

偏平アーチおよびケーブルに  
現われるカオスの解析

(課題番号 09650531)

平成9年度～平成10年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))  
研究成果報告書

平成11年3月

研究代表者 高橋和雄

(長崎大学工学部教授)

偏平アーチおよびケーブルに

現われるカオスの解析

(課題番号 09650531)

平成9年度～平成10年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))

研究成果報告書

平成11年3月

研究代表者 高橋和雄

(長崎大学工学部教授)

# はしがき

## ① 研究の背景

構造物の非線形振動は航空機でターボジェットエンジンの開発に伴う強い音響負荷を受ける航空機構造部材の板や殻の非線形応答に始まった。1970年頃から土木構造物でも鉄塔の腹材やランガー橋の吊材で大振幅振動が発生したと見られる事例が発生し、ケーブルの振動によって本格的に非線形振動現象が解析され出した。その後非線形振動の研究は、コンピュータシミュレーションの技術の進歩によってカオスまで含んだ応答の解析まで行われるようになってきている。カオスまで含んだ非線形振動は1自由度系としての解析がほとんどである。構造物のカオスを取り扱う場合は、1自由度系としては不十分であり、多自由度系としての解析が必要であるが、このような研究はまだ始まったばかりである。研究代表者らは、これまで連続体を多自由度系で近似し、精度のよい非線形振動解析を行ってきた。さらに、1自由度系に対してカオスの解析をしており、多自由度系としてのカオス解析の準備ができています。

## ② 研究目的

本研究では、微小なライズを持つ扁平アーチ（薄板）およびケーブルが周期的外力を受ける場合の分岐振動である $1/2$ 分数調波共振および超分数調波近傍のカオスの解析を、多自由度系として解析した。また、応答振幅が大きくなる係数励振動を受ける場合のケーブルおよび扁平アーチのカオスを解析する。これらの解析によって構造物に現われるカオス挙動を明らかにするとともに、カオスに及ぼす各種のパラメーターの影響を明らかにした。

## ③ 当該分野におけるこの研究に学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

連続体である構造物の非線形振動に現われるカオスの解析は、多自由度系として取り扱うべきであるが、このような研究はまだ少ない。研究代表者らは連続体の非線形振動解析に対して十分な実績があるため、カオスに及ぼす高次モードや他の自由度の調波成分の影響を評価することに特色・独創的な点がある。本研究によって構造物に現われるカオスの解析、その実際の構造物に現われる可能性を評価できる。

## ④ 主な研究成果

(1) 初期形状がはりの回転半径程度の扁平アーチの非線形振動を多自由度系としてモデル化して、非線形運動方程式を誘導する。周期的外力を受ける場合の主共振、分岐振動である分数調波共振、超分数調波共振を明らかにし、付随および分岐で現われる周期的応答の性質を明らかにした。

(2) 得られた多自由度系の非線形運動方程式の数値シミュレーション解析を行い、周期解のほかにカオス解を求める。カオスが現われる振動数近傍の解析を分岐図、パワースペク

トル、ポアンカレマップなどを用いて詳細な分析を行った。これによって、カオスの発生に及ぼす他の振動モードの影響(多自由度系としての影響)を評価した。

(3) カオスのコンピュータ画面上における表示法を調査して、カオスの発生を確認する手法を検討している。

(4) 板厚と同程度のライズを持つ長方形板の非線形振動解析を行い、非線形振動特性を境界条件、ライズ比など影響を評価した。さらに、多自由度系としての取扱いを行い、高次モードの影響を明らかにした。

(5) 周期的外力を受ける偏平ケーブル(サグ比1/8以下)の非線形振動を多自由度系としてモデル化して、主共振、分岐振動である分数調波共振および超分数調波共振を解析した。

(6) 国内外の斜張橋の振動実験などにおいて、ケーブルに係数励振によると考えられる非線形振動が発生している。本研究では、30橋の斜張橋の全体振動とケーブルの局部振動の関係を明らかにした。さらに、局部振動の振幅や発生範囲を求めた。

