Pasternak基礎上の長方形板の動的安定性

DYNAMIC STABILITY OF A RECTANGULAR PLATE ON PASTERNAK FOUNDATION SUBJECTED TO SINUSOIDALLY TIME-VARYING IN-PLANE LOAD

髙橋和雄*　其田智洋**　夏秋義広***
By Kazuo TAKAHASHI, Tomohiro SONODA, Yoshihiro NATSUAKI

The dynamic stability behavior of a rectangular plate on a Pasternak foundation which is an elastic foundation with a rate-independent shear layer interposed between the plate and the foundation under the action of a pulsating in-plane load is studied. The small deflection theory of the thin plate is used. The problem is solved by using a Galerkin method and the harmonic balance method.

Natural frequencies and static buckling load are shown for various boundary conditions and parameters of Pasternak foundation at first. Then,regions of instability which contain simple parametric resonances and conbination resonances are discussed.

1．まえがき

構造物の動的安定性の研究は、これまで数多く研究され、解法および現象も明確になってきている。Applied Mechanics Reviewsにおいて、最近の10年間の研究の総括[1]が行われようとしている。最近の研究の動向として、熱と構造物の相関、複合材料、境界もしくは内部で弾性支持された場合、変断面などの複雑な構造部材や宇宙構造物、動的安定の制振などに拡張されている。著者らは、動的安定問題のほぼ厳密解を満足する解法[2]を提案しており、これを用いて複雑な構造部材の動的安定を解析している[3]。

複雑な構造部材の一例として、Kar[4]は、Pasternak基礎上の変断面片持ちばりに熱勾配がある動的安定性を解析している。しかし、解法としてBolotinの方法[5]を用いて行っているために不安定領域は、単純共振しか得られていない。動的安定問題では、単純共振に加えて結合共振が重要な場合がある。そこで、著者らは、Karの論文の基礎方程式を単純共振および結合共振を同時に求めることが可能な文献2)の方法を用いて解析し、動的不安定領域を明らかにするとともに、解析上のエラーを訂正した[6]。その結果、著者らの方法はこのような複雑な構造物の動的安定解析に容易に適用できることおよび不安定領域には単純共振に加えて結合共振も含まれているので、著者らの方法によらなければ、不安定領域を明らかにできないことを示した。

著者らは、はりに関するKarの問題をより厳密に取り扱うためにPasternak基礎上の変断面片持ち長方形板が熱勾配をもつ場合に拡張することを考えている。本研究は、その第一段階として、Pasternak基礎上の熱

*　工博　長崎大学助教授　工学部社会開発工学科　（〒852 長崎市文教町1-14）
**　長崎大学大学院学生　土木工学専攻　（〒852 長崎市文教町1-14）
***　工博　㈱片山鉄工所　橋梁技術開発室　（〒551 大阪市大正区南恩加島6-2-21）

勾配がない一様断面の長方形板の動的安定性を各種の境界条件、Pasternakのバネおよびせん断層の剛性パラメーターのもとに明らかにする。数値解析において、Pasternak基礎上の長方形板の振動および座屈特性を明らかにし、次いで、動的不安定領域を明らかにする。

2．運動方程式

図-1に示すようなバネとせん断層からなるPasternak基礎上の長方形板がx方向の一様分布の静的面内力と変動面内力を受ける場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$L(w)=D\nabla^4 w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_S w-K_G\nabla^2 w+(N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (1)$$

ここに、$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$：板剛度、E：ヤング率、h：板厚、ν：ポアソン比、w：たわみ、ρ：板の密度、K_S：バネ定数、K_G：せん断層定数、$\nabla^4=(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)^2$、x，y：平板中央面の座標系、$\Omega$：変動面内力の円振動数、t：時間.

板の境界条件は単純支持と固定の組合せからなる次の4種類を考える。

CASEⅠ：全周辺単純支持、CASEⅡ：荷重辺単純支持・他対辺固定、

CASEⅢ：荷重辺固定・他対辺単純支持、CASEⅣ：全周辺固定.

式(1)の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}T_{mn}(t)W_{mn}(x,y) \qquad (2)$$

