

閉管内音圧分布の気柱の長さ依存性

富山 哲之*・福山 豊*

(昭和61年10月31日受理)

Tube Length-Dependence on the Sound Pressure Distribution of a Closed Pipe

Noriyuki TOMIYAMA, Yutaka FUKUYAMA

(Received Oct. 31, 1986)

1. はじめに

共鳴（または共振）に関する現象は、我々の身の回りに多く見ることができるが、高校や大学で教えられているこのような現象は、その共鳴点にのみ着眼しているために、多くの物理教科書など^{1,2)}には次のような事柄が記述されている。共鳴のときに生じる定常波は入射波と反射波が干渉したものである。そして、気柱に生じる定常波は、管口付近は空気が自由に振動できるので腹となり、管の閉じた端は空気の振動が妨げられるので節となる。また、このことに関連する学生実験では、音源の振動数や波長、音速などを求めることにとどまっておき、定常波が形成される様子などに興味や関心を喚起させるような学習の動機付けが十分に行われているとは思われない。

筆者らは、これまでに定常波についての認識を深めるために、気柱の振動^{3,4)}や弦の振動⁵⁾について、波の減衰効果及び境界条件を考慮した多重波の理論により定常波を記述した。更に、実験との対比を行ったところ、気柱や弦の振動の様子を的確に説明できることがわかった。

本稿では、気柱の長さを変化させたときの気柱の振動について、実験による音圧の測定結果と前述の多重波の理論に基づく音圧の計算結果との比較検討を行ったので報告する。

2. 音圧測定装置と実験方法

図1のように、測定に用いた共鳴管は透明なアクリル樹脂製（長さ40.0 cm、外径7.0 cm、内径5.8 cm）である。閉端のピストンは硬質ゴム板（厚さ2.0 cm）であり、これを

*長崎大学教育学部物理学教室

水平移動して気柱の長さを自由に变化できる。音源とするスピーカーは共鳴管の開端に平行に約 10 cm 離してフレームに固定した。装置の概略図を図 2 に示す。低周波発振器の正弦波信号を増幅して、スピーカーから 1000 Hz の正弦音波を共鳴管に送り込む。このときの発振周波数を周波数カウンターで読み取り、波形をオシロスコープで監視する。管内の音波はコンデンサー型マイクロフォンで受信し、その信号を増幅してデジタルボルトメーターで読み取る。このとき、スピーカー側の開端の中心にマイクロフォンを置き、共鳴管を取り除いておいて出力電圧を 1.0 V に調整する。その後、共鳴管を取り付けて、共鳴管の長さが 4 cm から 32 cm まで、約 4 cm ほどの長さのものと極大あるいは極小の定常波が生じるときの長さ

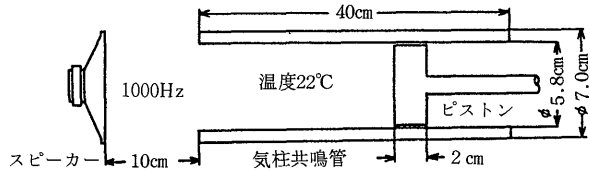


図 1 気柱共鳴管

の長さのものと極大あるいは極小の定常波が生じるときの長さ

のものについて、開端の外側 5 cm のところから、1 cm おきに閉端のピストン壁まで、管の中心軸に沿って音圧を測定した。このときの共鳴管内の温度は約 22 °C であった。

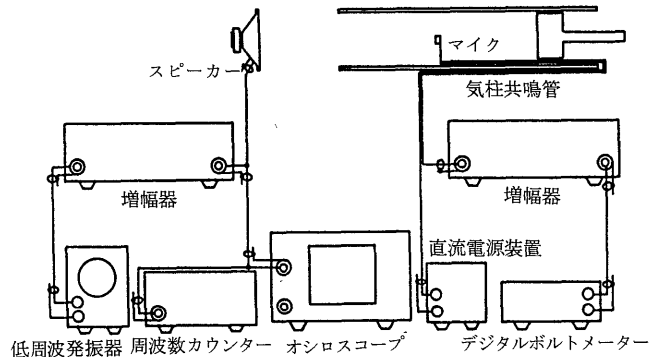


図 2 音圧測定装置の概略図

3. 理論

スピーカーで発生した正弦音波 $A\sin\omega t$ は、共鳴管のピストン壁で反射されてスピーカー側の開端に向かう。そして、再び反射されてピストン壁に向かう。このような反射を繰り返すたびに、ピストン壁は固定端、開端は自由端として振舞うので、正弦音波の位相はそれぞれ π , 0 だけ変化する。そして、正弦音波の振幅は、気柱の両端において減衰するとともに、伝播距離によっても指数関数的に減衰するものと仮定する。そこで、管内に閉じ込められたすべての音波を重ね合わせることにより気柱の振動を表現すると、気柱の粒子変位の式 $y(x, t)$ は