(7) 多自由度の非線形振動に現われるカオスに関する文献や構造物に現われるカオスに関する文献を調査し、最近の研究のレビューを行った。

(8) これらの研究から、構造物に現われるカオスの存在領域を振動数や荷重強度の関係からある程度評価することができた。

#### 研究組織

研究代表者：高橋和雄 長崎大学工学部教授

研究分担者：岡林隆敏 長崎大学工学部教授

#### 研究経費

平成9年度	1 8 0 0 千円
平成10年度	1 3 0 0 千円
計	3 1 0 0 千円

#### 研究発表

##### (1)学会誌等

1. K.Takahashi, C.R.Herath and H.Hanada: Nonlinear Response of Small Sag Cables Excited by Periodic Motions of Their Supports, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.45, pp.287-292 (1997.10)

2. K.Takahashi, C.R.Herath and H.Hanada: Nonlinear Dynamic Response of Cable Subjected to Support Excitation, Proceedings of Asia-Pacific Vibration Conference '97, Vol.2, pp.940-944 (1997.11)

3. 高橋和雄, 花田博史, 鎌田知之, 山口健市: 変動軸力と面内変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形振動の補足, 土木学会論文集, No.570, I-40, pp.331-335 (1997.7)

4. 高橋和雄, 花田博史: 周期的変動軸力を受ける偏平ケーブルの分岐応答に及ぼす高次モードの影響, 長崎大学工学部研究報告, 第28巻, 第50号, pp.83-90 (1998.1)

5. 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状および境界条件の影響

響，長崎大学工学部研究報告，第28巻，第50号，pp.91-96 (1998.1)

6. 高橋和雄，三堂 聡：ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動に関する研究，長崎大学工学部研究報告，第28巻，第51号，pp.199-206 (1998.7)

7. K.Takahashi and S.Midou: Multiple-degree-of-freedom Approach to Nonlinear Vibration Properties of a Rectangular Plate with a Small Rize, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.47 (1997.10) (投稿中)

## (2) 口頭発表

1. 花田博史，高橋和雄：変動軸力を受ける偏平ケーブルの分岐応答に及ぼす高次モードの影響，土木学会第52回年次学術講演会講演概要集第1部，pp.438-439，東京 (1997.9)2
2. HERATH.M.C.R, 梶原圭介，高橋和雄：斜張橋のケーブルの係数励振振動の解析，同上，pp.440-441，東京 (1997.9)
3. 太田晶一，高橋和雄：偏平アーチの非線形振動—多自由度系の応答—，同上，pp.444-445，東京 (1997.9)
4. 川北省二，HERATH.M.C.R, 高橋和雄：斜張橋の支持ケーブルの非線形分岐応答解析，平成9年度土木学会西部支部研究発表会，pp.82~83，熊本 (1998.3)
5. 三堂聡，高橋和雄：ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動の解析，同上，pp.86~87，熊本 (1998.3)
6. 三堂聡，高橋和雄：ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動の解析，土木学会第53回年次学術講演会講演概要集第1部(B)，pp.962~963，神戸 (1998.10)
7. 川北省二，HERATH.M.C.R, 高橋和雄：斜張橋の支持ケーブルの局部振動の解析，同上，pp.968~969，神戸 (1998.10)
8. 三堂聡，高橋和雄：ライズを持つ長方形板の多自由度系としての非線形振動特性の解析，第48回応用力学連合講演会講演予稿集，pp.41-42，東京 (1999.1)
9. 三堂聡，高橋和雄，佐藤規裕：ライズを持つ長方形板の多自由度系としての非線形振動，平成10年度土木学会西部支部研究発表会，pp.120~121，北九州 (1999.3)
10. 久保田展隆，山本幹広，高橋和雄，Wu Qing Xiong：斜張橋の支持ケーブルの局部振動発生に及ぼすパラメーターの影響，同上，pp.126~127，北九州 (1999.3)

## 目 次

1. 偏平アーチの非線形振動とカオス	1
2. 偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状および境界条件の影響	6 0
3. ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動に関する研究	6 6
4. Multiple-degree-of-freedom Approach to Nonlinear Vibration Properties of a Rectangular Plate with a Small Rize	7 4
5. 変動軸力と面内変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形振動の補足	8 2
6. Nonlinear Response of Small Sag Cables Excited by Periodic Motions of Their Supports	8 7
7. 斜張橋の支持ケーブルの局部振動の解析	9 3
8. 周期的変動軸力を受ける偏平ケーブルの分岐応答に及ぼす高次 モードの影響	1 0 5