ここに、T_{mn}：時間関数、W_{mn}：境界条件を満足する座標関数

上式のW_{mn}として、面内力を受けないPasternak基礎上の長方形板の固有振動形を用いる(Appendix A)。各境界条件に応じて次のように表される。

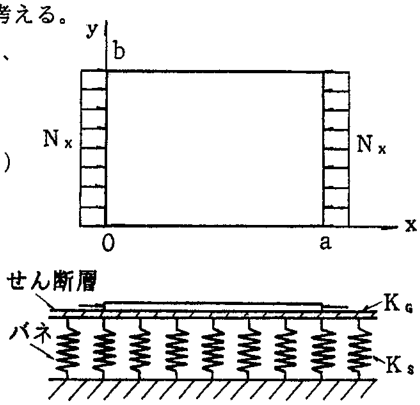

図-1　一般図

$$W_{mn}=\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \quad (\text{CASE I})$$

$$W_{mn}=\sin m\pi\xi\sum_{q=1}a_q^n\{\cos(q-1)\pi\eta-\cos(q+1)\pi\eta\} \quad (\text{CASE II})$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^m\{\cos(p-1)\pi\xi-\cos(p+1)\pi\xi\}\sin n\pi\eta \quad (\text{CASE III}) \qquad (3)$$

$$W_{mn}=\sum_{p=1}a_p^m\{\cos(p-1)\pi\xi-\cos(p+1)\pi\xi\}\sum_{q=1}a_q^n\{\cos(q-1)\pi\eta-\cos(q+1)\pi\eta\} \quad (\text{CASE IV})$$

ここに、$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，a_p^m，a_q^n：固有振動解析から定まる定数

W_{mn}が自由振動の固有振動形であることを考慮すると、次式が成立する。

$$\frac{1}{b^4}D\nabla^4 W_{mn}+K_S W_{mn}-\frac{K_G}{b^2}\nabla^2 W_{mn}=\rho h\,\omega_{mn}^2 W_{mn} \qquad (4)$$

ここに、ω_{mn}：固有円振動数

式(3),(4)を式(1)に代入すると、次式が得られる。

$$L(w)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\{\ddot{T}(\tau)+\frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{11}^{o\,2}}T_{mn}\}W_{mn}-\frac{\pi^2\lambda_b}{k_{11}^{o\,4}\beta^2}(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\xi^2}T_{mn} \qquad (5)$$

ここに、$\lambda_b=N_{cr}b^2/D\pi^2$（座屈固有値)，$k_{11}^o=\lambda_v$の最小値(Pasternak基礎がない場合の1次振動の固有値)，$\bar{\omega}=\Omega/\omega_{11}^o$，$\tau=\omega_{11}^o t$，$\omega_{11}^o$：Pasternak基礎がない場合の1次振動の固有円振動数，$\bar{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$，$\bar{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$，$N_{cr}$：座屈面内力

式(5)にGalerkin法を適用すると、

$$\int_0^1\int_0^1 L(w)W_{ij}\,d\xi\,d\eta=0 \qquad (6)$$

ここに、i=1,2,$\cdots$,L, j=1,2,$\cdots$,L

上式の積分を実行すれば、次式が得られる。

$$[A]\{\ddot{T}\}+[B]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[C]\{T\}=\{0\} \tag{7}$$

ここに、

$A\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=I^{1}_{mnij}$, $B\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=a_{mn}I^{1}_{mnij}$

$C\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=b_1 I^{2}_{mnij}$

$I^{1}_{mnij}=\int_0^1\int_0^1 W_{mn}W_{ij}d\xi d\eta$, $I^{2}_{mnij}=\int_0^1\int_0^1 \dfrac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \xi^2}W_{ij}d\xi d\eta$

$a_{mn}=\dfrac{\omega_{mn}^2}{\omega^{\circ}_{11}{}^2}$, $b_1=-\dfrac{\pi^2\lambda_b}{k^{\circ 4}_{11}\beta^2}$, $\{T\}=\{T_{11}\ \ T_{12}\ \cdots T_{1L}\ \ T_{21}\ T_{22}\cdots T_{LL}\}^T$, β=a/b：縦横比

式(7)に、左辺から[A]の逆行列$[A]^{-1}$を掛けると次式になる。

$$[I]\{\ddot{T}\}+[F]\{T\}+(\bar{N}_{x0}+\bar{N}_{xt}\cos\bar{\omega}\tau)[G]\{T\}=\{0\} \tag{8}$$

ここに、$[F]=[A]^{-1}[B]$, $[G]=[A]^{-1}[C]$

式(8)は連立のMathieuの方程式である。境界条件によっては、式(8)は分離分割して自由度を減らすことも可能である。CASEⅠ,Ⅱの荷重辺が単純支持の場合では[F],[G]が共に対角行列となるために、1自由度系に変換することができる。CASEⅢ,Ⅳの荷重辺が固定の場合では、[F]は対角行列であるが、[G]は非対角要素も零以外の解をもつため多自由度系としての取り扱いが必要である。しかし、CASEⅢ,Ⅳでは、[G]には、零要素が数多く含まれているので、[G]の要素の行と列の並べ替えを行なえば、これをいくつかの非零要素からなる小行列に分割することができる。また、[I]と[G]が対角行列なので、式(8)の微分方程式は複数個に分割することができる(Appendix B)。この処理によって、計算自由度を減らすことができ、かつ不安定領域の種類の判定を容易にすることができる。式(8)の一般解は、次のようのに仮定することができる[2)]。

$$\{T\}=e^{\lambda\tau}\{\frac{1}{2}\mathbb{b}_0+\sum_{k=1}(\mathbb{a}_k\sin k\bar{\omega}\tau+\mathbb{b}_k\cos k\bar{\omega}\tau)\} \tag{9}$$

