

磁石と交流電流による弦の共振現象II ——磁石の位置による弦の振幅の大きさへの影響——

福山 豊* ・ 阿比留慎一**

(平成2年2月28日受理)

Resonance Phenomena of a String Driven by a Permanent Magnet and an Alternating Current II

Yutaka FUKUYAMA, Shin-ichi ABIRU

(Received, February 28, 1990)

1. はじめに

著者らはすでに両端を固定した弦の強制振動に関する一般的な関係式を求め¹⁾(以後これを論文1と呼ぶ)、これらの振動の特徴を視覚化するために、コンピューターによるシミュレーションをおこなった^{2,3)}。この論文では、論文1でとりあつかった両端を固定した弦の共振の特徴をさらによく理解するために、次ぎの2つの問いに関する考察を試みたものである。第1は、共振を生じさせるとき弦に加える振動の振幅 A を同じにしてもその振動源の位置によって励起された振動の振幅の大きさが異なるのはどうしてか。第2は、色々な振動数の共振のモードのうち、振動源の位置がモードの節の位置と同じであるとそのモードが励起されないのはどういう理由によるのか。これらの問いを波の基本的な性質によって理解するために弦の振動を多重波を用いて表示した。さらに、これらの振動の様子を理解しやすくするために、コンピューターによるシミュレーションをおこなった。

2. 両端を固定した弦の振動

まず論文1の多重波の方法の簡単な復習から始める。両端を固定端とした長さ l の弦の一端を x 座標の原点 0 とし、他端を l とする。また、U型磁石は原点から d の距離離れた点に置かれているものとする。このとき弦の両端に交流電流を流したとき座標 x の位置での弦の振動の様子を調べることにする。U型磁石の位置 d に生じる振動は、時刻を t 、振幅を A 、角振動数を ω とすると $A \sin \omega t$ と表される。この振動は両端に向かって速さ v で伝わる波を生じる。

このとき弦に生じる波動の基本的な性質は、改めて簡条書きにすると次の3つにまとめることができる。

*長崎大学教育学部物理学教室, **長崎市立淵中学校

- (1) 弦の波は正弦波として伝播する。(しかし、振幅は指数関数的に減衰する, Ae^{-as} : a ; 減衰係数, s ; 伝播距離)
- (2) 両端(固定端)での反射は位相が π 変化する。
- (3) 弦の変位はすべての反射波の重ね合わせで表現できる。

以上のことから、弦の波に関する変位の理論式を導くために、次のように x が d より小さい(左側)場合と、 x が d より大きい(右側)場合とに分けて別々に考察する。

A. $0 < x \leq d$ の場合

時刻 t における弦の x の位置の変位 $y^A(x, t)$ は、U型磁石の位置 d で生じて右側へ伝播する波 $y^A_R(x, t)$ と左側へ伝播する波 $y^A_L(x, t)$ との重ね合わせ

$$y^A(x, y) = y^A_R(x, t) + y^A_L(x, t) \quad (1)$$

で記述できる。

右側へ伝播する波と左側へ伝播する波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} y^A_R(x, t) = & Ae^{-a(2\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell+x-d)} \sin[\omega\{t-(4\ell+x-d)/v\} + 4\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y^A_L(x, t) = & Ae^{-a(d-x)} \sin[\omega\{t-(d-x)/v\}] \\ & + Ae^{-a(d+x)} \sin[\omega\{t-(d+x)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+d-x)} \sin[\omega\{t-(2\ell+d-x)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+d+x)} \sin[\omega\{t-(2\ell+d+x)/v\} + 3\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

