

力学における運動法則の図形的理解

福 山 豊*

(平成8年3月15日受理)

A Study on the Teaching of Motion Using Vector Figures

Yutaka FUKUYAMA

(Received March 15, 1996)

1. はじめに

この報告の目的は、力学の基礎をなすニュートンの運動の3法則を理解するために、外力の働いている質点の2次元運動の場合について、慣性による運動と外力による運動とのベクトルの合成を図形によって表し理解する方法を紹介することにある。

通常、力学の教科書では、運動の第1法則として、「物体は外から力を加えないかぎり、静止しているときはいつまでも静止し続けようとし、運動しているときはいつまでも等速直線運動を続けようとする」と表現される。さらに「このことを慣性の法則といい、物体のもつこのような性質を慣性という」と述べられている。

このような表現のために生徒や学生の中には、外力が加えられている場合は、第1法則が成立する前提条件（すなわち、外力が加えられていない場合）と異なる対立する場合と考え、その結果、外力が加えられている場合には、第1法則は成り立たないので慣性による運動は考慮する必要がないと考えているものがある。また、慣性の法則を実証するための等速直線運動の実験は、摩擦のほとんど無い条件下で行われるため、等速直線運動を行わない空気抵抗や摩擦力が働く運動の場合は、慣性とは無縁であると考えている。このように、外力の働く運動の場合には、生徒や学生は慣性の役割をはっきりと理解することができないでいる。

ところで、力学教育の始めに、教科書において慣性概念や慣性の法則の重要性についての記述はしてあるが、生徒たちに慣性概念を正しく理解させるための教材研究はまだ十分には行われていない。また、授業においては慣性の概念や法則を説明した後、運動方程式を解くことに専念するため、方程式を解く数学の中に、集約された物理の部分が十分吟味されて教えられているとは言い難い。そこで、ニュートンの手法の深い理解を可能とすることを目的とし、物体に力が働いているいないにかかわらず、いかなる運動においても、その運動の様子は、慣性による運動と力による運動との両方の運動が、常に合成され次の慣性運動を生じ、それにその時の力の運動を合成するという一連の運動を、ベクトルの図形表示による幾何学的イメージを利用して理解させるための教材研究を行った。

*長崎大学教育学部理科教室

2. 慣性運動と力による運動の合成の図形による表現

力学における運動は、どのように表現できるかを、ベクトル図をつかって見てみることにする。

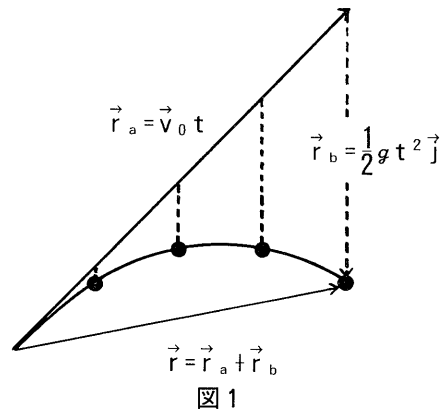
まず、地上での投射運動は、図1に示すように、投射された方向への慣性運動

$$\vec{r}_a = \vec{v}_0 t \quad (1)$$

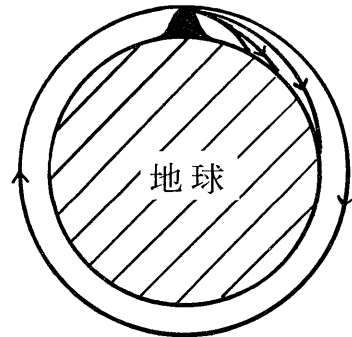
と鉛直下方への(重力による落下運動である)等加速度運動(重力加速度を g とする)

$$\vec{r}_b = \frac{1}{2} g t^2 \vec{j} \quad (2)$$

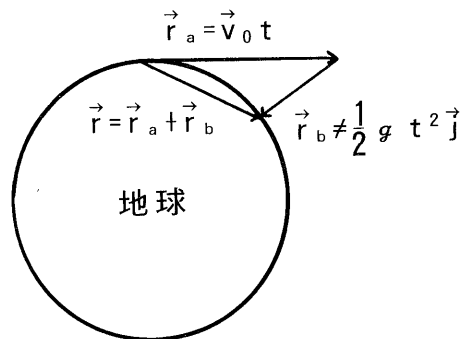
との任意の時間 t での合成の運動として表すことができる。ここで \vec{j} は鉛直下方の単位ベクトルを表すものとする。この図1で、地上での運動は、慣性による運動と力(重力)による運動を合成して表現できることの重要性が認識できる。



