構造工学論文集 Vol. 39 A (1993年3月) 土木学会

対称積層長方形板の動的安定性

Dynamic Stability of a Symmetrically Laminated Rectangular Plate

江島裕章*・横山貴浩**・高橋和雄***・夏秋義広****

By Hiroaki ESHIMA, Takahiro YOKOYAMA, Kazuo TAKAHASHI, Yoshihiro NATSUAKI

Vibration, buckling and dynamic stability of a symmetrically laminated rectangular plate are reported for various boundary conditions, fiber orientations of laminas and configuration of a laminate in this paper. This problem is solved by using a Galerkin method and the harmonic balance method.

At first, vibration and buckling properties are shown for three different materials, various boundary conditions and fiber orientations. Then, dynamic unstable regions are obtained and compared with that of isotropic square plate.

まえがき

近年、複合材料は異なる材料を組み合わせることで、目的に応じた材料を得ることができるため、多くの分野で利用されている[1]。特に、FRP(繊維強化プラスチック)は比強度、比剛性および軽量性に優れているため、FRPの積層板は各分野において利用が増加している。しかし、FRPの積層板は従来の等方性材料と違い、力学的にも強い異方性を示すため、その取り扱いは複雑なものとなる。最近の研究により、このような積層板に関しては、力学的特性がかなり明らかにされている[2][3][4][5]。しかし、動的安定性に関しては、研究が十分でなく、単純共振を取り扱ったBertらの研究[6]が見受けられる。結合共振まで取り扱った研究はないようである。

本研究では、積層長方形板の動的安定性を解明する第一段階として、各層の材質、板厚および繊維方向が中央面に関して対称である積層板(対称積層板)を対象とし、曲げモーメントとねじりモーメントのカップリング効果の影響を無視した場合の動的安定解析を行う。一方向から静的と動的な項からなる面内力が作用する積層板の運動方程式にGalerkin法による近似解法を適用する。動的安定性は構造物の固有振動特性と座屈特性によって規定されるために、まず固有振動特性および座屈特性(全体座屈)を明らかにし、次いで動的不安定領域を明らかにする。

* 長崎大学大学院学生 土木工学専攻 (〒852 長崎市文教町1-14)
** 西日本菱重興産(株) (〒850-91 長崎市飽の浦町5-3)
*** 工博 長崎大学教授 社会開発工学科 (〒852 長崎市文教町1-14)
**** 工博 片山ストラテック(株) 橋梁設計課 (〒551 大阪市大正区南恩加島6-2-21)

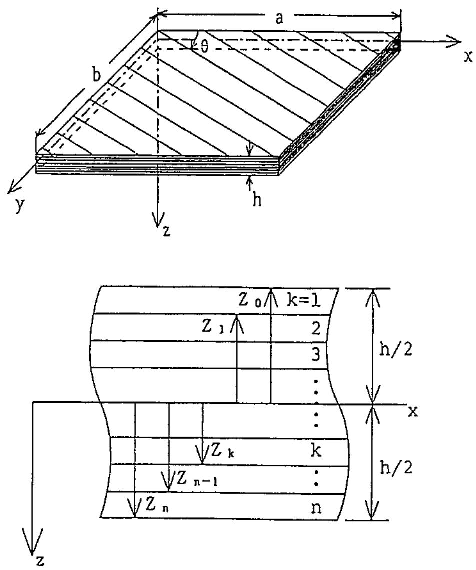
動的安定解析においては、現時点で最も厳密解に近く、かつ汎用性のある著者らによって提案された方法を採用する[7)]。また、時間に関する一般座標に変換する際に、積層板の固有振動形を試行関数として用いる。構造部材の剛性は材質、断面の変化などによって複雑な表示となるが、慣性力の項は比較的簡単な形で表わされる。したがって、慣性力の項を用いて剛性の項を表示すると、解析が容易になるばかりではなく、材質、断面の変化を特に意識しないで、動的安定解析を行うことができる。剛性の影響は固有振動数、座屈荷重および固有振動形に反映されているので、このような取り扱いが可能となる。

数値計算では、異方性の違う材料を用いて積層長方形板の固有振動数、座屈固有値および動的不安定領域を明らかにする。これらの力学的特性を、各種の境界条件および繊維角度のもとに明らかにする。

2．運動方程式および解法

(1) 積層板の曲げ剛性[8)]

直交異方性を示す FRPの単層板を重ね合わせた積層板を解析するためには、積層理論に基づいて板全体の曲げ剛性を決定することが必要である。そこで、図－１のように、n層からなる各層の材質、板厚および繊維方向が中央面に関して対称な長方形板を考える。ここで、各単層板は完全に接着されて滑りを起こさないものとし、積層板は薄板の性質を有するものとする。また、面外せん断変形を無視して考える。いま、中央面からZ_{k-1}離れたk番目の層について考える。x軸と単層板の繊維方向のなす角度をθとすると、材料の主軸方向における応力－ひずみの関係は文献8)により次式のように与えられる。



図－1　一般図

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0\\ Q_{12}&Q_{22}&0\\ 0&0&Q_{66}\end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{Bmatrix}_k \qquad (1)$$