で表される。

B. $d \leq x \leq \ell$ の場合

x の位置がU型磁石の位置 d より右側にある場合も同様に考察できる。時刻 t のとき x の位置での弦の変位 $y^B(x, t)$ は、 d の位置から右側へ伝播する波 $y^B_R(x, t)$ と左側へ伝播する波 $y^B_L(x, t)$ の重ね合わせ

$$y^B(x, t) = y^B_R(x, t) + y^B_L(x, t) \quad (4)$$

で記述できる。

右側へ伝播する波と左側へ伝播する波は、それぞれ、

$$\begin{aligned} y^B_R(x, t) = & Ae^{-a(x-d)} \sin[\omega\{t-(x-d)/v\}] \\ & + Ae^{-a(2\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell-x-d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x-d)} \sin[\omega\{t-(2\ell+x-d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x-d)} \sin[\omega\{t-(4\ell-x-d)/v\} + 3\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y^B_L(x, t) = & Ae^{-a(x+d)} \sin[\omega\{t-(x+d)/v\} + \pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell-x+d)} \sin[\omega\{t-(2\ell-x+d)/v\} + 2\pi] \\ & + Ae^{-a(2\ell+x+d)} \sin[\omega\{t-(2\ell+x+d)/v\} + 3\pi] \\ & + Ae^{-a(4\ell-x+d)} \sin[\omega\{t-(4\ell-x+d)/v\} + 4\pi] \\ & + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

で表される。

3. 共振時振幅に関する磁石の位置依存性

共振時における弦の振幅は、磁石で d の位置を A の振幅で振動させても、 n を n 番目のモードとし、 k_n を $n\pi/\ell$ で表すと、 $A \sin k_n d$ に比例することが導かれる^{2,3)}。交流電流と磁石によってどの位置にも一様に振幅 A で振動させているにもかかわらず、この磁石の位置 d によって弦が異なった大きさの振幅で振動するのはなぜだろうか。この疑問に対して1つの解決を与えるために、今回は(2), (3), (5)と(6)式をそれぞれ計算してみる。どの式も右へ伝播する波と左へ伝播する波との多くの波の重ね合わせとなるので、どれも定常波を表していると考えられる。これらを数式で表すと、 x が d より小さい場合には

$$y^A_R(x, t) = -Ae^{-a(\ell-d)} \sqrt{\frac{\cosh 2ax - \cos 2kx}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin \{ \omega t - k(2\ell - d) - \phi + \phi(x) \}, \quad (7)$$

$$y^A_L(x, t) = Ae^{a(\ell-d)} \sqrt{\frac{\cosh 2ax - \cos 2kx}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin \{ \omega t - kd - \phi + \phi(x) \}, \quad (8)$$

$$(0 < x \leq d),$$

となる。

また、 x が d より大きいときには

$$y^B_R(x, t) = Ae^{ad} \sqrt{\frac{\cosh 2a(\ell-x) - \cos 2k(\ell-x)}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin \{ \omega t - k(\ell - d) - \phi + \phi(\ell - x) \}, \quad (9)$$

$$y^B_L(x, t) = -Ae^{-ad} \sqrt{\frac{\cosh 2a(\ell-x) - \cos 2k(\ell-x)}{\cosh 2a\ell - \cos 2k\ell}} \times \sin \{ \omega t - k(\ell + d) - \phi + \phi(\ell - x) \}, \quad (10)$$

$$(d < x \leq \ell),$$

と表すことができる。

ただし、位相を表す ϕ と $\phi(x)$ は、それぞれ、

$$\tan \phi = \frac{e^{-2a\ell} \sin 2k\ell}{1 - e^{-2a\ell} \cos 2k\ell}, \quad (11)$$

$$\cos \phi(X) = \frac{2 \cos kX \sinh aX}{\sqrt{2\{\cosh 2aX - \cos 2kX\}}}, \quad (12)$$

$$\sin \phi(X) = \frac{2 \sin kX \cosh aX}{\sqrt{2\{\cosh 2aX - \cos 2kX\}}}$$

で決定される。(12)式の X には x と $\ell - x$ を代入するものとする。

(7)式と(9)式は、磁石の位置で生じ右へ伝播していく波が両端で反射されて多重波となり、その結果としての定常波を表している。同様に、(8)式と(10)式は、左へ伝播していく波による定常波を表している。これらの定常波の振幅は、減衰係数 a が通常十分小さいために、磁