ここに、λ：未定定数, $\mathbb{b}_0,\mathbb{a}_k,\mathbb{b}_k$：未知のベクトル

式(8)の安定判別は、文献2)の方法を用いて行うことができる。最終的には、次のような2倍サイズの固有値問題に変換される。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{10}$$

ここに、$\{Y\}=\lambda\{X\}$, $\{X\}=\{\mathbb{b}_0\ \ \mathbb{b}_1\ \ \mathbb{b}_2\cdots \mathbb{a}_1\ \ \mathbb{a}_2\cdots\}^T$, $[M_0],[M_1],[M_2]$：係数行列

3．計算パラメーター

本研究で用いる長方形の形状、Pasternak基礎および励振力のパラメーターは、次のとおりである。長方形板の縦横比β、Pasternak基礎上のバネ定数$\kappa_s^*=\kappa_s/\pi^4(\kappa_s=K_s b^4/D)$、せん断層の剛性$\kappa_G^*=\kappa_G/\pi^2(\kappa_G=K_G b^2/D)$、面内力の大きさ$\bar{N}_{x0}$、$\bar{N}_{xt}$および励振振動数$\bar{\omega}$。

4．固有振動特性

図-2,3に、Pasternak基礎上の周辺単純支持正方形板(CASEⅠ,β=1.0)の固有振動特性を示す。図-2,3

の縦軸ωは、無次元円振動数($\varkappa_s^*=\varkappa_G^*=0$のときの1次の固有円振動数で無次元化)で、横軸$\varkappa_s^*$, $\varkappa_G^*$は、それぞれPasternak基礎の剛性パラメーターである。剛性パラメーター$\varkappa_s^*$と$\varkappa_G^*$の大きさは、文献4)の計算例と同じ大きさを採用している。図中に記入した記号M, Nは正方形板のx方向とy方向の半波数を意味する。$\varkappa_G^*=0$はせん断層がないWinkler基礎に相当する。図-2, 3から明らかなように、$\varkappa_s^*$と$\varkappa_G^*$はともに固有振動数を増加させる。振動次数が高次になるにつれて$\varkappa_s^*$の効果は小さくなるが、$\varkappa_G^*$の効果は逆にやや大きくなる。境界条件に固定が入ってくると、平板の剛性が増大してくるために、Pasternak基礎の剛性の効果は小さくなる。また、Pasternak基礎の存在は、平板の固有振動形にほとんど影響を与えないことを確認している。したがって、Pasternak基礎上の長方形板の振動解析の収束は、基礎がない場合の長方形板の解析と同程度で、解析上の問題はない。

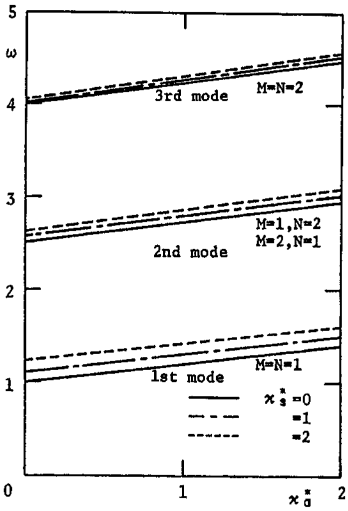

図-2 固有振動数ωとせん断層剛性$\varkappa_G^*$との関係(CASE I, $\beta=1$)

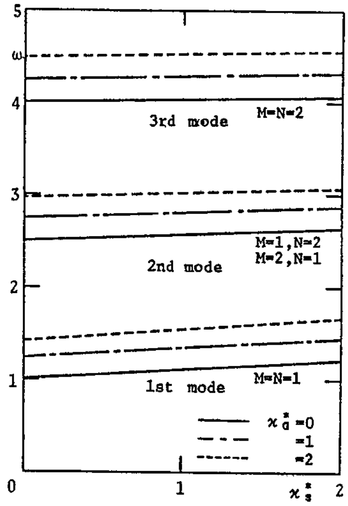

図-3 固有振動数ωとバネ定数$\varkappa_s^*$との関係(CASE I, $\beta=1$)

