

# 複合弦の共振現象

福山 豊\*

(平成4年10月30日受理)

## Resonance Phenomena of a Compound String

Yutaka FUKUYAMA

(Received October 30, 1992)

### 1. はじめに

龍溪は、図1に示すような線密度の異なる2本の弦を接続した複合弦の両端に一定の張力を加え、一端をスピーカーや電磁音叉などで単振動させるとき、この弦に生じる定常波について問う問題が大学入試でしばしば出題されることに注目し、この時の定常波の特性について議論を行っている<sup>1)</sup>。彼の研究報告によれば、入試問題では接続点は節になることを前提に出題されてはいるが、

高校生たちの中には線密度の小さい方から大きい方へ伝播する波に対しては接続点が固定端のように考えられるので節と見なせそうだし、他方線密度の大きい方から小さい方へ伝播する波に対しては接続点が自由端のように考えられるので腹と見なせそうでもあると考え、接続点が節とされることに疑問を感じた生徒たちが毎年質問に

訪れてくると述べている。そこで、彼はこの疑問に対する解答を与えるための考察を行った結果、この複合弦が安定な定常波を生じるのは、弦の接続点が節になっているか、または腹になっているかのいずれかの場合であると結論づけている。

しかし、実験を行えば、接続点が節でも腹でもない定常波が存在することが分かっている<sup>2,3)</sup>。龍溪の研究報告の中でこの実験事実を説明できなかった原因は、彼が考察の出発点となる波を、添字*i*が線密度の小さい弦では1、大きい弦では2として、

$$y_i(x, t) = A_i \sin(\omega t - k_i x) + B_i \sin(\omega t + k_i x) \quad (1)$$

と仮定していることによる。ここで*A*,  $\omega$ , *k*はそれぞれ波の振幅, 角振動数, 波数を表す。

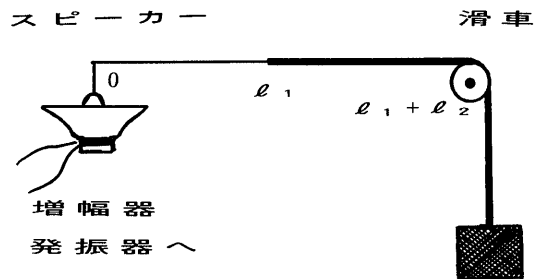


図1 複合弦の振動装置図

\* 長崎大学教育学部物理学教室

この式は接続点  $x=0$  で

$$y_i(0, t) = (A_i + B_i) \sin \omega t \quad (2)$$

と表されるので、(1)式に基づく議論では、 $A_i + B_i = 0$ 、すなわち、 $A_i = -B_i$ のときは接続点が節、また、 $A_i + B_i \neq 0$ のときは接続点が腹のどちらかの定常波になることを前提としていることが分かる。そのため(1)式を用いた議論では、接続点が節でも腹でもない安定な定常波は存在することができない。

そこで結局彼の報告は、接続点が節や腹となる定常波では、それぞれの線密度  $\rho_1, \rho_2$  と長さ  $l_1, l_2$  と定常波の振幅  $A_1$  と  $A_2$  の比がどのような値になるかという問いの解明と実験を行ったものと見なすことができる。

しかし、この場合のより興味ある問いは、任意の弦の長さ  $l_1, l_2$  と、その線密度  $\rho_1, \rho_2$  よりなる複合弦に、どのような振動数で振動させると共振する定常波を生じさせられるか、その結果、接合点ではどのような振動が生じるかという問題を解明することにある。

本報の目的は、この問いを解明するために、スピーカーの振動面に複合弦の一方を取り付けて共振させたとき、この複合弦に生じる定常波の形と接続点での振動の様子を理論的に明らかにすることにある。また、その具体的な例として、 $l_1 = l_2$  で  $\rho_1 : \rho_2 = 1 : 4$  と  $\rho_1 : \rho_2 = 1 : 9$  の複合弦の場合について考察を行った。

これらの考察の結果、接続点では、節と腹のほかに、節でも腹でもない振動を行う定常波も生じること、共振を生じる振動数  $\nu_n (n = 1, 2, \dots)$  のうち“倍振動”は、最小振動数  $\nu_1$  (基本振動数) の整数倍から少しずれることがあり、単一弦のように  $\nu_n = n\nu$  とはならないことなどが導かれた。