次に、地球の周りを回る月や人工衛星の(天上)運動の場合を考えてみる。図2に示すように、水平投射の物体に与える速度をだんだんと大きくすることによって、地球の周りを回る運動が可能であることが理解できる。そこで、このときの月や人工衛星の運動は、任意の時間 t 秒後に、地上の投射の運動と同じ考えとやり方で定量的に理解できるだろうか。これは図で描くと図3のように表されるかということになるが、運動が地表の近くだけに限定されないため、重力による落下運動は等加速度運動にはならず、地上での運動の合成図で簡単には表現することができない。



しかし、この場合の運動も、慣性による等速度運動と重力による等加速度運動の合成で表すという方針を維持するなら、重力による運動が等加速度運動と考えられる短い時間間隔 Δt を考え、その時間間隔ごとに、両者の運動を合成し、新しい速度と等加速度の値を見つけて新しく合成して運動を求めて行くことを考えればよい。重力は地球の中心からの距離に依存して変化するので、時間間隔は小さければ小さいほどその期間での力の大きさと向きは一定となり、



より正確に表現できることになる。

そこで、ある時刻 $t=0$ の位置 \vec{r}_0 （これを原点の0にとると便利）と速度 \vec{v}_0 から、微小な時間 Δt 後の新しい位置 $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}$ と速度 $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \Delta \vec{v}_1$ とを、さらに Δt 後の次の新しい位置 \vec{r}_2 と速度 \vec{v}_2 などと、順次新しい位置 \vec{r}_i と速度 \vec{v}_i を図形で求める方法を考察してみよう。時刻 $t=0$ の速度 \vec{v}_0 が $t=\Delta t$ での速度 \vec{v}_1 になったときの様子を、速度ベクトルの図形で表現すると、図4のようになる。ここで $\vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \Delta \vec{v}_1$ は、 Δt 時間の前後のそれぞれの速度ベクトルの変化を表している。この $\Delta \vec{v}_1$ は、ニュートンの運動の第2法則から

$$\begin{aligned}\Delta \vec{v}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_0 \\ &= (\vec{F}_0/m) \Delta t \\ &= g \Delta t \vec{j}\end{aligned}\quad (3)$$

で表され、その微小時間内で一定と見なした力に関係している ($\vec{F}_0/m = g$)。

次に、この図4の速度ベクトルに、 Δt を掛けると、 $\vec{v}_0 \Delta t$ 、 $\vec{v}_1 \Delta t$ と $\Delta \vec{v}_1 \Delta t$ の関係の幾何学図形が描ける。それを図5に示した。ところで、この図から Δt の間に、力によって速度の変化により生じる変位を求めることができる。マートンの法則により (3) 式を用いて

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \Delta t \\ &= \vec{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \vec{v}_1 (\Delta t)^2 \\ &= \vec{v}_0 \Delta t + (\vec{F}_0/2m)(\Delta t)^2 \\ &= \vec{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \vec{j}\end{aligned}\quad (4)$$

と表されるので、右辺の第1項は、このときの慣性運動で

$$\Delta \vec{r}_1^a = \vec{v}_0 \Delta t \quad (5)$$

と表され、第2項は、力による運動を表す式

$$\Delta \vec{r}_1^b = \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 \quad (6)$$