$$\begin{aligned}
 y(x, t) = & Ae^{-ax}\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) \\
 & - Ae^{-a(2l-x)-\gamma}\sin\omega\left[t-\frac{1}{v}(2l-x)\right] \\
 & - Ae^{-a(2l+x)-(\gamma_0+\gamma)}\sin\omega\left[t-\frac{1}{v}(2l+x)\right] \\
 & + Ae^{-a(4l-x)-(\gamma_0+2\gamma)}\sin\omega\left[t-\frac{1}{v}(4l-x)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A e^{-a(4l+x)-2(\gamma_0+\gamma)} \sin \omega \left[t - \frac{1}{v} (4l+x) \right] \\
& - A e^{-a(6l-x)-(2\gamma_0+3\gamma)} \sin \omega \left[t - \frac{1}{v} (6l-x) \right] \\
& - \dots \dots \dots, \quad (0 < x \leq l)
\end{aligned} \tag{1}$$

となる。

気柱の粒子変位を表す(1)式の右辺の第1項は、スピーカーで発生した音波がピストン壁に向かう入射波、第2項はピストンで1度反射して自由端に向かう波、第3項は自由端で再び反射してピストン壁に向かう波を表す。その他の項も同様にして、両端で数度反射された波を表す。

これらの項のすべてを、奇数項と偶数項の波のグループに分けて、それぞれの和を求めると、

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= y_0(x, t) + y_e(x, t) \\
&= \frac{A e^{-ax}}{(1 + e^{-r} \cos \delta)^2 + (e^{-r} \sin \delta)^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] \\
&\quad - \frac{A e^{-2al+ax-\gamma}}{(1 + e^{-r} \cos \delta)^2 + (e^{-r} \sin \delta)^2} \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi - \delta \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

となる。更に、(2)式の計算を行うと

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= \frac{A}{(1 + e^{-r} \cos \delta)^2 + (e^{-r} \sin \delta)^2} \\
&\quad \times \left\{ e^{-ax} \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] - e^{-2al+ax-\gamma} \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi - \delta \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$= A e^{\gamma/2} \sqrt{\frac{\cosh[2a(l-x) + \gamma] - \cos 2k(l-x)}{\cosh \Gamma + \cos 2kl}} \tag{4}$$

$$\times \sin[\omega t + \varphi + \varphi_1(x)]$$

となる。これらの式で

$$\Gamma = 2al + \gamma_0 + \gamma \tag{5}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{e^{-r} \sin 2kl}{1 + e^{-r} \cos 2kl} \right] \tag{6}$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left[\frac{-e^{ax} \sin kx - e^{-2al+ax-\gamma} \sin k(x-2l)}{e^{-ax} \cos kx - e^{-2al+ax-\gamma} \cos k(x-2l)} \right] \tag{7}$$

で定義される。ただし、 ω は角周波数、 k は波数、 A はスピーカーで発振した正弦音波の振幅、 γ_0 と γ はそれぞれ自由端と固定端での音波の減衰を示す定数、 a は空気中での伝播による音波の減衰係数、 l は管口補正を施した気柱の長さを示す。

ここでは、音圧に比例する出力電圧を測定するので、粒子変位の式 $y(x, t)$ を音圧の式 $P(x, t)$ に変換しなければならない。両者の間には

$$P(x, t) = -\rho v^2 \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{8}$$

の関係がある⁶⁾。ただし、 ρ は空気の分子の平均密度、 v は音速である。

これより音圧を表す式 $P(x, t)$ は

$$P(x, t) = A\rho v^2 e^{\gamma/2} \sqrt{a^2 + k^2} \times \sqrt{\frac{\cosh[2a(l-x) + \gamma] + \cos 2k(l-x)}{\cosh \Gamma + \cos 2kl}} \times \sin[\omega t + \varphi + \varphi_0 + \varphi_1(x)] \quad (9)$$

となる。ここで

$$\varphi_0 = \tan^{-1}(k/a) \quad (10)$$

$$\varphi_1(x) = \tan^{-1} \left[\frac{-e^{-ax} \sin kx + e^{-2al+ax-\gamma} \sin k(x-2l)}{e^{-ax} \cos kx + e^{-2al+ax-\gamma} \cos k(x-2l)} \right] \quad (11)$$

で定義される。

(9)式の正弦関数の項を除いた(音圧の振幅を表す)式を使って、スピーカー側の自由端($x=0$)を起点にして、 $x=l$ のところまで計算を行うと、音圧の定常波の振幅を表す曲線が得られる。以上のような計算式を設定して、パーソナル・コンピュータ(NEC製PC-8801)で計算を行った。