## 2. 複合弦の振動理論

スピーカーに結び付けている密度  $\rho_1$  の弦の端を座標の原点にとり、接合点  $l_1$  とし、密度  $\rho_2$  の滑車側の端を  $l_1 + l_2$  とする。弦の張力は  $S$  とする。この複合弦がスピーカーで振動させられると、滑車とスピーカーのあいだに正に向きの負の向きの進行波ができ複合弦に定常波が生じる。 $l_1$  の弦と  $l_2$  の弦の定常波を、それぞれ、 $y_1$  と  $y_2$  とすれば

$$y_1(x, t) = A \sin \{k_1(l_1 - x) + \phi_0\} \sin \omega t, \quad (0 \leq x \leq l_1) \quad (3)$$

$$y_2(x, t) = B \sin \{k_2(l_1 + l_2 - x)\} \sin \omega t, \quad (l_1 \leq x \leq l_1 + l_2) \quad (4)$$

と表される。

ここで波数  $k$  と波の速度  $v$  は

$$k_1 = \omega / v_1, \quad k_2 = \omega / v_2 \quad (5)$$

$$v_1 = \sqrt{S / \rho_1}, \quad v_2 = \sqrt{S / \rho_2} \quad (6)$$

の関係がある。

$y_1$  中の  $\phi_0$  は接合点 ( $x = l_1$ ) で節ではない定常波が生じる可能性をも考慮した。 $y_2$  は滑車のところ ( $x = l_1 + l_2$ ) で節ができる定常波であることを表している。

これらの式の未定の定数  $A, B$  と  $\phi_0$  は、次の3つの条件式

$$y_1(l_1, t) = y_2(l_1, t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial y_1(l_1, t)}{\partial x} = \frac{\partial y_2(l_1, t)}{\partial x}, \quad (8)$$

$$y_1(0, t) = a \sin \omega t \quad (9)$$

から求める。(7)式と(8)式は接合点で両方の弦の変位の値とその接線勾配の値が等しくなることを表しており、(9)式は弦の左端がスピーカーの振動に等しいことを表している。

(3)式と(4)式を(7)~(9)式に代入すると、それぞれ、

$$A \sin \phi_0 = B \sin k_2 \ell_2, \quad (10)$$

$$A k_1 \cos \phi_0 = B k_2 \cos k_2 \ell_2, \quad (11)$$

$$A \sin (k_1 \ell_1 + \phi_0) = a \quad (12)$$

となる。

これらの式を計算して、 $A$ 、 $B$ と $\phi_0$ は

$$A = \frac{a \sqrt{\rho_1 \sin^2 k_2 \ell_2 + \rho_2 \cos^2 k_2 \ell_2}}{\sqrt{\rho_2} \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 + \sqrt{\rho_1} \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2}, \quad (13)$$

$$B = \frac{a \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 + \sqrt{\rho_1} \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2}, \quad (14)$$

$$\sin \phi_0 = \frac{\sqrt{\rho_1} \sin k_2 \ell_2}{\sqrt{\rho_1 \sin^2 k_2 \ell_2 + \rho_2 \cos^2 k_2 \ell_2}}, \quad (15)$$

$$\cos \phi_0 = \frac{\sqrt{\rho_2} \cos k_2 \ell_2}{\sqrt{\rho_1 \sin^2 k_2 \ell_2 + \rho_2 \cos^2 k_2 \ell_2}} \quad (16)$$

と表される。

(13)式と(14)式を(3)式と(4)式に代入すると、 $y_1$ と $y_2$ は、それぞれ、

$$y_1(x, t) = \frac{a \sqrt{\rho_1 \sin^2 k_2 \ell_2 + \rho_2 \cos^2 k_2 \ell_2}}{\sqrt{\rho_2} \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 + \sqrt{\rho_1} \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2} \sin \{k_1 (\ell_1 - x) + \phi_0\} \sin \omega t, \quad (0 \leq x \leq \ell_1) \quad (17)$$

$$y_2(x, t) = \frac{a \sqrt{\rho_1} \sin \{k_2 (\ell_1 + \ell_2 - x)\} \sin \omega t}{\sqrt{\rho_2} \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 + \sqrt{\rho_1} \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2}, \quad (\ell_1 \leq x \leq \ell_1 + \ell_2) \quad (18)$$

と表すことができる。

### 3. 共振と具体的な例

$y_1$ と $y_2$ を表す(17)式と(18)式は、弦 $\ell_1$ と弦 $\ell_2$ のどのような長さの組の複合弦で、かつ、どのような振動数 $\nu (= \omega / 2\pi)$ で振動させる場合であっても生じると考えられる定常波の式である。そこで複合弦の長さ $\ell_1$ と $\ell_2$ と密度 $\rho_1, \rho_2$ が与えられているとき、この複合弦はどのような振動数で共振するかという問題を考えてみることにしよう。このときの共振振動数は、定常波を表す(17)式と(18)式の振幅の大きさが極大になるための条件から求めることができる。