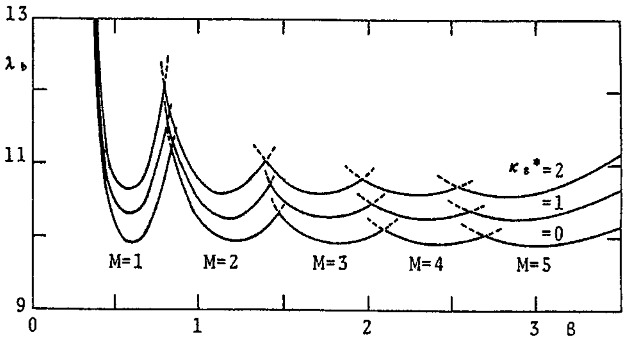

図-4 座屈固有値λ_bと縦横比βとの関係(CASE II, $\varkappa_G^*=2.0$)

5. 座屈解析

図-4のPasternak基礎上の長方形板(CASE II)の座屈曲線は、Pasternak基礎がない長方形板($\varkappa_s^*=\varkappa_G^*=0.0$)と同じ特性を示す。図-5に最小座屈固有値$\lambda_{bmin}$とバネ定数$\varkappa_s^*$との関係をせん断層の剛性$\varkappa_G^*$をパラメーターに示す。$\varkappa_s^*$および$\varkappa_G^*$の効果は長方形板の座屈荷重を増大させる効果をもつ。振動の場合と同様に、Pasternak基礎の存在は、平板の座屈波形にほとんど影響を与えない。

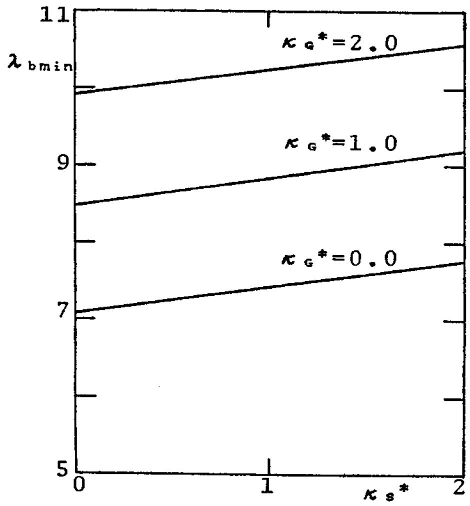

図-5 最小座屈固有値λ_{bmin}とバネ定数$\varkappa_s^*$の関係(CASE II)

6. 不安定領域

動的不安定領域の種類は、式(8)の要素構成[G]によって定まる。Pasternak基礎の剛性は、固有振

動数を規定する行列[F]に影響を及ぼすが、固有振動形には、ほとんど影響を及ぼさないことがわかっている。[G]は、Pasternak基礎の有無によってほとんど変化しない。以上の事実から、Pasternak基礎上の長方形板の不安定領域の種類は、Pasternak基礎がない長方形板の場合と同じである[7]。すなわち、CASE I，IIでは単純共振のみが存在し、CASE III，IVでは単純共振の他に和型の結合共振が存在する。この場合、結合共振は、特定の自由度の組合せによって生ずる。結合共振$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k$は、CASE IIIでは、i+m=偶数、j=nであり、CASE IVでは、i+m=偶数、j+n=偶数の関係をもつ場合について存在する。

図-6，7，8，9は、全周辺単純支持(CASE I)、荷重辺単純支持・他対辺固定(CASE II)、荷重辺固定・他対辺単純支持(CASE III)の正方形板($\beta=1$)と全周辺固定(CASE IV)の長方形板($\beta=1.5$)の不安定領域を$\kappa_s^*=2.0$, $\kappa_G^*=2.0$の場合に対して示した結果である。図中の縦軸はPasternak基礎がない場合の座屈荷重で無次元化した変動面内力の振幅$\bar{N}_{xt}$を、横軸は静的面内力$\bar{N}_{x0}=0$ときの1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数$\bar{\omega}$である。図中の右上がりの斜線部が単純共振$2\omega_{ij}/k$の不安定領域を意味する。ここに、k=1を主不安定領域と呼び、k≧2を副不安定領域と呼ぶ。図-8，9中の右下がりの斜線部

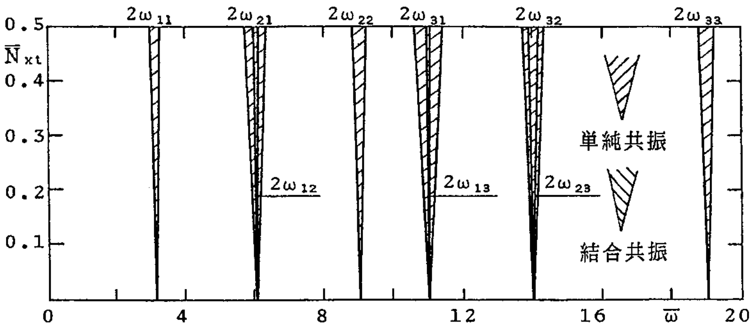

図-6 不安定領域(CASE I，$\beta=1.0$，$\kappa_s^*=2.0$，$\kappa_G^*=2.0$)