4. 測定並びに計算結果とその検討

実験による音圧の測定結果を図3～図12の図中に丸印で示す。いずれの場合も、音圧の定常波の波形は固定端で有限の大きさの振幅をもつ腹となるが、自由端では節から腹に変

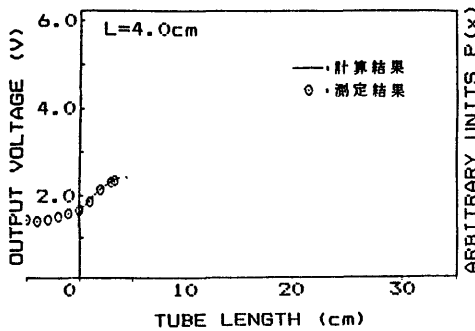


図 3

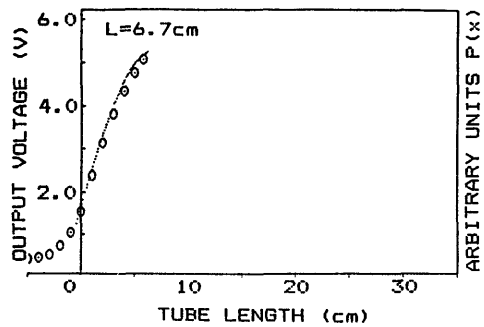


図 4

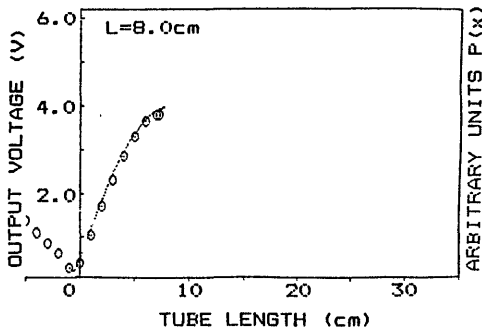


図 5

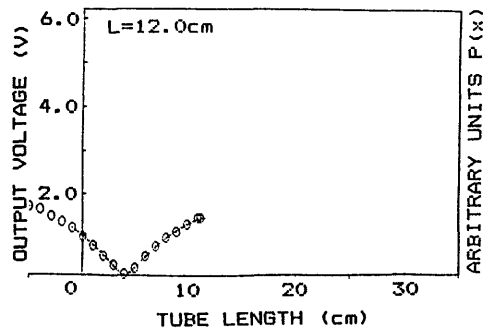


図 6

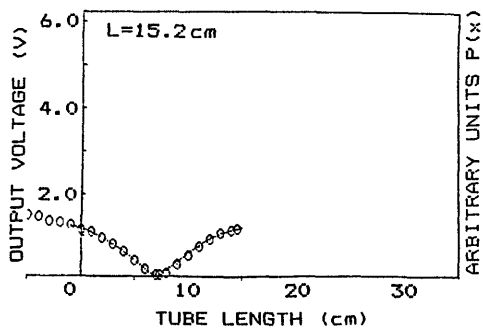


図 7

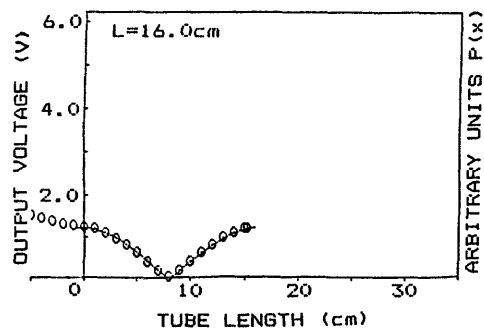


図 8

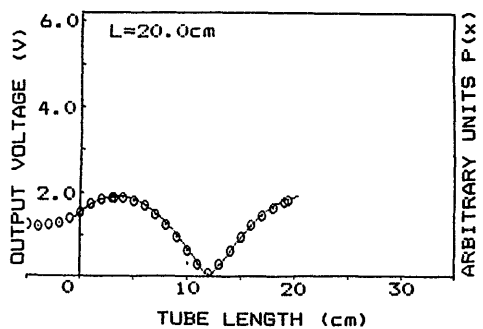


図 9

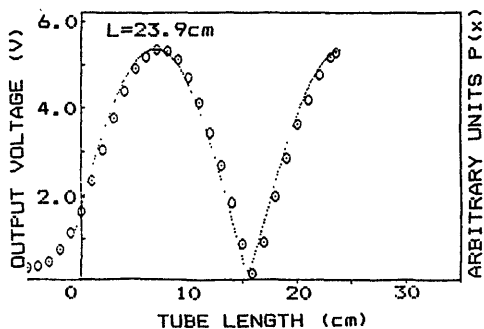


図 10

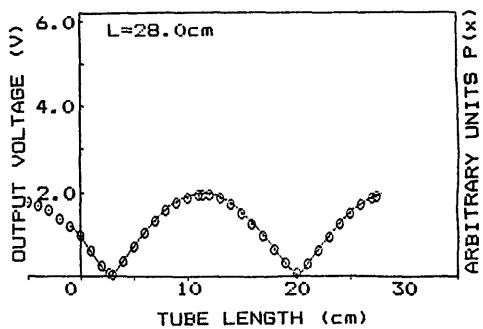


図 11

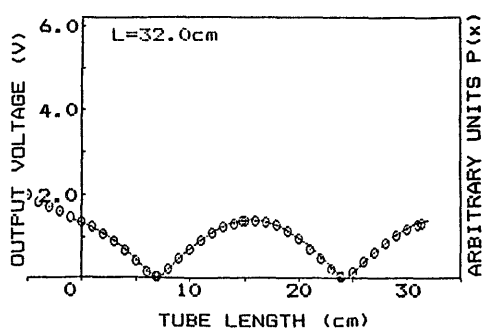


図 12

化する。そして、節の部分の振幅は完全に零にはならない。共鳴管の長さが6.7 cmのとき(図4)の音圧の定常波は、自由端で節、固定端で腹になり、振幅は極大値を示す。

気柱を次第に長くすると、音圧の定常波の節が管内に生じるようになる。管の長さが15.2 cmのとき(図7)、定常波の振幅は極小になり、自由端は腹になる。その後、音圧の定常波の振幅は徐々に大きくなり、自由端では腹からずれてくる。次の共鳴を生じたときは(図10)、自由端は節になる。更に、気柱を長くすると、定常波の振幅は急激に減少し、自由端は節から腹に変化する。

次に、測定結果と理論による計算結果との比較を行うために、(9)式の音圧の振幅を表す式を使ってコンピューターで計算を行うと図3～図12に示す曲線が得られる。ただし、縦軸は任意尺度とする。それぞれの定数などについては、音速は気柱の温度が約22°Cであったので、 $v=3.45 \times 10^4$ cm/s、空気による減衰係数⁷⁾ $a=5 \times 10^{-4}$ cm⁻¹、固定端及び自由端における減衰定数をそれぞれ $\gamma=0.1$ 、 $\gamma_0=0.2$ とした。気柱の長さ l (cm)は管口補正を管の内半径の0.6倍の値⁸⁾ ($\Delta l=1.7$ cm)とし、これを各々の図左上に表示した共鳴管の長さ L (cm)に加えた。いずれの場合も、測定結果と計算結果との間には良い一致が見られる。