ここに、$Q_{11}=E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21})$、$Q_{22}=E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21})$、$Q_{12}=\nu_{21}Q_{11}=\nu_{12}Q_{22}$、$Q_{66}=G_{12}$、

E_1, E_2：材料の主軸方向の縦弾性係数、G_{12}：横弾性係数、ν_{12}, ν_{21}：ポアソン比

積層板の繊維角度θが中央面対称である場合、曲げモーメントと曲率の関係は次式のようになる。

$$\begin{Bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

ここで、積層板全体の曲げ剛性D_{ij}は次式のように表わすことができる。

$$D_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\overline{Q}_{ij}^{(k)}(Z_k^3-Z_{k-1}^3) \qquad (3)$$

ここに、$\overline{Q}_{ij}$は式(1)のQ_{ij}をx－y座標系に変換したもので、次のようになっている。

$\overline{Q}_{11}=Q_{11}c^4+2(Q_{12}+2Q_{66})s^2c^2+Q_{22}s^4$、$\overline{Q}_{12}=(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})s^2c^2+Q_{12}(s^4+c^4)$、

$\overline{Q}_{22}=Q_{11}s^4+2(Q_{12}+2Q_{66})s^2c^2+Q_{22}c^4$、$\overline{Q}_{16}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})sc^3+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})s^3c$、

$\overline{Q}_{26}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})s^3c+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})sc^3$、$\overline{Q}_{66}=(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})s^2c^2+Q_{66}(s^4+c^4)$、 s=sinθ、c=cosθ、θ：単層板の繊維角度

（２）運動方程式および境界条件

図－１に示す積層長方形板に対して、$x=0$, a の辺に x 方向の一様分布した静的面内力 N_{x0} と変動面内力 $N_{xt}\cos\Omega t$ が作用する場合を考える。また、本研究では積層板の積層数の数が多い場合を対象とし、式(２)の曲げモーメントとねじりモーメントの間のカップリング項(D_{16}, D_{26})を無視した解析を行う。このような取り扱いによって、積層板の基本的な性質を明らかにすることができる。この積層板に作用する力のつり合いを考えると、運動方程式は次式で与えられる[8]。

$$L(w)=D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+(N_{x0}+N_{xt}\cos\Omega t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (4)$$

ここに、$D_1=D_{11}$, $D_2=D_{22}$, $D_3=D_{12}+2D_{66}$：板剛度、N_{x0}：静的面内力、N_{xt}：変動面内力の振幅、Ω：変動面内力の円振動数、w：たわみ、x, y：平板中央面の座標系、t：時間、ρ：板の密度、h：板厚

長方形板の境界条件には、１対辺が単純支持と固定の組合せからなる次の４種類を考える。

CASEⅠ：全周辺単純支持

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\ (x=0,\ a)、\quad w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\ (y=0,\ b) \qquad (5-a)$$

CASEⅡ：荷重辺単純支持,他対辺固定

$$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\ (x=0,\ a)、\quad w=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0\ (y=0,\ b) \qquad (5-b)$$

CASEⅢ：荷重辺固定,他対辺単純支持

$$w=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0\ (x=0,\ a)、\quad w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\ (y=0,\ b) \qquad (5-c)$$

CASEⅣ：全周辺固定

$$w=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0\ (x=0,\ a)、\quad w=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}=0\ (y=0,\ b) \qquad (5-d)$$

（３）解法

式(４)の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{m=1}\sum_{n=1}T_{mn}(t)W_{mn}(x,y) \qquad (6)$$

ここに、T_{mn}：時間関数、W_{mn}：境界条件を満足する座標関数

式(６)の W_{mn} を自由振動の固有振動形と仮定すると次式が成り立つ(Appendix A)。

$$\frac{D_1^*}{\beta^4}\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial\xi^4}+\frac{2D_3^*}{\beta^2}\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+D_2^*\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial\eta^4}=\rho h\frac{b^2}{D_1^\circ}\omega_{mn}^2 W_{mn} \qquad (7)$$

ここに、$\xi=x/a$, $\eta=y/b$、$\beta=a/b$(縦横比)、$D_1^*=D_1/D_1^\circ$、$D_2^*=D_2/D_1^\circ$、$D_3^*=D_3/D_1^\circ$、D_1°：D_1 の $\theta=0°$ における板剛度、ω_{mn}：固有円振動数

また、式(６)を式(４)に代入して、式(７)の関係を用いると次式が得られる。

$$L(w)=\sum_{m=1}\sum_{n=1}\left[\left(\ddot{T}_{mn}+\frac{\omega_{mn}^2}{\omega_{11}^{\circ 2}}T_{mn}\right)W_{mn}+\frac{\pi^2\lambda_{cr}}{k_{11}^{\circ 4}\beta^2}(\overline{N}_{x0}+\overline{N}_{xt}\cos\overline{\omega}\tau)\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\xi^2}T_{mn}\right] \qquad (8)$$