次に、具体的な例で検討するため、複合弦の $\ell_1$ と $\ell_2$ を同じ長さ

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell \quad (19)$$

とし、線密度は

$$\rho_1 : \rho_2 = 1 : 4 \quad (20)$$

の場合を考察する。このときの共振の振動数は、(17)式と(18)式の振幅が極大となるとき

の振動数に対応するが、実際の計算は、両定常波に同じ式となっている振幅の分母の二乗を  $W(\omega)$  で表すと

$$W(\omega) = (\sqrt{\rho_2} \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 + \sqrt{\rho_1} \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2)^2 \quad (21)$$

を極小にする振動数を求めればよい。この式に(19)式と(20)式の関係を入れ、(15)式と(16)式を考慮すれば(21)式の極小を求めることは

$$\begin{aligned} w(k) &= W(\omega)/\rho_1 \\ &= (2 \sin k \ell \cos 2k \ell + \cos k \ell \sin 2k \ell)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

を  $k (= k_1)$  で微分してこの式が極小値をとるときの  $k$  の値を求めることに等しくなる。

この計算をおこなった結果、共振振動数は

$$\sin 2k \ell = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos 2k \ell = -\frac{1}{3}, \quad (23)$$

$$\sin 2k \ell = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \cos 2k \ell = -\frac{1}{3}, \quad (24)$$

$$\sin 2k \ell = 0, \quad \cos 2k \ell = 1 \quad (25)$$

によって決まる  $k$  から導かれることになる。

(23)～(25)式の具体的な数値計算から共振振動数  $\nu^{(n)}$  は、結局

$$\frac{2\pi\ell}{v_1} \nu^{(n)} = \frac{1}{3} \pi (n - p\alpha), \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (26)$$

となることがわかる。ただし、 $\alpha$  はこの場合ほぼ 0.09 となり、 $p$  は

$$p = \begin{cases} 1 \dots\dots 3m - 2 \text{ のとき} \\ -1 \dots\dots 3m - 1 \text{ のとき,} \\ 0 \dots\dots 3m \text{ のとき} \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (27)$$

と約束した。

これらの式から複合弦のそれぞれの波長は

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{6\ell}{n - p\alpha}, \quad \lambda_2^{(n)} = \frac{3\ell}{n - p\alpha}, \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (28)$$

と表されることがわかる。

このときの  $\alpha$  の値は複合弦の接合点での線密度の違いによる波の反射による効果を表している。このことを確かめるため反射係数

$$R_{12} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \quad (29)$$

を導入して、(17)式と(18)式の分母を書き換えてみると、比例定数を無視すれば、

$$v(\omega) = \sin(k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2) - R_{12} \sin(k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2) \quad (30)$$

と変形できる。共振振動数を求めるため、この式の右辺の二乗が極小となる条件を求めるとき、 $R_{12}$  を 0 として計算すれば、(26)式と(28)式で  $\alpha$  は 0 となる関係式が得られる。これから、 $\alpha$  は接合点での反射によって生じる値であることがわかる。

以上のことから、複合弦の共振振動数に関しては、接合点において弦の線密度  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の違いによって決まる波の反射が起こるため、倍振動の振動数  $\nu^{(n)}$  ( $n = 2, 3 \dots$ ) が基本振動の振動数  $\nu^{(1)}$  の整数倍にはなっておらず少しずれていることがわかる。この様子を

図2に示す。このような共振振動数のずれは、実際実験でも報告されている<sup>2,3)</sup>。図3に、(26)式で表される共振振動数のときの定常波(17)式と(18)式をコンピューターによって描いてみた。ただし、共振のとき振幅の式の分母は0となり、振幅が無限大となるので、図3では振幅の分子を $n$ で割った値として描いた。

この図からも分かるようにこのときの定常波は、接合点において、節や腹だけではなく、節でも腹でもない場合も生じることがわかる。

また、 $l_1 = l_2 = l$ で線密度の比が

$$\rho_1 : \rho_2 = 1 : 9 \quad (31)$$

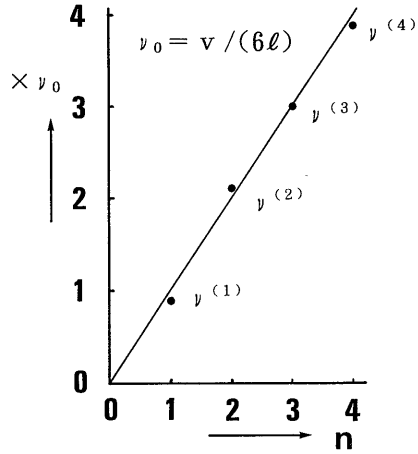


図2 線密度比1 : 4の倍振動数のずれ

の複合弦の場合にも同様の考察をおこなった。このときの共振振動数は

$$\frac{2 \pi \ell}{v_1} \nu^{(n)} = \frac{1}{4} \pi (n - q\beta), \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (32)$$

