，Vol.35A，pp.699~707，1989.

6）Kovacs,I.:Zur Frage der Seilschwingungen und der Seildamping,Die Bautechnik,S9,H10,pp.325~332,1982.

7）Warnitchai,P.･藤野･Pacheco,B.M.･岡本：ケーブル･桁系の線形･非線形連成振動に関する解析と実験、構造工学論文集，Vol.36A，pp.719~732，1990

8）Irvine,H.M.:Cable Structures,The MIT Press,pp.87~99,1981.

9) Bolotin,V.V.:The Dynamic Stability of Elastic Systems,Holden-Day,Inc.,San Fransisco,1964.
10) Nayfeh,A.H.and Mook,D.T.:Nonlinear Oscillations,New York,John Wiley and Sons,1979.
11) Takahashi,K.:Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping,Journal of Sound and Vibration,,Vol.85,pp.257~262,1982.
12) Hsu,C.S.:On the Parametric Excitation of a Dynamic Systems Having Multiple Degrees of Freedom,Journal of Applied Mechanics,Vol.30,pp.367~372,1963.

（平成２年10月12日受付）