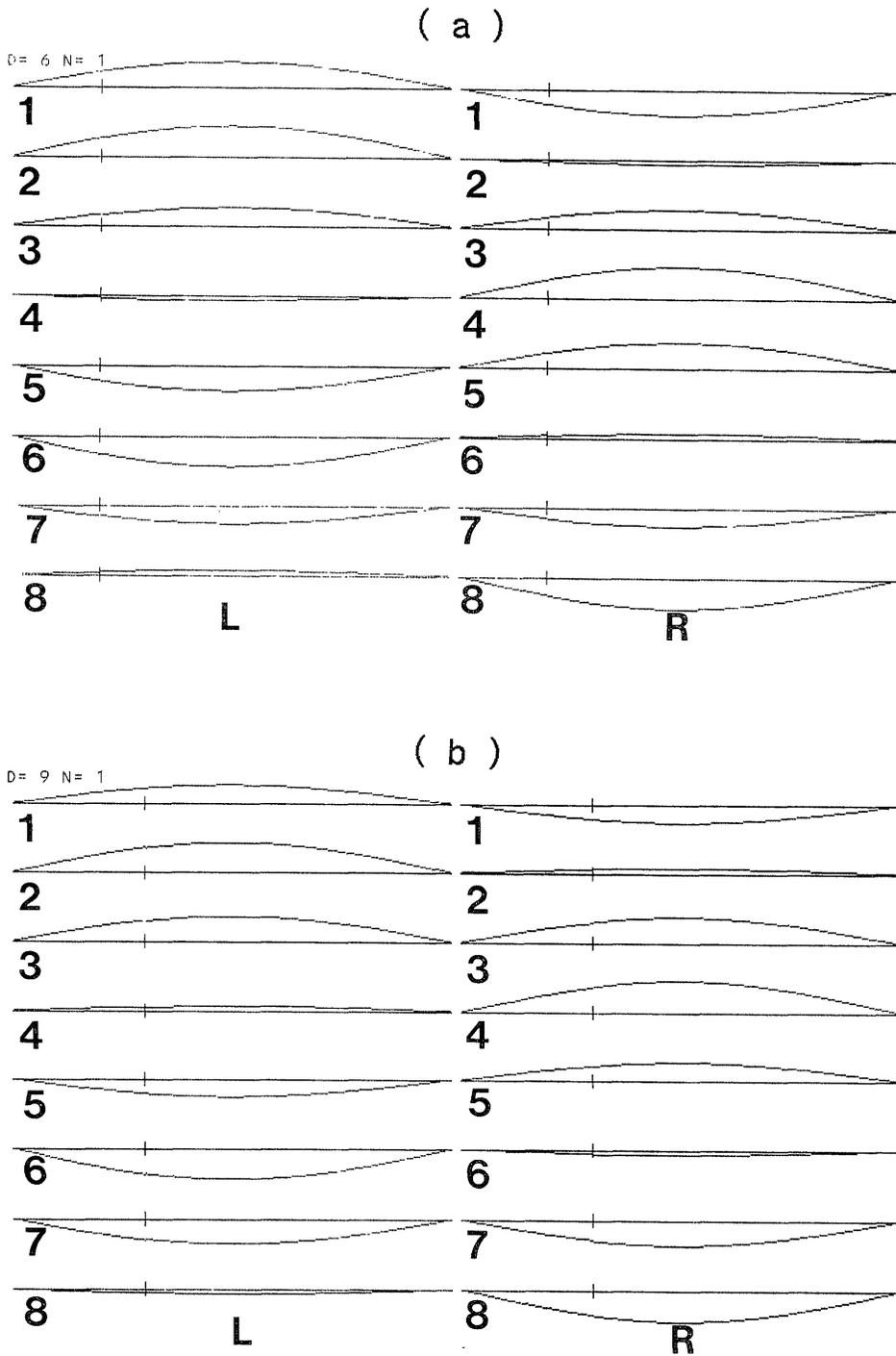


図1 弦の長さ30cmのときの基準モードの場合で、磁石の位置から右と左へ伝播する波の定常波の8分の1周期の振動, (a) $d = 6$ cm, (b) $d = 9$ cm