5. おわりに

気柱の共鳴が生じるときは、管口付近の空気が自由に振動する自由端で粒子変位の定常波の腹になり、固定端で空気の振動が妨げられるので変位が零の節になるとして、多くの物理教科書などに記述されている。ところが、共鳴を生じない気柱の長さのときの定常波の様子を想像する手掛りは、何らの示唆もなされていないのが実情である。学習者が仮に想像できたとしても、定常波は存在しないと考えるか、あるいは気柱の自由端は粒子変位の腹、固定端で節となるような振幅の小さい定常波が生じると想定するのであろう。

本研究では、現実は無視できない音波の減衰効果や境界条件を考慮し、気柱内のすべての音波を重ね合わせることにより、任意の長さの気柱に生じる定常波をうまく説明できることを明らかにした。共鳴を生じるときの定常波に比べて、共鳴しない気柱の長さのときは、固定端で共鳴のときと同様に音圧の腹(粒子変位の節)になるが、自由端では必ずしも音圧の節(粒子変位の腹)になるとは限らず、音圧の腹(粒子変位の節)になることもある。そして、このときも不完全ではあるが振幅の小さな定常波になっている。

以上の事柄は、教師が共鳴の学習指導を行うにあたって、定常波形成のイメージ作りに役立つと思われる。更に、授業実践のための教材研究は今後の課題としたい。

本稿は、日本物理学会物理教育分科(1986年9月、関西学院大学)で、口頭発表した内容に加筆、修正を加えたものである。

参考文献

- 1) 例えば, 伏見康治他編: 高等学校教科書 物理, 数研出版 (1983) 102.
- 2) 例えば, 大学自然科学教育研究会編: 物理実験指針, 東京教学社 (1985) 54.
- 3) 福山 豊: 物理教育, Vol.33, No.1 (1985) 19.
- 4) 福山 豊, 広瀬美恵子, 阿部由美子, 富山哲之: 物理教育, Vol.33, No.3 (1985) 220.
- 5) 福山 豊, 阿部由美子, 広瀬美恵子, 富山哲之: 物理教育, Vol.34, No.4 (1986) 237.
- 6) R.P.Feynman, R.B.Leighton and M.L.Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, Vol.1 (Addison-Wesley Publishing Co., Ltd., U.S.A., 1965) Ch.47-3.
- 7) 小橋 豊: 音と音波 (裳華房, 1984) 132.
- 8) 小橋 豊: 前掲, 104.