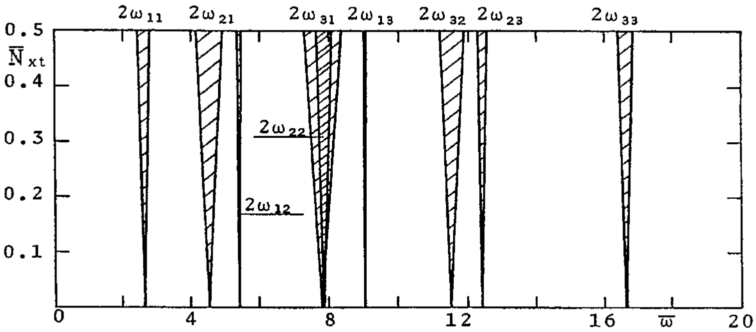

図-7 不安定領域(CASE II，$\beta=1.0$，$\kappa_s^*=2.0$，$\kappa_G^*=2.0$)

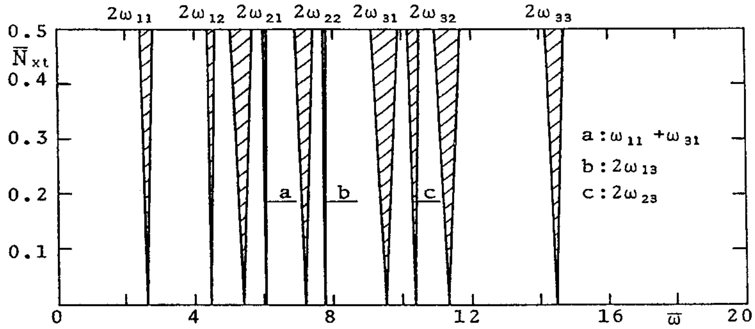

図-8 不安定領域(CASE III，$\beta=1.0$，$\kappa_s^*=2.0$，$\kappa_G^*=2.0$)

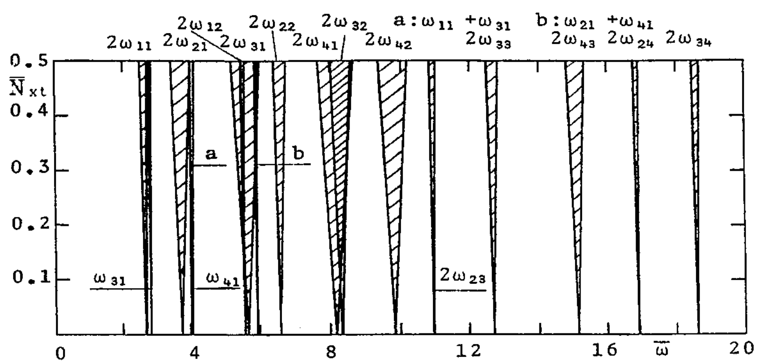

図-9 不安定領域(CASE IV，$\beta=1.5$，$\kappa_s^*=2.0$，$\kappa_G^*=2.0$)

が結合共振$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k$の不安定領域を意味する。

CASEⅣでは、β=1.0の正方形板では無次元固有振動数ωが重根となって得られるために不安定領域が重なるものが存在する。本論文では、不安定領域を表示しやすいβ=1.5の長方形板を用いた。これらの図に示すとおり、単純共振の主不安定領域$2\omega_{ij}$が卓越する。また、CASEⅢ,Ⅳでは、結合共振の主不安定領域$\omega_{ij}+\omega_{mn}$が得られているが、その幅は、単純共振よりも狭い。

図-10,11に、CASEⅠの正方形板について、Winkler基礎(κ_G^*=0.0)とPasternak基礎(κ_G^*=2.0)の２ケースについて、変動面内力$\bar{N}_x$=0.5における不安定領域の幅$\bar{\omega}$と弾性基礎のバネ定数κ_s^*との関係を示す。不安定領域の幅はPasternak基礎(κ_G^*≠0.0)の方が狭く、κ_s^*の増大に伴って不安定領域の幅は狭くなる。つまり、Pasternak基礎の剛性κ_s^*, κ_G^*は不安定領域を狭くする効果をもつ。

図-12,13にCASEⅢの不安定領域の幅$\bar{\omega}$と弾性基礎のバネ定数κ_s^*との関係を示す。CASEⅢはCASEⅠよりも境界の拘束度が高いために、κ_s^*およびκ_G^*の効果は小さくなる。このために、不安定領域の幅$\bar{\omega}$は、バネ定数κ_s^*の変化によってあまり変動しない。