ここに、$\tau=\omega_{11}^\circ t$、$\overline{\omega}=\Omega/\omega_{11}^\circ$、$\overline{N}_{x0}=N_{x0}/N_{cr}$、$\overline{N}_{xt}=N_{xt}/N_{cr}$、$\lambda_{cr}=N_{cr}b^2/D_1^\circ\pi^2$、$N_{cr}$：座屈面内力、$k_{11}^\circ=\sqrt[4]{\rho hb^4\omega_{11}^{\circ 2}/D_1^\circ}$、$k_{11}^\circ$：$\theta=0°$ の１次の振動固有値、ω_{11}°：$\theta=0°$ の１次の固有円振動数

式(８)には積層板の板剛度は含まれていない。したがって、これ以降の取り扱いは等方性板の解析と全く同じとなる。積層板の影響は W_{mn} および ω_{mn} に含まれている。また、式(６)は仮定した解であり、式(４)の厳密解ではない。したがって、式(８)にGalerkin法を適用すると、次式が得られる。

$$[I]\{\ddot{T}\}+[F]\{T\}+(\overline{N}_{x0}+\overline{N}_{xt}\cos\overline{\omega}\tau)[G]\{T\}=\{0\} \tag{9}$$

ここに、$\{T\}=\{T_{11}T_{12}\cdots T_{1L}T_{21}T_{22}\cdots T_{LL}\}^T$、$[F]=[A]^{-1}[B]$、$[G]=[A]^{-1}[C]$、

$A\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=I^1{}_{mnij}$、$B\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=\alpha_{mn}I^1{}_{mnij}$、

$C\{j+(i-1)L,n+(m-1)L\}=\gamma I^2{}_{mnij}$、$\alpha_{mn}=\omega_{mn}{}^2/\omega_{11}^0$、$\gamma=\pi^2\lambda_{cr}/k_{11}^{0\,4}\beta^2$、

$I^1{}_{mnij}=\int_0^1\int_0^1 W_{mn}W_{ij}\,d\xi\, d\eta$、$I^2{}_{mnij}=\int_0^1\int_0^1 \dfrac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\xi^2}W_{ij}\,d\xi\, d\eta$

3．動的安定解析

式(9)は連立のMathieuの方程式であり、その一般解は次式のように仮定することができる[7]。

$$\{T\}=e^{\lambda\overline{\tau}}\{\frac{1}{2}\mathbb{b}_0+\sum_{k=1}(\mathbb{a}_k\sin k\overline{\tau}+\mathbb{b}_k\cos k\overline{\tau})\} \tag{10}$$

ここに、$\overline{\tau}=\overline{\omega}\tau$、$\lambda$：未定定数、$\mathbb{b}_0$，$\mathbb{a}_k$，$\mathbb{b}_k$：未知のベクトル

式(10)を式(9)に代入して、調和バランス法を適用すると、未知のベクトルを求めるための同次方程式が得られる。これは2倍サイズの固有値問題に変換して解くことができる。

$$\begin{bmatrix} [0] & [I] \\ [M_2]^{-1}[M_0] & -[M_2]^{-1}[M_1] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \tag{11}$$

ここに、$[M_0]$,$[M_1]$,$[M_2]$：係数行列、$\{Y\}=\lambda\{X\}$、$\{X\}=\{\mathbb{b}_0\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2\cdots\mathbb{a}_1\mathbb{a}_2\cdots\}^T$

式(11)は非対称行列の固有値問題の基礎式である。得られた固有値の実数部の値が全て負ならば、式(10)の一般解に含まれている$e^{\lambda\overline{\tau}}$が時間とともに収束するために安定、逆に一つでも正ならば$e^{\lambda\overline{\tau}}$が発散するために不安定となる[7]。

4．対称積層板の曲げ剛性

本研究の数値計算には、表－1に示すような3種類のFRPを採用する。材料定数は、文献2)で使用されている表－1の値を用いる。E_2/E_1の値からわかるように、異方性の度合いは材料(1)EGLASS/EPが最も弱く、(2)BORON/EP、(3)GRAPHITE/EPの順に強くなる。

表－2は以上の3種類の材料を対象とし、式(3)によって積層板の曲げ剛性を計算したものである。どの材料も、繊維角度θ=0°の曲げ剛性D_1^*で無次元化している。

表－1　FRPの材料定数

材　料	E_1(GPa)	E_2(GPa)	G_{12}(GPa)	ν_{12}
(1)EGLASS/EP (E_2/E_1=0.41)	60.7	24.8	11.99	0.23
(2)BORON/EP (E_2/E_1=0.09)	209	19	6.4	0.21
(3)GRAPHITE/EP (E_2/E_1=0.06)	138	8.96	7.1	0.30