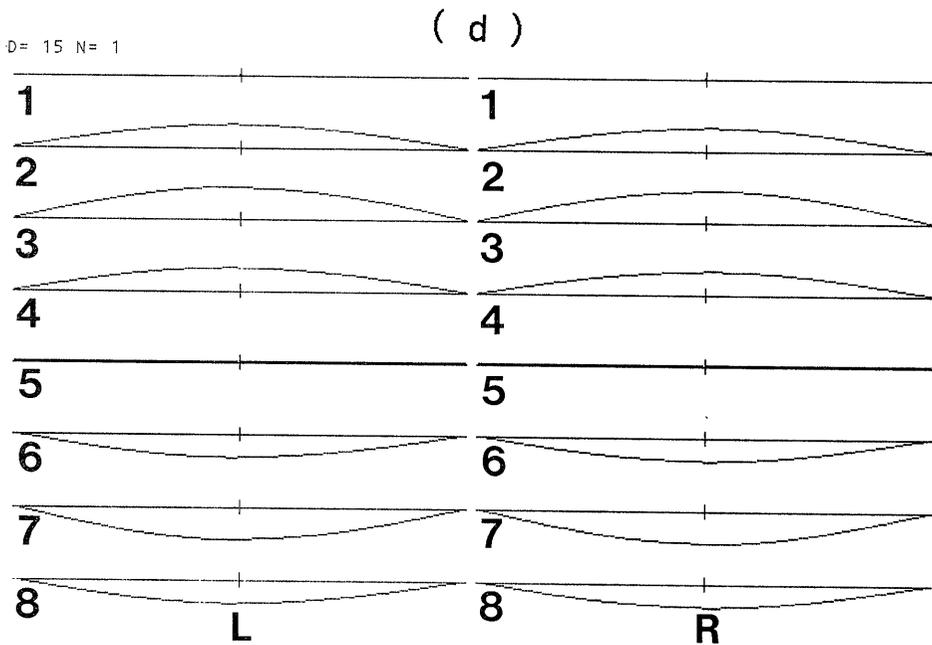
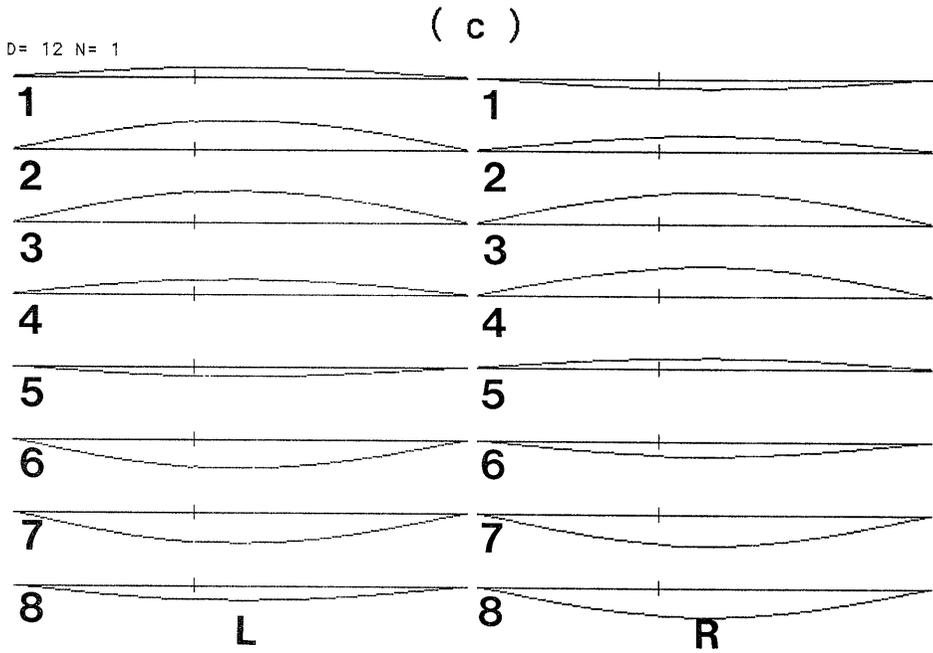