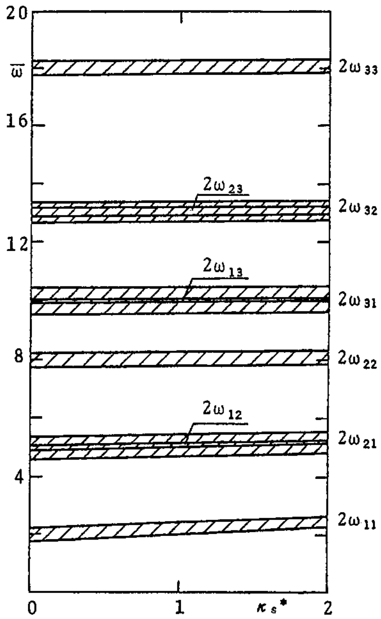

図-10 不安定領域$\bar{\omega}$とバネ定数κ_s^*との関係 (CASEⅠ, β = 1.0, κ_G^*=0.0)

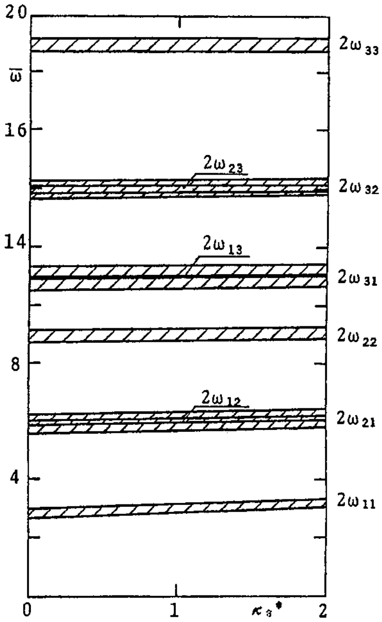

図-11 不安定領域$\bar{\omega}$とバネ定数κ_s^*との関係 (CASEⅠ, β = 1.0, κ_G^*=2.0)

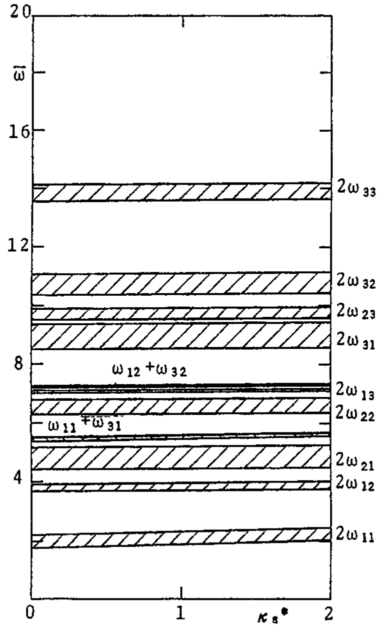

図-12 不安定領域$\bar{\omega}$とバネ定数κ_s^*との関係 (CASEⅢ, β = 1.0, κ_G^*=0.0)

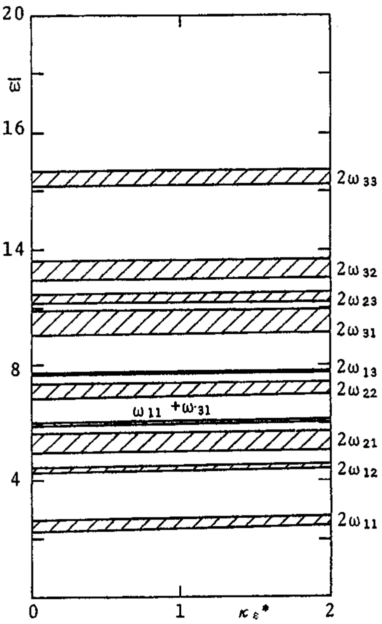

図-13 不安定領域$\bar{\omega}$とバネ定数κ_s^*との関係 (CASEⅢ, β = 1.0, κ_G^*=2.0)

7．まとめ

本研究は、Pasternak基礎上の一様断面を持つ長方形板の振動、座屈特性および動的安定性を明らかにしたものである。得られた結果をまとめると、

（１）Pasternak基礎の特性は、バネとせん断層剛性の２つのパラメーターで表される。これらの２つのパラメーターは、構造全体の剛性を高める効果をもつ。

（２）Pasternak基礎のパラメーターは、長方形板の固有振動数に影響を及ぼす。バネの効果は振動次数が増大するにつれて小さくなる。一方、せん断層の剛性は振動次数が増大するにつれて大きくなる。固有振動形はあまり変化しない。