で表される。(5) 式と (6) 式は、図6を描くことによって容易に表すことができる。その図には、次の時間間隔 Δt の運動を求めるための慣性運動

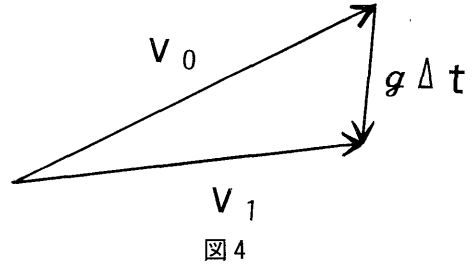


図4

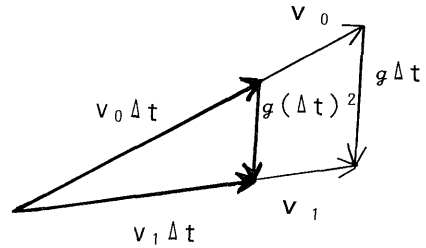


図5

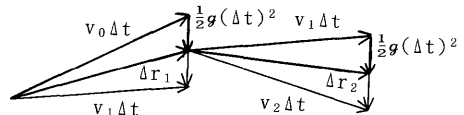


図6

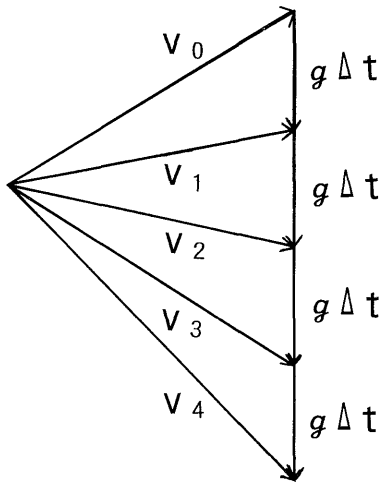


図 7

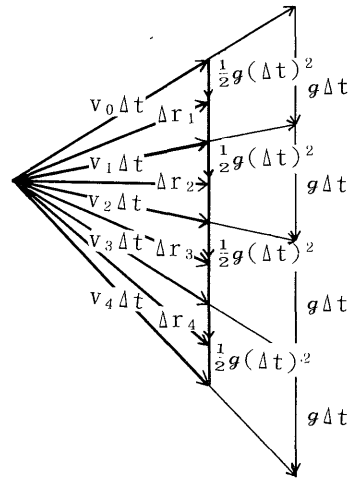


図 8

$$\Delta r_2^a = v_1 \Delta t$$

(7)

の関係が容易に描ける様になっている。

図 7 には地上の運動の場合（力の大きさと向きが一定の場合）の速度ベクトル v_i のそれぞれの様子を、速度ベクトルの支点を揃えて描いてみた。また、微小変位ベクトル $\Delta \vec{r}_i$ ($=\vec{v}_{i-1} \Delta t$) のそれぞれの様子と関連を図 8 に示した。

3. 微小時間ごとの運動の連続合成としての地上運動と天上運動の図形表現

まず、地上の運動（図 1）を、微小時間 Δt ごとの微小運動の合成と見なして図形的に表現してみる。これを図 9 に示した。この図から、はじめの位置 \vec{r}_0 と初速度 \vec{v}_0 が分かっており、そこで働く力の向きと大きさが分かれば、その後の時間の運動の様子が分かることが図を通して理解することができる。この様子を鉛直方向の落下運動として解析的に計算したものは既に前の論文¹⁾で報告しており、トリビアルな計算結果である水平方向の計算を加味すれば、図 9 の図形表示を解析的にサポートするものとなっている。

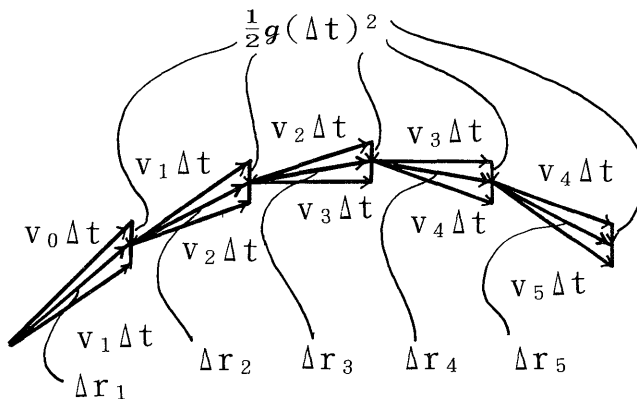


図 9

次に、地球の周りの運動（天上の運動）についても考察する。この場合も、図10に示すように、地上の運動の場合と同様に、はじめの位置 r_0 と初速度 v_0 が分かっており、そこで働く力の向きと大きさが分かれば、その後の時間の運動の様子を求めることができる。

このように、微小時間ごとの運動の連続的な合成によって、それまで別々の理論で説明されていた、地上の運動と天上の運動が同じ手法によって統一して理解できるようになったことは、まさに画期的なことであった。このことが、ニュートン力学を今日でも、教えるに値するものとして受け継がれている所以である。

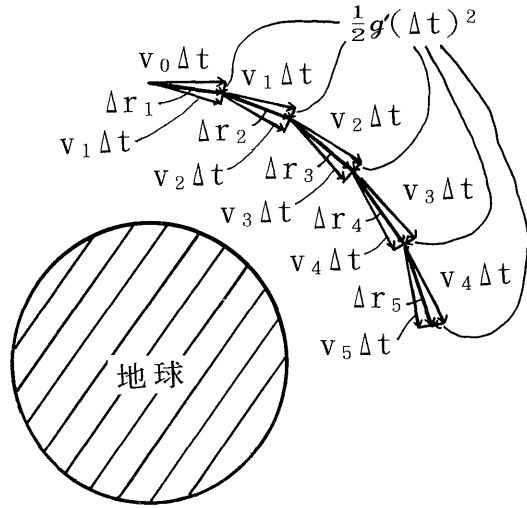


図10

この微小時間間隔 Δt を 0 に近づけることにより、微分積分の表現となり、より数学的に整備された形となった。しかし、上で述べた手法は、慣性の運動と力による運動をベクトルの的に合成することによって、実際の運動が表されている様子を、視覚的に理解させるものとして教育的である。