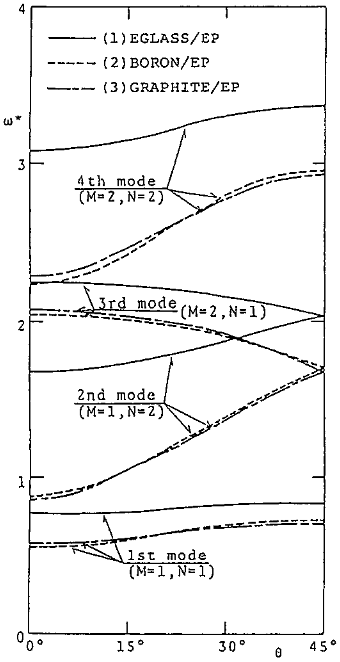
表－2　積層板の曲げ剛性

曲げ剛性	材　料	θ=0°	θ=15°	θ=30°	θ=45°
D_1^*	(1)EGLASS/EP	1.000	0.932	0.768	0.592
	(2)BORON/EP	1.000	0.881	0.598	0.313
$(=D_{11}^*)$	(3)GRAPHITE/EP	1.000	0.886	0.612	0.327
D_2^*	(1)EGLASS/EP	0.408	0.420	0.473	0.592
	(2)BORON/EP	0.091	0.094	0.144	0.313
$(=D_{22}^*)$	(3)GRAPHITE/EP	0.065	0.076	0.145	0.327
	(1)EGLASS/EP	0.094	0.122	0.178	0.206
D_{12}^*	(2)BORON/EP	0.020	0.077	0.193	0.252
	(3)GRAPHITE/EP	0.020	0.071	0.174	0.226
	(1)EGLASS/EP	0.193	0.221	0.277	0.305
D_{66}^*	(2)BORON/EP	0.030	0.089	0.205	0.263
	(3)GRAPHITE/EP	0.051	0.102	0.205	0.256
D_3^*	(1)EGLASS/EP	0.480	0.564	0.732	0.816
$(=D_{12}^*$	(2)BORON/EP	0.080	0.255	0.604	0.778
$+2D_{66}^*)$	(3)GRAPHITE/EP	0.122	0.276	0.584	0.738

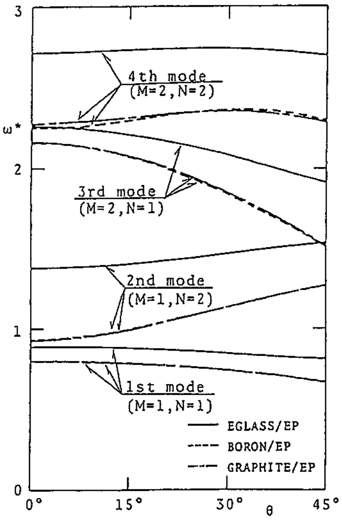
5．固有振動数特性

図－2，3は、3種類の材料からなる積層正方形板の全周辺単純支持(CASEⅠ)および荷重辺固定,他対辺単純支持(CASEⅢ)の固有振動数曲線である。縦軸の固有振動数ω^*は、等方性板

の1次の固有振動数で無次元化している。また、横軸θは積層板の繊維角度である。ここで、M,Nはそれぞれx方向とy方向の半波数を意味する。主軸方向のヤング率E_1がこれと直角方向のヤング率E_2と比較して大きいために、積層板の固有振動数は、等方性板よりも小さくなる(等方性板ではCASE Iの場合$\omega_{11}^*=1.0$, $\omega_{12}^*=\omega_{21}^*=2.5$, $\omega_{22}^*=4.0$)。その割合は、異方性が強いほど大きくなる。繊維角度が変化すると、固有振動数が増大する固有振動と減少する固有振動が存在する。CASE Iの等方性正方形板の場合ω_{12}^*とω_{21}^*の大きさは同じであるが、異方性板の場合図－2のように両者(ω_{12}^*とω_{21}^*)が著しく異なる。繊維角度が$\theta=0°$から変化すると、x方向とy方向の振動形の半波数によって固有振動数が増大する場合と減少する場合がある。すなわち、CASE Iの正方形板の場合y方向の半波数がx方向の半波数よりも大きい固有振動ω_{12}は増大し、逆にx方向の半波数の方が小さい固有振動ω_{21}は減少する。$\theta=45°$で両者が一致する。x方向とy方向の半波数M,Nが同じ場合(M=N=1,M=N=2)には境界条件によって固有振動の変化は異なる。また、異方性の度合いが大きいほど振動数の変化が大きくなる。したがって、動的不安定領域の発生振動数は繊維角度の影響を著しく受けることが予想される。

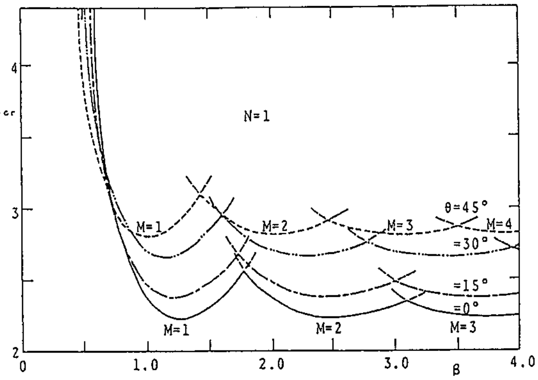


図－2 固有振動数曲線(CASE I)



図－3 固有振動数曲線(CASE III)