となることがわかる。ただし、 $\beta$ も接合点での波の反射によって生じる値で、この場合ほぼ0.16となる。 $q$ は

$$q = \begin{cases} 1 \dots\dots 4m - 3 \text{ のとき} \\ 0 \dots\dots 4m - 2 \text{ のとき} \\ -1 \dots\dots 4m - 1 \text{ のとき} \\ 0 \dots\dots 4m \text{ のとき} \end{cases}, \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (33)$$

とした。

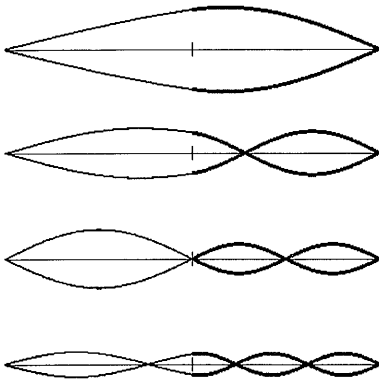


図3 複合弦(線密度比1:4)の共振定常波. 上から基準, 2倍, 3倍, 4倍振動.

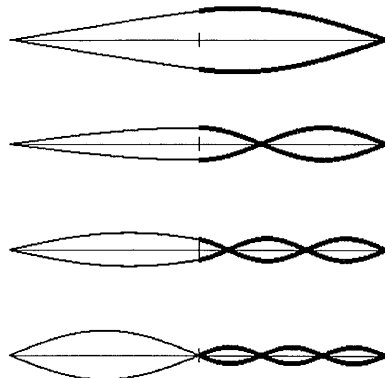


図4 複合弦(線密度比1:9)の共振定常波. 上から基準, 2倍, 3倍, 4倍振動.

図4は、この場合の共振振動数のときの定常波の様子をコンピューターによって描いたものである。この場合も接合点で節や腹だけでなく、節や腹でない定常波が生じることがわかる。

#### 4. 考 察

ここで起こった理論的考察から、どのような弦  $l_1, \rho_1$  と弦  $l_2, \rho_2$  を接合した複合弦に対しても、共振するときの振動数と、定常波の形を導き出せることがわかった。その結果、接合点では節と腹だけでない定常波も生じることと、接合点で波の一部分が反射されるため共振振動数は整数倍にはならないことが導かれた。これらは接続点が厳密な固定端でも自由端でもなく、波が通過とともに反射もする点であることからの帰結と考えられる。

ところで、この理論では、共振定常波の振幅が無限大となっており、実験では共振時でも定常波の振幅は有限の大きさであるという実験事実を正しく表現できていない。さらに、ここでは定常波の時間振動の位相が振動源の位相とつねに同じ  $\sin \omega t$  となっており、両者は一般には異なっているという事実と反している。これらはここでの考察と類似した通常の共振・共鳴理論<sup>4,5)</sup>の共通した特徴である。

これらの点を改良するための1つの方法は、複合弦の定常波を、振動源から複合弦に伝播する正弦波が接続点、滑車、振動源で反射されて複合弦上に閉じ込められた波をすべて重ね合わせて表現するやり方である。ただし、このときの正弦波は伝播距離とともに指数関数的に減衰するものと仮定する。この多重波の手法で得られた定常波の式で減衰係数を0と置けば(17)式と(18)式が導かれる<sup>6)</sup>。多重波の計算はかなり面倒であり、この報告書の目的である複合弦の接続点でどのような状態の定常波が形成されるかを問うには必ずしも必要ではないかもしれないが、実験との定量的な検討を行うときには有効である。

#### 参 考 文 献

- 1) 龍溪信行：日本物理教育学会誌 39-4 (1991) 247
- 2) T. D. Rossing : Am. J. Phys. 43 (1975) 735
- 3) D. E. Hall : Phys. Teach. 27-9 (1989) 673
- 4) 小橋豊：音と音波 (裳華房, 1984) 94
- 5) 中村誠太郎監修：物理学実験 テーマ編 (東海大学出版会, 1982) 38
- 6) 福山豊：長崎大教育自然研報, 45 (1991) 5