（３）Pasternak基礎上の長方形板の座屈特性は、基礎がない場合と同じ特性を示す。Pasternak基礎上のパラメーターは座屈荷重を増加させる。

（４）Pasternak基礎上の長方形板の動的不安定領域の種類は、Pasternak基礎がない場合と同じである。荷重辺が単純支持の長方形板の場合には、単純共振のみ存在する。荷重辺が固定である長方形板の場合には単純共振のほかに結合共振も存在する。しかし、結合共振は単純共振に比べて不安定領域の幅は狭い。また、Pasternak基礎の剛性は不安定領域の生ずる振動を上昇させ、不安定領域の幅を狭くする。Pasternak基礎上の長方形板の不安定領域は、せん断層がないWinkler基礎の場合よりも狭くなる。

本論文のによって、Pasternak基礎上の長方形板の動的安定性を明らかにすることができた。今後、熱勾配をもつPasternak基礎上の変断面長方形板の動的安定解析に応用する予定である。

Appendix A　固有振動解析

式（１）において、$N_{xt}=0$とおけば一定の面内力を受けるPasternak基礎上の長方形板の運動方程式が得られる。このときの、式（１）の振動の運動方程式の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{k=1}\sum_{\ell=1} A_{k\ell}\overline{W}_{k\ell}(x,y)e^{i\omega t} \qquad \text{(A-1)}$$

ここに、ω：固有円振動数、$\overline{W}_{k\ell}$：境界条件を満足する座標関数、$A_{k\ell}$：未定定数

式(A-1)の$\overline{W}_{k\ell}$として、次の関数を用いる。

$$\overline{W}_{k\ell}=h_k(\xi)\overline{h}_\ell(\eta) \qquad \text{(A-2)}$$

$h_k(\xi)=\sin k\pi\xi$ (CASE Ⅰ, Ⅱ), $h_k(\xi)=\cos(k-1)\pi\xi-\cos(k+1)\pi\xi$ (CASE Ⅲ, Ⅳ)

$\overline{h}_\ell(\eta)=\sin \ell\pi\eta$ (CASE Ⅰ, Ⅲ), $\overline{h}_\ell(\eta)=\cos(\ell-1)\pi\eta-\cos(\ell+1)\pi\eta$ (CASE Ⅱ, Ⅳ)

ここに、$\xi=x/a$, $\eta=y/b$

式(A-2)を式(A-1)に代入すれば次式が得られる。

$$L(w)=\sum_{k=1}\sum_{\ell=1} A_{k\ell}\{(\frac{1}{\beta^4}f_k\overline{h}_\ell+\frac{2}{\beta^2}g_k\overline{g}_\ell+h_k\overline{f}_\ell)+\kappa_s{}^*h_k\overline{h}_\ell+\kappa_G{}^*(\frac{1}{\beta^2}g_k\overline{h}_\ell+h_k\overline{g}_\ell)-\overline{N}_{x0}\frac{1}{\beta^2}g_k\overline{h}_\ell$$
$$-\lambda_v{}^4h_k\overline{h}_\ell\}e^{i\omega t}=0 \qquad \text{(A-3)}$$

ここに、$g_k(\xi)=k^2\sin k\pi\xi$ (CASE Ⅰ, Ⅱ), $g_k(\xi)=(k-1)^2\cos(k-1)\pi\xi-(k+1)^2\cos(k+1)\pi\xi$ (CASE Ⅲ, Ⅳ)

$f_k(\xi)=k^4\sin k\pi\xi$ (CASE Ⅰ, Ⅲ), $f_k(\xi)=(k-1)^4\cos(k-1)\pi\xi-(k+1)^4\cos(k+1)\pi\xi$ (CASE Ⅱ, Ⅳ)

$\beta=a/b$, $\kappa_s{}^*=K_sb^4/D\pi^4$, $\kappa_G{}^*=K_Gb^2/D\pi^2$, $\lambda_v=\sqrt[4]{\rho hb^4/D\pi^4}$, $\overline{N}_{x0}=N_{x0}b^2/D\pi^2$

式(A-3)にGalerkin法を適用する。すなわち、

$$\iint L(w)h_r\overline{h}_s d\xi d\eta=0 \qquad \text{(A-4)}$$

ここに、$r=1,2,\cdots,L$,　$s=1,2,\cdots,L$

上式の定積分を実行すると、次式が得られる。

$$\sum_{k=1}\sum_{\ell=1}[E_{kr\ell s}-\overline{N}_{x0}F_{kr\ell s}-\lambda_v{}^4G_{kr\ell s}]=0 \qquad \text{(A-5)}$$

ここに、$E_{kr\ell s}=\dfrac{1}{\beta^4}I^3{}_{kr}I^1{}_{\ell s}+\dfrac{2}{\beta^2}I^2{}_{kr}I^2{}_{\ell s}+I^1{}_{kr}I^3{}_{\ell s}+\varkappa_s{}^*I^1{}_{kr}I^1{}_{\ell s}+\varkappa_G{}^*(\dfrac{1}{\beta^2}I^2{}_{kr}I^1{}_{\ell s}+I^1{}_{kr}I^2{}_{\ell s})$,