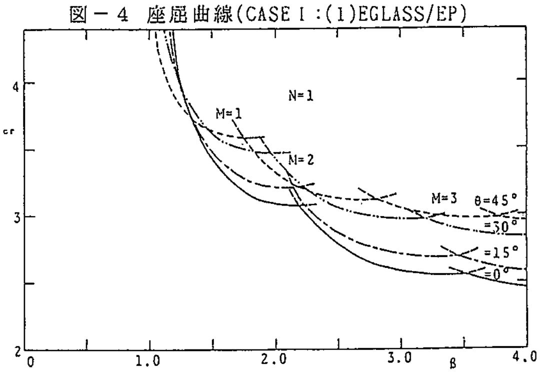
なお、Appendix Aの固有振動解析から得られる積層板の固有振動形は材料および繊維角度の影響をほとんど受けない。したがって、式(A-2)の級数の収束も等方性板の場合と同程度できわめて良好である。



図－4 座屈曲線(CASE I:(1)EGLASS/EP)

6. 座屈特性

図－4，5は、全周辺単純支持(CASE I)と荷重辺固定,他対辺単純支持(CASE III)の材料(1)EGLASS/EPの積層板の座屈曲線である。縦軸λ_{cr}は座屈固有値で、横軸βは縦横比である。ここで、M,Nはそれぞれx方向とy方向の半波数を意味する。座屈曲線



図－5 座屈曲線(CASE III:(1)EGLASS/EP)

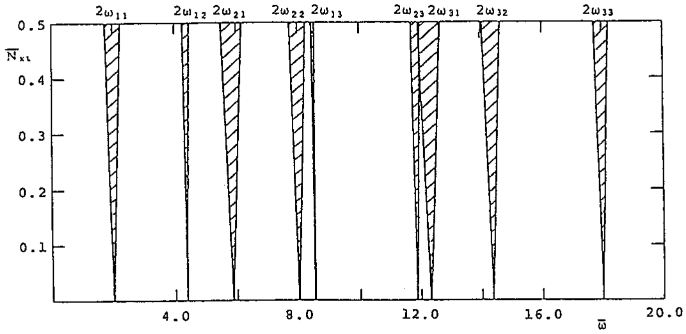
の変化パターンは等方性板の場合と同じで、CASE I では縦横比の変化に伴って座屈固有値は一定の最小値をとり、CASE III では縦横比を大きくすると座屈固有値は減少する。図に示すように、繊維角度の増大に伴って座屈荷重は増大する。特に、15° と 30° の間の変化が大きい。また、座屈波形のx方向の半波数が多くなる。

7. 動的不安定領域

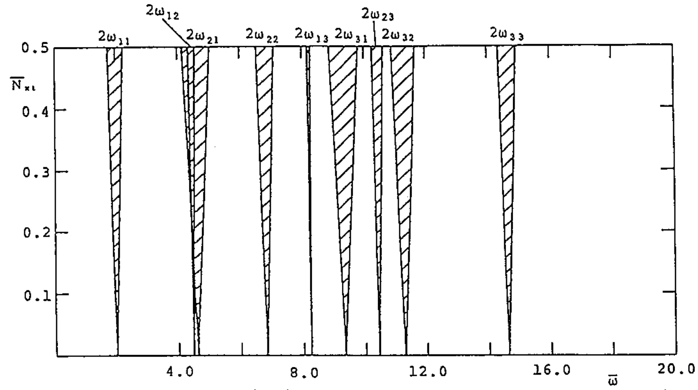
変動面内力によって生じる動的不安定領域の種類には、単純共振$2\omega_{ij}/k(k=1,2,\cdots)$と結合共振$(\omega_{ij}\pm\omega_{mn})/k(k=1,2,\cdots)$がある。このうちk=1を主不安定領域、k≧2を副不安定領域と呼ぶ。結合共振において、+の場合を和形、-の場合を差形と呼ぶ[7]。

動的不安定領域の種類は式(9)の行列[G]の要素構成によって決まり、その発生可能振動数は行列[F]によって決る。繊維角度が中央面対称の積層長方形板では、行列[G]の要素構成は等方性板と同じである[9]。つまり、荷重辺が単純支持であるCASE I, II の場合は単純共振のみが存在し、荷重辺が固定であるCASE III, IV の場合はそれに加えて和型の結合共振が存在する[9]。ここで、結合共振$(\omega_{ij}+\omega_{mn})/k$は和形のみが存在し、CASE III では$i+m$=偶数, $j=n$のとき、CASE IV では$i+m$, $j+n$がともに偶数のときの自由度の組み合わせによって発生する[9]。

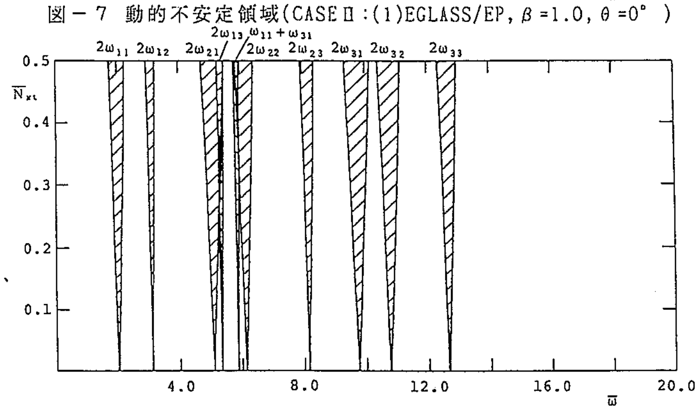
図－6～9は、それぞれ異方性の度合いの小さい材料(1)EGLASS/EPを用いて繊維角度θ=0° で積層した場合のCASE I 、CASE II 、CASE III の正方形板(β=1.0)およびCASE IV の長方形板(β=1.5)の不安定領域を示したものである。CASE IV の場合、β=1.0の