# 1. 偏平アーチの非線形振動とカオス

## 第1章 はじめに

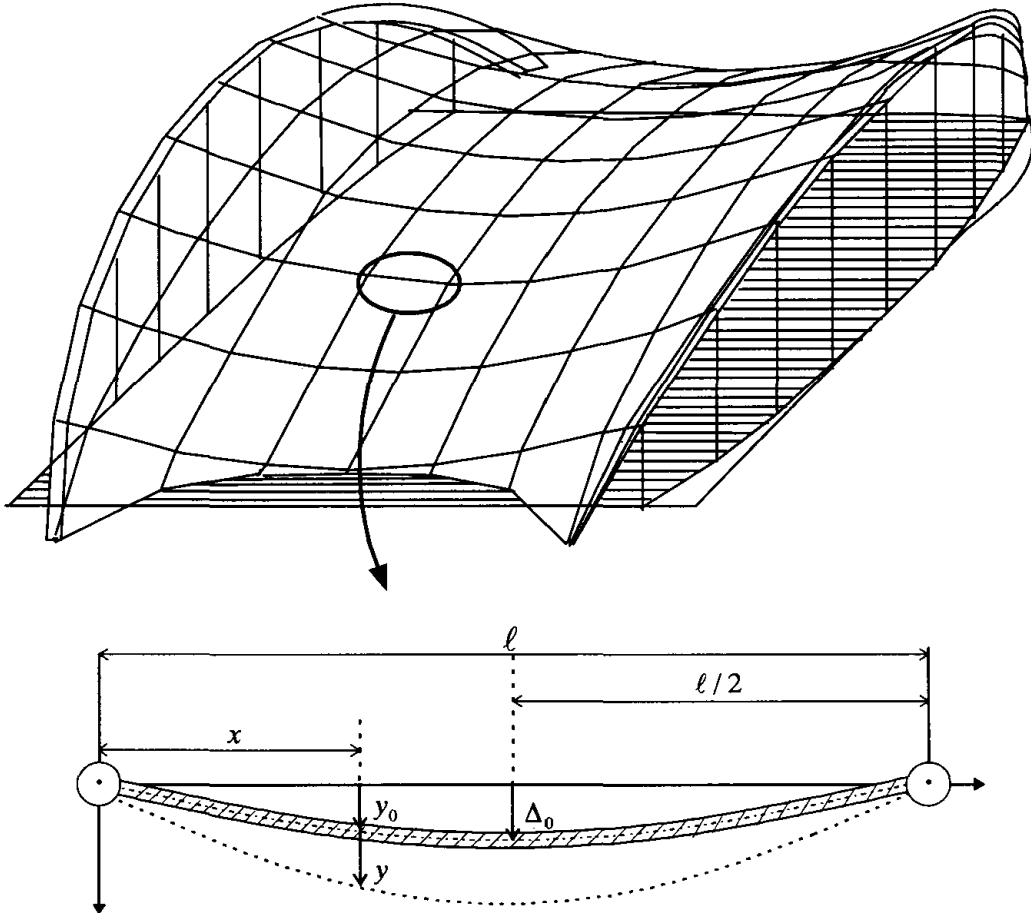


図-1.1 本論文で取り扱う偏平アーチの一例

近年，土木構造物は単に構造物としての機能を果たすのみでなく，地域に根付くランドマークとして期待されるため，安全性，経済性はもちろんのこと，周辺環境との調和を含めた景観への配慮が必要不可欠な要因となっている．さらに最近，構造物では大規模化および軽量化への傾向が一段と強くなっている．そのため，構造部材の使用効率の良さなどから，長さに比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている．薄肉構造部材では，アーチとしての機能を期待して構造特性を活用するためにライズを設ける他に，製作過程，支持部の出来具合および自重の影響などからライズが必ず存在する．

ライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり，偏平アーチとみなすことができる<sup>1)</sup>(**図-1.1 参照**)。偏平アーチは，曲率構造(ライズが存在)のため剛性が高い。しかし，飛び移り座屈を含めた不安定現象<sup>2)</sup>が生じやすく，ライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。ライズによって生ずる2次の非線形項が座屈特性に重要な役目を果たす。振動の場合にも，非線形振動<sup>3)</sup>，動的座屈<sup>4)</sup>，カオス<sup>5)</sup>などにライズの大きさおよび形状が大きな影響を及ぼすことが予想され，各方面で解析が行われている。偏平アーチの非線形振動の挙動はきわめて複雑で，カオスの存在，振動モード間の連成の影響および動的座屈など未解明な問題が残されている。