$F_{kr\ell s}=\dfrac{1}{\beta^2}I^2{}_{kr}I^1{}_{\ell s}$, $G_{kr\ell s}=I^1{}_{kr}I^1{}_{\ell s}$

式(A-5)は次のように行列表示される。

$$([E]-\overline{N}_{x0}[F]-\lambda_v{}^4[G])\{X\}=\{0\} \qquad \text{(A-6)}$$

$[E]:E\{s+(r-1)L,\ell+(k-1)L\}$, $[F]:F\{s+(r-1)L,\ell+(k-1)L\}$, $[G]:G\{s+(r-1)L,\ell+(k-1)L\}$

$\{X\}:\{A_{11}\ A_{12}\ \cdots A_{1L}\ A_{21}\ A_{22},\ \cdots A_{LL}\}^T$

$\overline{N}_{x0}=0$とおけば、自由振動の固有値λ_vが得られる。また、$\lambda_v=0$とおけば、$\overline{N}_{x0}=\lambda_b$の座屈の固有値が得られる。数値解析において、式(A-6)は行列の固有値問題に変換される。ベクトル$\{X\}$を用いて、x，y方向の半波数m，nをもつ場合の振動波形を得ることができる。

Appendix B CASEⅢとⅣの運動方程式の分割

Galerkin法の積分より、式(８)の行列[G]の3/4は零要素からなる。行列[G]の行と列の入替え、すなわち、{T}の自由度を並べ替えることによって、式(８)は複数個の微分方程式に分割することができる。

CASEⅢの場合：y方向の半波数が正弦波で与えられるために、y方向の半波数については連成がない。このために、式(８)はy方向の半波数nごとにL個に分割される。

$$[I]\{\ddot{T}_n\}+[F_n]\{T_n\}+(\overline{N}_{x0}+\overline{N}_{xt}\cos\overline{\omega}\tau)[G_n]\{T_n\}=\{0\} \qquad \text{(B-1)}$$

ここに、$[I],[F_n],[G_n]$：L×Lの行列，$\{T_n\}=\{T_{1n}\ T_{2n}\cdots T_{Ln}\}^T$.

CASEⅣの場合：x，y方向とも正弦波で与えられないために、x，y方向の半波数で分割することができない。この場合、並べ替え操作によって、式(８)は次の４個に分割される。

$$[I]\{\ddot{T}_i\}+[F_i]\{T_i\}+(\overline{N}_{x0}+\overline{N}_{xt}\cos\overline{\omega}\tau)[G_i]\{T_i\}=\{0\} \qquad \text{(B-2)}$$

ここに、$[I],[F_i],[G_i]$：$L^2/4\times L^2/4$の行列，i=1,2,3,4.

$\{T_1\}=\{T_{11}\ T_{13}\cdots T_{31}\ T_{33}\cdots\}^T$, $\{T_2\}=\{T_{12}\ T_{14}\cdots T_{32}\ T_{34}\cdots\}^T$,

$\{T_3\}=\{T_{21}\ T_{23}\cdots T_{41}\ T_{43}\cdots\}^T$, $\{T_4\}=\{T_{22}\ T_{24}\cdots T_{42}\ T_{44}\cdots\}^T$.

２つの自由度の組合せT_{ij}とT_{mn}において、i+m=偶数、j+n=偶数となるような組み合わせで分割される。

参考文献

1)Zavodaney,L.D.：Harmonic Parametric Vibration･･･A Decade, Applied Mechanics Reviews(to appear)

2)Takahashi,K.：Instability of Parametric Dynamic Systems with Non-uniform Damping,Journal of Sound and Vibration,Vol.85,pp.257~262,1982.

3)高橋・其田・小西：熱勾配をもつ先端弾性支持変断面片持ちばりの動的安定性,長崎大学工学部研究報告,第21巻,第36号,pp.35~41,1991.

4)Kar,R.C.and Sujata,T.：Parametric Instability of a Non-uniform Beam with Thermal Gradient Resting on a Pasternak Foundation,Computer & Structures,Vol.29,No.4,pp.591~599,1988.

5)Bolotin,V.V.：The Dynamic Stability of Elastic Systems,Holden-Day Inc.San Francisco,pp.382~398,1964.

6)高橋・白木・其田：Pasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定性,長崎大学工学部研究報告,第22巻,第37号,pp.211~217,1991.

7)八巻・永井：周期的な圧縮荷重をうける矩形板の動的安定,東北大学高速力学研究所報告,第36巻,第351号,pp.168~147,1975.

(1991年９月30日受付)