図1 (c) $d=12\text{cm}$, (d) $d=15\text{cm}$

石の位置 d がどのような値であれ、どちらの場合もほとんど同じ大きさとなる。磁石の位置 d の違いは振動の位相の違いとして現れると考えられる。

4. 磁石の位置を変化されたときの弦の振動のシミュレーション

磁石の位置 d を変化されたときの振動の様子を調べるためには、右へ伝播する波と左へ伝播する波のそれぞれの位相を計算しなければならないが、位相が弦の長さ l と磁石の位置 d のほかに弦の座標 x にも依存しており、簡単な形には表せない。しかし、共振の場合は、(7)~(10)式の分母が最小になるときであり、第1近似では第 n モードは $k_n l = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) で表される。その結果、(7)式と(8)式との位相差と(9)式と(10)式の位相差とはどちらも同じであり、左へ伝播した波による定常波の位相に比べて右へ伝播した波による定常波の位相は $\pi - 2kd$ だけ遅れることとなり、 d の値によって決定されることがわかる。

そこでこれらの数式の理解を深めるために、弦が共振する振動の様子をコンピューター・シミュレーションによって視覚的に表現することにした。図1の(a)~(d)には、弦の長さを30cmとし、磁石の位置 d が、それぞれ、6 cm, 9 cm, 12cmと15cmのときの第1モード ($\lambda = 2l, k = \pi/l$) によって表される共振を振動の周期の1/8ごとに系列(1~8)で表した。ただし、減衰係数 a を 0.005cm^{-1} として、各図の右と左の系列は、振動源の磁石の位置から右側へ伝播する波と左側へ伝播する波とを区別して表している。図1(a)~(d)の左の系列に対する右の系列の位相の遅れは、それぞれ、 $3\pi/5, 2\pi/5, \pi/5$ と0となっていることが図からも見て取れる。

弦の振動は、図1における右と左の二つの定常波の重ね合わせによって成り立っている

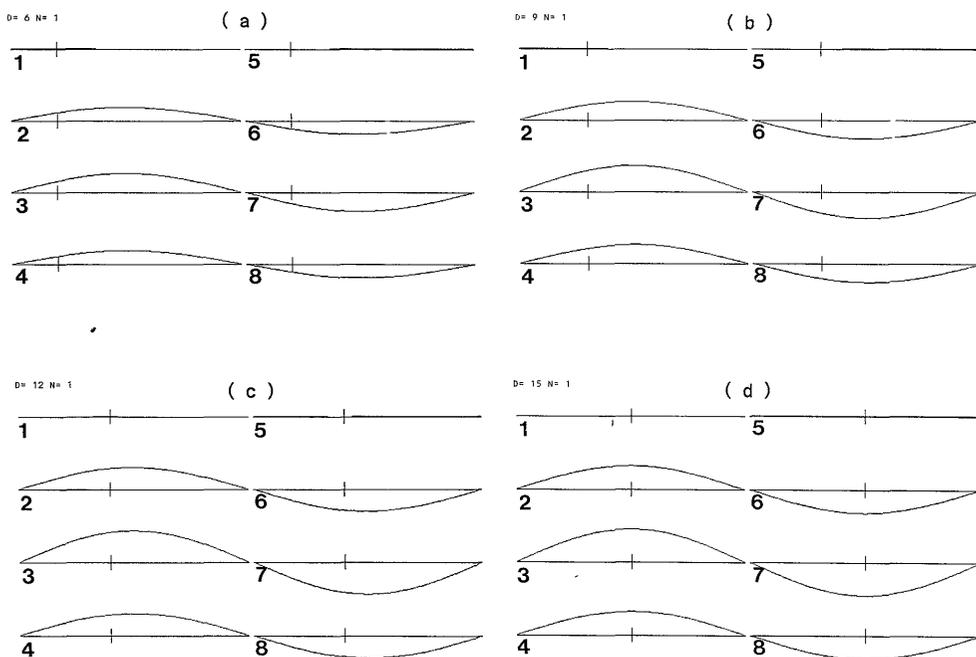


図2 図1の右と左の定常波の合成振動, (a) $d = 6$ cm, (b) $d = 9$ cm, (c) $d = 12$ cm, (d) $d = 15$ cm