このような観点から，本研究はまず偏平アーチを1自由度系に近似し，非線形振動特性を，ライズ比，荷重強度および減衰定数をパラメーターに解析を行う。また，1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスを解析する。偏平アーチは連続体であるから，多自由度系としての解析が必要である。そこで，偏平アーチを2自由度系近似し，3次振動の自由振動および強制振動特性を検討し，3次振動の非線形応答をライズ比および減衰定数をパラメーターに解析を行うとともに，1次振動近傍の分岐振動に及ぼす3次振動の影響を明らかにする。さらに，初期形状および境界条件が非線形振動特性に及ぼす影響について検討を行う。

解析にあたっては，運動方程式に Galerkin 法を用いて多自由度系の非線形振動問題に変換し，さらに調和バランス法を適用して，連立代数方程式に変換し，Newton-Raphson 法により解析解を求める。また，カオスおよび動座屈の解析は，Runge-Kutta-Gill 法を適用した時間応答解析を用いる。

各章の内容を以下に示す。

第1章では，本論文の目的と概要を述べる。



第2章では、面内荷重を受ける偏平アーチの非線形運動方程式を誘導する。

第3章では、第2章の非線形運動方程式を常微分方程式に変換し、調和バランス法を用いる解法と、Runge-Kutta-Gill法を用いる時間応答解法について述べる。

第4章では、偏平アーチに現れる1次振動の1/2分数調波共振について調和バランス法による解析および時間応答解析を1自由度系について行う。偏平アーチの形状パラメータであるライズ比、荷重強度および減衰定数の影響を明らかにする。さらに、1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスの存在について明らかにする。

第5章では、偏平アーチを2自由度系で近似し、3次振動の非線形振動特性および1次振動の1/2分数調波近傍に及ぼす3次振動の影響について調和バランス法による解析および時間応答解析を行う。3次振動について、偏平アーチの形状パラメータであるライズ比および減衰定数の影響を明らかにする。また、1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスについて、3次振動の影響を評価する。