また、速度に比例する空気抵抗がある場合にも、同様な投射運動の様子を、図形で描くことができる。図11は速度空間ベクトル図であり、空気抵抗によって減速される速度のベクトルを描き加えている。この図11に微小な時間間隔 Δt を掛けて座標空間ベクトルの図としたものを図12に示した。この図から、この時間間隔 Δt のあいだに物体が移動した変位を、ベクトル合成として描いたものが図13である。このようにして微小時間間隔ごとに、

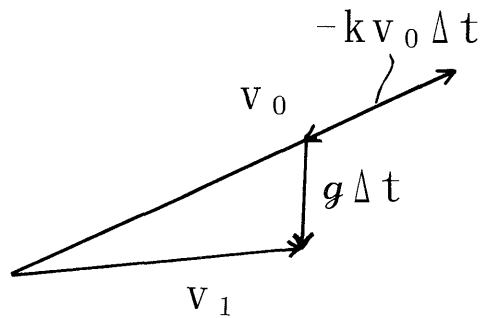


図11

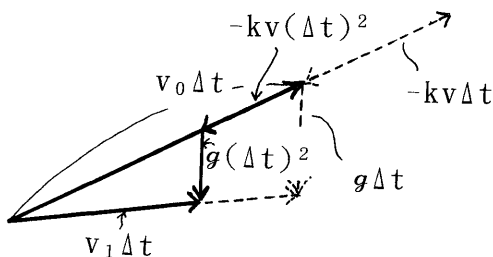


図12

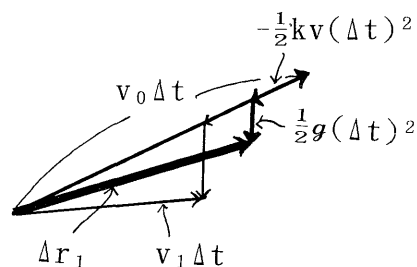


図13

各々の変位を求めて描いて行けば図9に対応する速度に比例する空気抵抗がある場合の運動軌跡の図を描くことができる。

4. 教育的視点からみた運動法則の中の慣性概念

力学の教育は、物理学の基礎であり、多くの機会に教えられているが、その多くの場合は、質量と加速度の積は力に等しいという運動方程式を教え、個々の力に対応して微分方程式を解く作業に重きをおいている。初期条件を用いて、微分方程式を解く作業としての積分は、区分求積法的思考として、運動の第1法則と第2法則を自動的に取り入れて解析的に計算できる仕組みを与えている。これはスマートで、かつ、機械的に結果を導き出せるため、結果を知るのに大層都合がいいし、思考の経済からみても優れている。

しかし、我々のもっている素朴な力と運動の概念とイメージを整理し修正し、新しい力学の概念とイメージを受け入れるためには、数式による運動方程式を解いて結果を得るだけでは不十分である。特に、慣性の性質を十分に理解するためには、ベクトル図による視覚的にも納得できるイメージづくりを是非一度行っておくことが必要である。

慣性の法則、すなわち、運動の第1法則は、運動の第2法則の力が0のときになるので、第2法則に含まれているという議論もあるが、微積分の手法を前提とすれば、その主張にも一理あると思われる。しかし、幾何学的なベクトル図を描きながら、運動を理解するなら、第1法則と第2法則とは各々別のベクトルによって表される、独立した役割としてその意味と重要性を理解する事ができる。

ところで、慣性の法則には、次のような問題が存在する。慣性は力が働かないときだけ存在するのか、それとも、力が働いていないときも存在するのかという問題である。かなりの人が、第1法則の表現から、力が働かないときだけ慣性による運動が存在すると考えている。これは、第1法則の表現が、包括的ベースでの慣性の記述を行うべきところを、歴史的争点を意識するために、逆に大層限定した、極限状態を条件としたベースで慣性の運動を記述していることに起因している。そこで、第1法則を、「物体は、力が働いてるときも、働かないときも、力に関係なく等速度($v=0$ も含む)運動をする性質がある」と表現すること²⁾が、誤解を招く原因を取り去ることになると考えている。力が働かない極限において、ある速度をもった物体は、その速度を維持することが自動的に理解できるからである。もっと別の言い方をすると、運動の法則は、力が働いているという自然で通常の環境のなかで、力に関係しない慣性による等速度運動とそのとき働く力に関係した加速度運動とを微小時間間隔ごとに合成することによって運動を記述し、この速度が、つぎの微小時間間隔の慣性による等速度運動となり、これとこのときの力に関係した加速度運動との合成によってその時間間隔の運動を記述する。この思考法こそがニュートンが考えた天上と地上の運動を統一して理解する手法に外ならないし、この論文でベクトル図として描き考察してきた運動の捉え方である。

参考文献

- 1) 福山 豊：長崎大学教育学部教科教育学研究報告 第51号(1995) 1
- 2) 町田 茂・有尾善繁：現代科学と物質概念(青木書店, 1983) 45