と考えることができる。図2の(a)~(d)に、両者の合成波の様子を示した。磁石の位置 d の値の違いによって、弦の振動の振幅の大きさが異なることがわかる。すなわち、位相差が大きければ2つの定常波の合成波は小さな振幅を生じ、位相差が小さくなればこの合成波は2倍の振幅になることがわかる。これらのことから、弦を同じ大きさ A で強制振動させても、磁石の位置によって振幅の大きさが異なるということは、磁石の位置から右へ伝播する波による定常波と左へ伝播する波による定常波が、両者の振幅はほぼ同じ大きさであるが、両者の位相が磁石の位置に依存するずれを起こすので、その重ね合わせによって現される弦の振動に大小の振幅を生じるためと解釈することができる。

これから求まる弦の実際の振動の様子を図3(1~5)に描かせた。上から磁石の位置 d の値は、それぞれ3cm, 6cm, 9cm, 12cmと15cmとした。

次に、高次のモードの場合を考えよう。ここでも1次のモードと同じ議論を展開することができるが、ここではモードの節の位置に相当するところに、磁石の位置をおいた場合にモードが励起されない(振動が大きくならない)のはなぜかを考察する。弦の振動でも弦の一方を滑車に吊るし、他方を音叉などで振動させると、弦の長さが弦を伝わる波の半波長の整数倍のときは大きな振動を生じる。この共振のときは振動源である音叉の位置はちょうど節の位置になっている。このときは振動源の位置がモードの節であるのに励起するのに、両端が固定端の弦の途中のモードの節の位置を振動源としたときはどうして励起されないのだろうか。このことを1次のモードの場合と同様に議論を行うことができる。図4には2次のモード($\lambda = \ell, k = 2\pi/\ell$)のときの定常波の腹の位置 $d = 7.5\text{cm}$ と節の位置 $d = 15\text{cm}$ の場合の右と左への伝播する波の定常波を表した。 $d = 7.5\text{cm}$ の場合は両者の位相が一致し大きな振動を形成するが、 $d = 15\text{cm}$ の場合は両者の位相がちょうど π だけ異なっているため、両方の定常波を合成すると大きな振動となりえないことがわかる(図5)。この場合も、磁石の位置 d を変化させたときの弦の振動の様子を図6(1~5)に描かせてみた。上から $d = 5\text{cm}, 7.5\text{cm}, 10\text{cm}, 12.5\text{cm}$ と 15cm とした。

5. おわりに

弦の1端を固定端とし、他端を電磁音叉で振動させたときの共振時の振幅の大きさは、振動源による影響を考えると、電磁音叉による振動の振幅の大きさに決定する。他方、両端を固定端とした弦の共振時の振幅の大きさは、振動源として磁石と交流電流を流した弦による振動の大きさだけでなく、磁石の位置にも依存する。電磁音叉による共振は振動源の電磁音叉が常に振動モードの節となっているが、両端を固定した弦では振動源の位置