第6章では、偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状の影響について検討を行う。

第7章では、偏平アーチの非線形振動に及ぼす境界条件の影響について、両端ヒンジと両端固定の両者の非線形応答の特性を比較し検討を行う。

第8章では、以上によって得られた結果を総括する。

## 第 2 章 非線形運動方程式

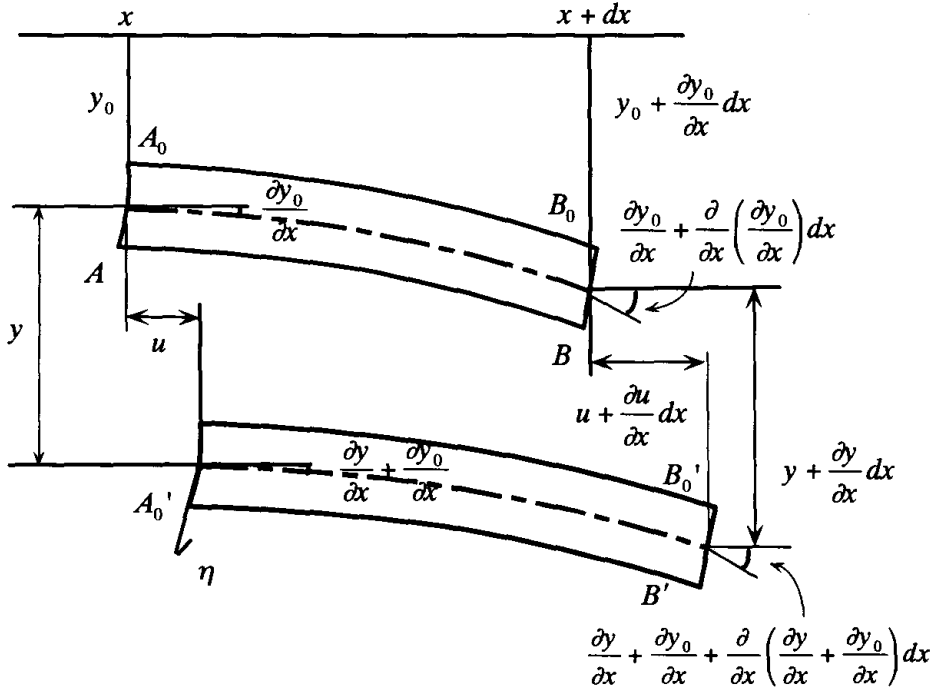


図-2.1 はりの微小要素

はりの回転半径と同程度の扁平なライズをもつアーチを対象とする。初期形状  $y_0$  をもつ一様断面の細長いはりに周期荷重  $p \cos \Omega t$  が作用する場合の非線形振動の運動方程式を誘導する。基礎式の誘導にあたって次の諸事項を仮定する。

- (1)  $u < r$
- (2)  $y = 0(r) \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| < 1 \quad \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 0(\epsilon) \quad (0 : \text{オーダー})$
- (3)  $y_0 = 0(r)$
- (4) 軸方向の慣性力および回転慣性力は無視する。
- (5) 両端で軸方向変位拘束

ここに、 $u$  : 軸方向変位、 $r$  : 回転半径、 $y$  : たわみ、 $x$  : はりの支点からの距離、 $y_0$  : 初期形状。

図-2.1に示すようなはりの任意点のひずみ  $\epsilon_x$  および応力  $\sigma_x$  を求めると次のように得られる<sup>1)</sup>。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= (A'B' - AB) / AB - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
&= \varepsilon_0 - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{2-1}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \tag{2-2}$$

ここに、 $\eta$ ：中立軸からの距離、 $\varepsilon_0$ ：中立軸のひずみ、 $E$ ：ヤング率。

よって、はりの全体のひずみエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \iint E \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) - \eta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx dS \tag{2-3}$$

ここに、 $S$ ：断面積。

運動エネルギー  $T$  は、はりの密度を  $\rho$  すれば

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx dS \tag{2-4}$$

荷重のなす仕事  $W$  は、

$$W = \int y p_0 \cos \Omega t dx \tag{2-5}$$

ここに、 $\Omega$ ：荷重の円振動数、 $t$ ：時間、 $p_0$ ：荷重振幅。

式 (2-3)、式 (2-4) および式 (2-5) を用いて、一般化 Lagrangian  $L' = T - V + W$  が得られ、Hamilton の原理は次のように表される。

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L' dt = 0 \tag{2-6}$$

$\delta y$  および  $\delta u$  の任意性から横方向および軸方向の運動方程式は次のように得られる。

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) \right) = p_0 \cos \Omega t \tag{2-7}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} = 0 \quad (2-8)$$

ここに、 $I$ ：断面 2 次モーメント。

式(2-8)より、はりの中立軸のひずみが一定であることが明らかにより、また両端で軸方向変位拘束を考慮すれば次のような運動方程式が得られる。

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + N_x \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (2-9)$$

$$N_x = -\frac{ES}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \quad (2-10)$$

ここに、 $N_x$ ：たわみによる変動軸力。

上式は偏平アーチの非線形振動問題、動的安定問題や製作過程、支持部の出来具合および自重による影響などによって生ずる初期不整をもつはりの非線形振動問題に適用すべき運動方程式である。

式(2-9)に、粘性減衰抵抗  $c \frac{\partial y}{\partial t}$  の項を加え、 $N_x$ を消去すれば、偏平

アーチの運動方程式は初期軸力がない場合に次のように表される。

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + c \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{ES}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \quad (2-11)$$

### 第3章 非線形運動方程式の解法

#### 3.1 Galerkin 法による常微分方程式への解法

初期形状は境界条件を満足しなければならないから、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \quad (3-1)$$