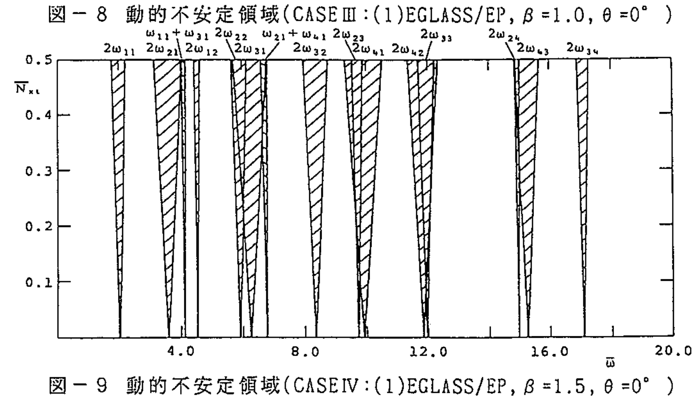
図－6 動的不安定領域(CASE I :(1)EGLASS/EP, β=1.0, θ=0°)



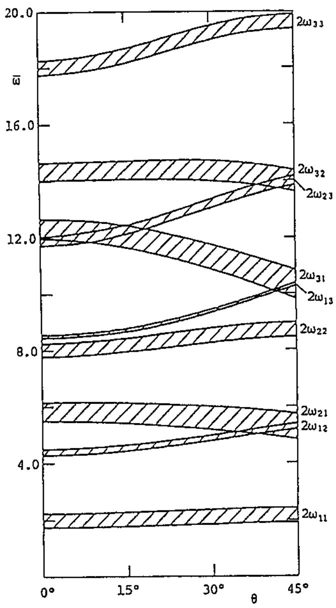
図－7 動的不安定領域(CASE II :(1)EGLASS/EP, β=1.0, θ=0°)



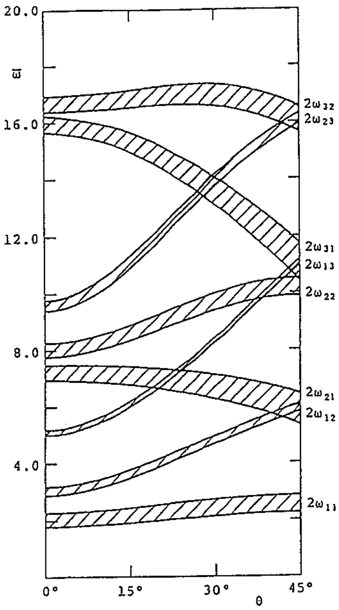
図－8 動的不安定領域(CASE III :(1)EGLASS/EP, β=1.0, θ=0°)



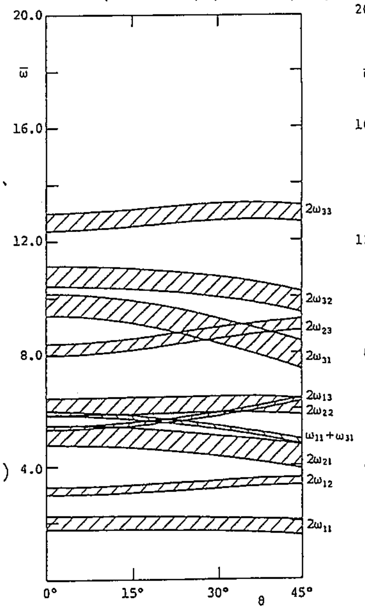
図－9 動的不安定領域(CASE IV :(1)EGLASS/EP, β=1.5, θ=0°)



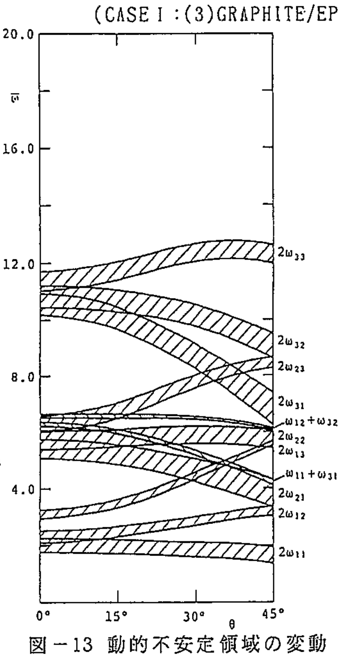
図－10 動的不安定領域の変動
(CASEⅠ:(1)EGLASS/EP)



図－11 動的不安定領域の変動
(CASEⅠ:(3)GRAPHITE/EP)



図－12 動的不安定領域の変動
(CASEⅢ:(1)EGLASS/EP)



図－13 動的不安定領域の変動
(CASEⅢ:(3)GRAPHITE/EP)