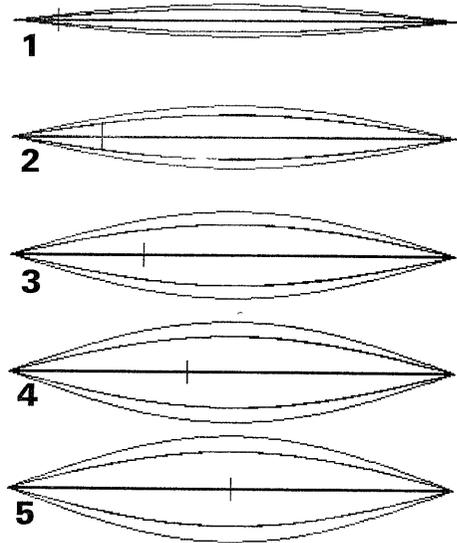


図3 弦の基準振動の定常波。1~5の d の値は上から3cm, 6cm, 9cm, 12cmと15cm

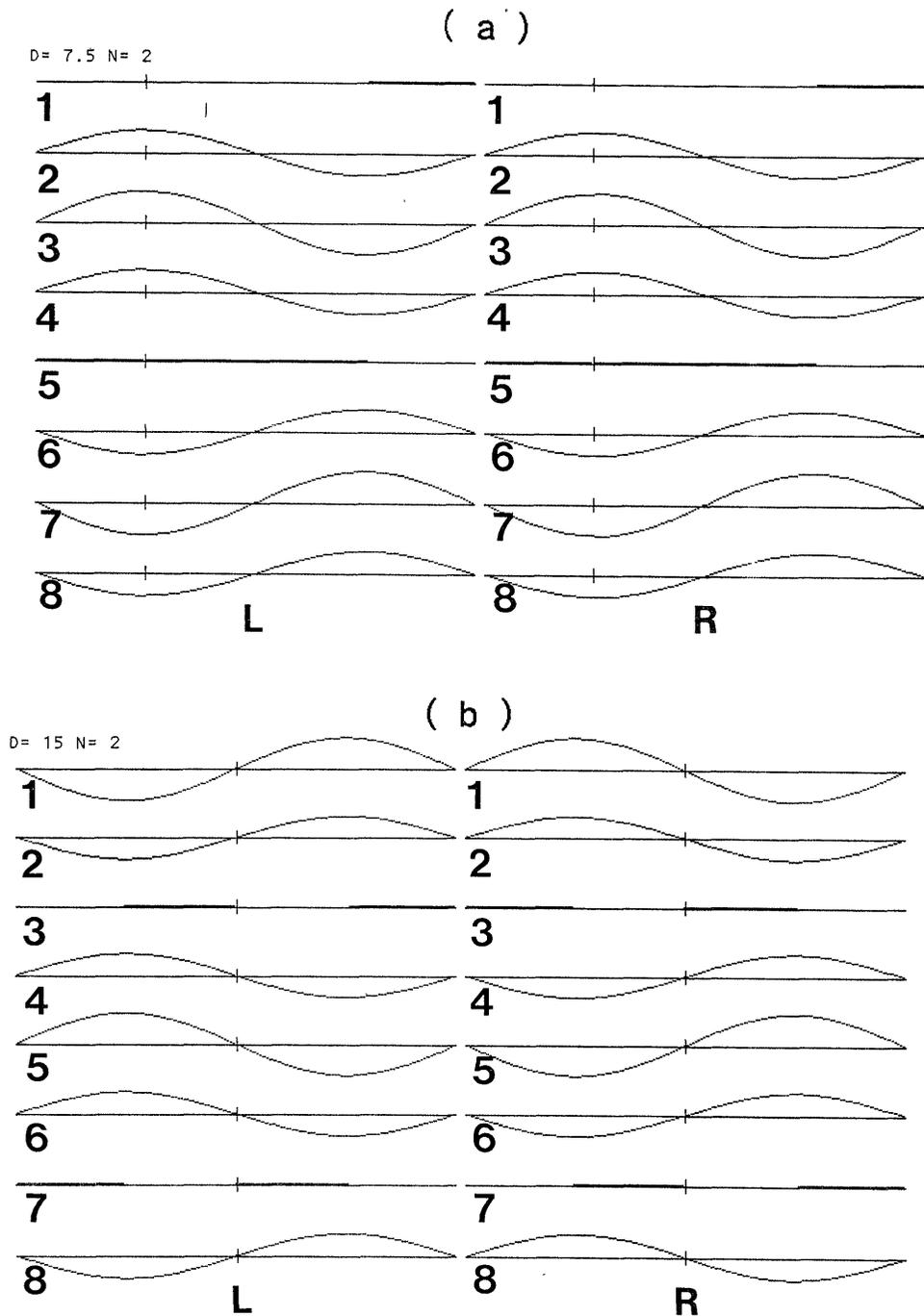


図4. 弦の長さ30cmのときの第2モードの場合で、磁石の位置から右と左へ伝播する波の定常波の8分の1周期の振動, (a) $d=7.5\text{cm}$, (b) $d=15\text{cm}$

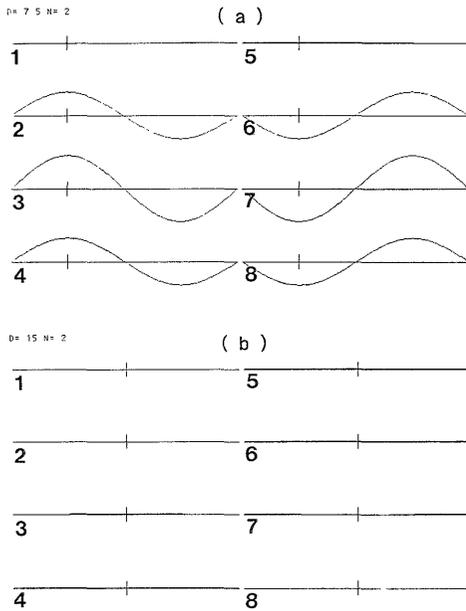


図5 図4の右と左の定常波の合成振動
(a) $d=7.5\text{cm}$, (b) $d=15\text{cm}$

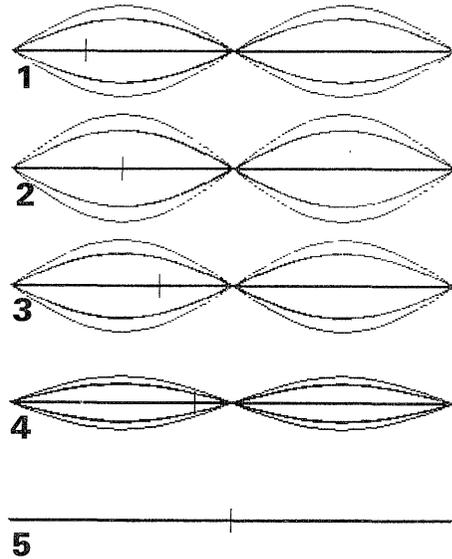


図6 第2モードの弦の定常波. 1~5
の d の値は上から 5cm , 7.5cm , 10cm , 12.5cm と 15cm

が振動のモード節にあたるような振動モードは励起することができない。これらの違いを理解するために多重波の手法により考察をおこなった。前者の共振の場合は、1端からの1方への波動の伝播のみを考察すればいいのに対して、後者の場合は振動源としての磁石の位置から両方への波動の伝播を考察しなければならない。そのため後者の弦に生じる共振の定常波の振幅は、右への伝播によって生じる定常波と左への伝播によって生じる定常波とが、振幅はほぼ同じで位相の異なる振動としてどのように重なるかによって決定する。

ところで、最後に次のことを指摘しておく。図2と図5とから見て取れるように、振動源としての磁石がどのような位置にあったとしても、その定常波の振幅が0となる時刻と最大になる時刻はどの場合も同じになる。すなわち、定常波の振動は減衰係数 a が十分小さいときは磁石の位置 d にほとんど無関係であることは共振時の興味のあることからであり、バイオリンの振動を共振の重ね合わせとして考察できる可能性を示唆しているように思われる。

参考文献

- 1) 福山 豊：長崎大教育自然研報 40 (1989) 13.
- 2) 福山 豊・森田まゆみ：長崎大教育科教育研報 13 (1989) 35.
- 3) 福山 豊・森田まゆみ：物理教育 37-3 (1989) 200.