ここに、 $\Delta = \Delta_0 / r$  : ライズ比、 $\bar{X}(x)$  : ライズの形状関数。

式(2-11)の解を、次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \quad (3-2)$$

ここに、 $X_n$  : 座標関数、 $T_n$  : 未知の時間関数。

上式の座標関数  $X_n$  として、ライズが零の直線ばりの固有振動形を用いる。

式(3-1)、式(3-2)を式(2-11)に代入し、Galerkin 法を適用すれば、次のような時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( Q_k^0 R_{\ell n} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{k\ell} \right) T_k T_\ell \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{k\ell m}^n T_k T_\ell T_m = \gamma_n P \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (3-3)$$

$$\text{ここに、} \alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2, \quad S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^\ell \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi, \quad Q_k^0 = \int_0^\ell \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi,$$

$$R_{\ell n} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^\ell \frac{d^2 X_\ell}{d\xi^2} X_n d\xi, \quad P_{k\ell} = \int_0^\ell \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_\ell}{d\xi} d\xi,$$

$$\beta_{k\ell m}^n = -\frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_\ell}{d\xi} d\xi \int_0^\ell \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n), \quad \gamma_n = \int_0^\ell X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n).$$

$$x_n = \int_0^l X_n^2 d\xi, \xi = x/l, p = p_0 \ell^4 / EI r, \lambda_1 = \ell^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}, \omega = \Omega / \omega_1, \omega_1 : \text{ラ}$$

イズのないはりの線形 1 次固有円振動数,  $\tau = \omega t$ .

### 3.2 両端ヒンジの偏平アーチへの適用

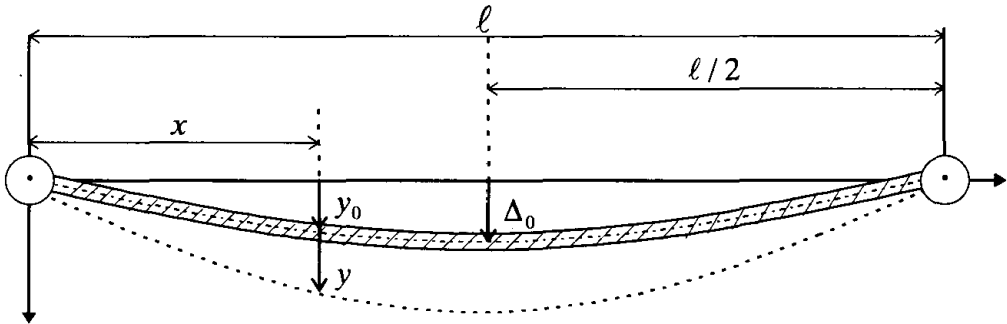


図-3.1 偏平アーチの一般図

(a) 1 自由度系の場合

図-3.1 に示すような両端ヒンジの偏平アーチが、ライズの形状関数  $\bar{X} = \sin \pi \xi$  をもつ場合の対称振動を考える。系を 1 自由度系と仮定し、 $T_1$  を  $T$  とおき線形減衰力を考慮すれば、式(3-3)は次式となる。

$$\ddot{T} + 2h\alpha\dot{T} + \alpha^2 T + \frac{3}{4}\Delta T^2 + \frac{1}{4}T^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \omega \tau \quad (3-4)$$

ここに、 $\alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\Delta^2}$  : 1 次固有円振動数。

式(3-4)に示すようにライズの影響は、線形振動数には自乗で効いてくるため、ライズ比が 1 を超えると大きな影響を及ぼす。また、ライズ比は 2 次の非線形項の係数に含まれている。2 次の非線形項は振幅が大きくなると、3 次の非線形項に比べて小さくなる。したがって、ライズ比の影響は振幅が大きくないときに効いてくること

が予想される。

(b) 2 自由度系の場合

偏平アーチの非線形振動について多自由度系としての振動モード間の連成の影響を含めた解析を行うため、偏平アーチを 2 自由度近似する。系を 1 次振動と 3 次振動の 2 自由度系と仮定し、線形減衰力を考慮すれば式(3-3)は次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + \frac{3}{4}\Delta T_1^2 + \frac{9}{4}\Delta T_3^2 + \frac{9}{4}T_1 T_3^2 + \frac{1}{4}T_1^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \omega t \quad (3-5)$$

$$\ddot{T}_3 + 18h_3\dot{T}_3 + 81T_3 + \frac{9}{2}\Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4}T_1^2 T_3 + \frac{81}{4}T_3^3 = \frac{4}{3\pi^5} p \cos \omega t \quad (3-6)$$

ここに、 $h_1, h_3$  : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + \Delta^2/2}$ 。