正方形板では固有円振動数ω_{mn}が重根になるため、動的不安定領域が重なって存在する。このため本研究では、動的不安定領域の種類が区別できるβ=1.5の長方形板を用いた。縦軸は、変動面内力N_{xt}の振幅を座屈面内力N_{cr}で無次元化した無次元変動面内力の振幅$\bar{N}_{xt}$で、横軸は励振振動数をθ=0°の1次の固有振動数ω^{0}_{11}で無次元化した無次元励振振動数$\bar{\omega}$である。ここに、1次の固有振動数の20倍の振動数領域まで求めている。計算自由度は9自由度とし、x方向とy方向の半波数がそれぞれを採用した。CASEⅣ図では、m=4,n=4の16自由度を採用している。図では、右上がり斜線部が単純共振、右下がり斜線部が結合共振の発生する不安定領域を意味する。図－8,9から明らかなように、積層板においても単純共振の主不安定領域$2\omega_{ij}$が結合共振の主不安定領域$\omega_{ij}+\omega_{mn}$よりも広い。等方性の場合のCASEⅠの正方形版では不安定領域($2\omega_{12}$,$2\omega_{21}$)、($2\omega_{13}$,$2\omega_{31}$)、($2\omega_{23}$,$2\omega_{32}$)は同じ振動数で発生するが、異方性板では図－6のように、異なった振動数で発生する。このとき、荷重方向(x方向)の半波数が低い振動数領域にある不安定領域$2\omega_{12}$,$2\omega_{13}$,$2\omega_{23}$の幅が狭い。

図－10,11は、異方性の違う材料(1)EGLASS/EP、(3)GRAPHITE/EPを用いた場合の積層正方形板の繊維角度による動的不安定領域の変動を示したものである。同様に図－12,13はCASEⅢの積層正方形板に対する動的不安定領域の変動である。これらの不安定領域は、繊維角度がθ=0°における$\bar{N}_{xt}$=0.5の値を用いている。境界条件に無関係に繊維角度の増加により固有振動数が大きくなる不安定領域の幅が狭くなり、逆に小さくなる不安定領域の幅が広くなる。また、図－10,11および12,13の比較から明らかなように、異方性が強い材料からなる方が、積層板の不安定領域の発生振動数は繊維角度の影響を著しく受ける。これらの結果は等方性板の結果を用いて推定することが不可能で積層板の理論を用いて解析しなければならない。

8．まとめ

本研究では、材質、繊維角度が中央面に対称な積層長方形板に対し、固有振動解析、座屈解析および動的安定性解析を行った。これらを異方性の違う３種類の材料からなる各種の境界条件をもつ長方形板を対象に、繊維角度をパラメータとして明らかにした。得られた結果をまとめると次のようになる。

（１）境界条件に関係なく異方性の度合いが強い材料ほど、等方性板と比較して固有振動数は小さくなる。また、異方性の度合いが強い材料ほど、繊維角度による固有振動数の変化は大きい。

（２）座屈曲線の変化パターンは、境界条件や繊維角度によらず等方性板と同じ特性を示す。境界条件に関係なく、繊維角度が大きくなると、座屈固有値は大きくなり、荷重方向の半波数が増加する。

（３）動的不安定領域の種類は、等方性板と同じで、荷重辺が単純支持のときは単純共振のみが存在し、荷重辺が固定のときは単純共振と和形の結合共振が存在する。

（４）積層板の動的不安定領域は、等方性板とは異なった特性を示し、同じ振動形をもっていても、荷重の作用方向によって不安定領域の幅は著しく異なる。積層板の繊維角度が大きくなると、動的不安定領域の発生振動数が小さい振動数領域へ移る不安定領域の幅が広がり、高かい振動数領域へ移る不安定領域の幅が狭くなる。

本研究によって、対称な積層長方形板の動的安定性が明らかにされた。本研究の方法によれば、固有振動形が得られれば動的安定性の解析は、等方性板と全く同様に解析できる。今後この方法を用いて、カップリング効果を考慮した積層板や非対称な積層長方形板の動的安定性を解析する予定である。

Appendix A　固有振動解析

式(４)において、変動面内力$N_{xt}=0$とすると、積層板に静的面内力N_{x0}のみが作用する場合の運動方程式は次のように与えられる。

$$L(w)=D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+N_{x0}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \tag{A-1}$$

式(A-1)の一般解を次のように仮定する。

$$w=\sum_{s=1}\sum_{t=1}A_{st}\overline{W}_{st}(x,y)e^{i\omega t} \tag{A-2}$$

ここに、ω：固有円振動数、A_{st}：未定定数、$\overline{W}_{st}$：境界条件を満足する座標関数

式(A-2)の$\overline{W}_{st}$としては次のような関数を用いる。

$$\overline{W}_{st}=h_s(\xi)\overline{h}_t(\eta) \tag{A-3}$$

ここに、$h_s=\sin s\pi\xi$ (CASE I, II)、$h_s=\cos(s-1)\pi\xi-\cos(s+1)\pi\xi$ (CASE III, IV)、

$\overline{h}_t=\sin t\pi\eta$ (CASE I, III)、$\overline{h}_t=\cos(t-1)\pi\eta-\cos(t+1)\pi\eta$ (CASE II, IV)、

$\xi=x/a$、$\eta=y/b$

式(A-1)に式(A-2),(A-3)を代入すると、次式が得られる。

$$L(w)=\sum_{s=1}\sum_{t=1}A_{st}\left\{\frac{D_1^*}{\beta^4}h_s''''\overline{h}_t+\frac{2D_2^*}{\beta^2}h_s''\overline{h}_t''+D_3^*h_s\overline{h}_t''''-\lambda_v^4h_s\overline{h}_t-\frac{\overline{N}_{x0}}{\beta^2}h_s''\overline{h}_t\right\}e^{i\omega t} \tag{A-4}$$

ここに、$D_1^*=D_1/D_1^\circ$、$D_2^*=D_2/D_1^\circ$、$D_3^*=D_3/D_1^\circ$、$\lambda_v=\sqrt[4]{\rho hb^4\omega^2/\pi^4D_1^\circ}$、

$\overline{N}_{x0}=N_{x0}b^2/\pi^2D_1^\circ$、$D_1^\circ$：$D_1$の$\theta=0°$における板剛度

式(A-4)にGarerkin法を適用する。

$$\int_0^1\int_0^1 L(w)h_p\overline{h}_q d\xi d\eta=0 \tag{A-5}$$

ここに、p=1,2,…,L、q=1,2,…,L

式(A-5)の積分を実行すると、次式が得られる。

$$\sum_{s=1}\sum_{t=1} A_{st}[E_{sptq}-\lambda_v^4 F_{sptq}-\bar{N}_{xo}G_{sptq}]=0 \tag{A-6}$$

ここに、$E_{sptq}=\dfrac{D_1^*}{\beta^4}I_{sp}^3 I_{tq}^1+\dfrac{2D_2^*}{\beta^2}I_{sp}^2 I_{tq}^2+D_3^* I_{sp}^1 I_{tq}^3$、$F_{sptq}=I_{sp}^1 I_{tq}^1$、$G_{sptq}=I_{sp}^2 I_{tq}^1/\beta^2$、

$I_{sp}^1=\int_0^1 h_s h_p d\xi$、$I_{sp}^2=\int_0^1 h_s'' h_p d\xi$、$I_{sp}^3=\int_0^1 h_s'''' h_p d\xi$、

$I_{tq}^1=\int_0^1 \overline{h}_t \overline{h}_q d\eta$、$I_{tq}^2=\int_0^1 \overline{h}_t'' \overline{h}_q d\eta$、$I_{tq}^3=\int_0^1 \overline{h}_t'''' \overline{h}_q d\eta$

式(A-6)を行列表示すると、次のようになる。

$$([E]-\lambda_v^4[F]-\bar{N}_{xo}[G])\{X\}=\{0\} \tag{A-7}$$

ここに、$[E]:E\{q+(p-1)L,s+(t-1)L\}$、$[F]:F\{q+(p-1)L,s+(t-1)L\}$、$[G]:G\{q+(p-1)L,s+(t-1)L\}$、

$\{X\}=\{A_{11}A_{12}\cdots A_{1L}A_{21}A_{22}\cdots A_{LL}\}^T$

式(A-7)において、$\bar{N}_{xo}=0$とおくと自由振動の固有値λ_vが求まり、$\lambda_v=0$とおくと座屈の固有値$\lambda_b=\bar{N}_{xo}$を求めることができる。数値解析では式(A-7)を固有値問題に変換することで、それぞれλ_v, λ_bを計算することができる。

参考文献

1) 福田：異方性の積極利用(Ⅰ),日本複合材料学会誌,14-1,pp.20~25,1988.

2) 一ノ宮・成田・丸山：FRP積層長方形板の定常応答,日本機会学会論文集(C編),55-511,pp.549~555,1989.3.

3) Leissa,A.W.: Advances in Vibration, Buckling and Postbuckling Studies on Composite Plates, Proc. 1st Int. Conf. on Composite Struct.,pp.312~334,1981.

4) 三上・朴・芳村：逆対称クロス・アングルプライ積層板の振動特性に及ぼす初期応力の影響,土木学会北海道支部論文報告集,第48号,pp.233~238,1992.

5) 芳村・三上・朴：逆対称アングル・プライ積層板の自由振動,構造工学論文集,Vol.37A,pp.911~919,1991.3.

6) C.W.Bert and V.Birman: Dynamic Instability of Shear Deformable Antisymmetric Angle-Ply Plates, Int. J. Solids Struct.,Vol.23,No.7,pp.1053~1061,1987.

7) 夏秋・高橋・小西：構造物の動的安定性－そのアプローチ手法と橋梁構造への応用－, 片山技報, Vol.8, pp.1~6, 1988.

8) 福田・野村・武田：複合材料の構造力学,日刊工業新聞社,pp.23~105,1987.

9) 八巻・永井：周期的な圧縮荷重をうける長方形板の動的安定,東北大学高速力学研究所報告,第36巻,第351号,pp.147~168,1975.

(1992年9月21日受付)