式(3-5), (3-6)はライズの形状が正弦波の場合の偏平アーチの 1 次、3 次振動の連立非線形運動方程式である。式(3-5), (3-6)は連立の 2 次の非線形項をもつ Duffing の方程式である<sup>7)</sup>。非線形運動方程式には主調波応答の他に、高調波共振、分数調波共振、超分数調波共振およびカオスなどの各種の現象が存在しうるが、本論文ではまえがきに述べたように偏平アーチの形状パラメーターが 3 次振動に及ぼす影響および 1 次振動の 1/2 分数調波共振近傍に現れるカオスに及ぼす 3 次振動の影響を評価する。

$T_1$  および  $T_3$  の自乗、3 乗の項が無視できる線形振動に注目すると、1 次振動の固有円振動数  $n_1 = \sqrt{1 + \Delta^2/2}$  はライズ比の影響を受けるのに対して、3 次振動の固有振動数  $n_3 = 9$  はライズ比の大きさに無関係である。

次に、非線形自由振動 ( $p = 0$ ) に注目して、1 次振動  $T_1$  が発生した場合を考える。式(3-6)に 1 次振動の単独項が含まれていないため、3 次振動  $T_3$  は直接加振されない。つまり 1 次振動が単独に生じ得る。したがって、1 次非線形自由振動については、1 自由度系としての

取り扱いで十分である。しかし、式(3-6)において $T_1$ の項が $\frac{9}{2}\Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4}T_1^2 T_3$ のように $T_3$ に関する方程式の係数として含まれるため、 $T_1$ が周期振動する場合には、式(3-6)は係数励振型の運動方程式となる。このため、特別なライズ比でのみ $T_3$ が分岐的に発生しうる。これについては別途取り扱う必要がある。

一方、3次振動 $T_3$ が生じた場合、1次振動の運動方程式(3-5)に3次振動の単独項 $\Delta T_3^2$ が含まれているため、 $\Delta T_3^2$ の項が外力となり1次振動 $T_1$ が加振される。したがって、3次非線形自由振動は1次振動と連成するため、1自由度系としての取り扱いが不可能で、多自由度系として取り扱う必要がある。

なお、強制振動の場合( $p \neq 0$ )を考えると、1次および3次振動ともに加振されるため、多自由度系としての取り扱いが必要である。なお、ライズの形状が正弦波以外の場合には、式(3-5)および式(3-6)とは異なった $T_1$ と $T_3$ 間の連成を示すことが予測される。

### 3.3 調和バランス法による解法

#### (a) 1次振動の1/2分数調波共振(1自由度系)

1自由度系において、1次振動の1/2分数調波共振を求めるために、式(3-4)の解を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} T &= \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega\tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega\tau}{2} + c_1 \cos \omega\tau + s_1 \sin \omega\tau \\ &= \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \phi_{1/2}\right) + A_1 \cos(\bar{\omega}\tau - \phi_1) \end{aligned} \quad (3-7)$$

ここに、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$  : 分岐応答成分、 $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$  : 付随応答成分、 $\phi_{1/2} = \tan^{-1}\left(\frac{s_{1/2}}{c_{1/2}}\right)$ 、 $\phi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{s_1}{c_1}\right)$  : 位相差、 $c_0, c_1, s_1$  : 付随型の



振幅成分,  $c_{1/2}, s_{1/2}$  : 分岐型の振幅成分.

式(3-7)を式(3-4)に代入して, 調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる. これに Newton-Raphson 法を用いて解けば, 振幅成分が得られる.

(b) 1次振動の 1/2 分数調波共振 (2 自由度系)

2 自由度系の解析として 3 次振動の自由振動, 強制振動特性および 1 次振動の 1/2 分数調波共振近傍に及ぼす 3 次振動の影響を明らかにする. 1 次振動の 1/2 分数調波共振は固有振動数の 2 倍付近に生ずる. この振動数領域には, 3 次振動の 2 倍の高調波共振が生ずる. また, 3. 1 節で述べたように, 式(3-6)に  $T_3^2$  が含まれているため, 3 次振動が加振された場合  $T_3 = \cos \omega \tau$  とすると,  $T_3^2 = (1 + \cos 2\omega \tau) / 2$  となる. このため, 1 次振動  $T_1$  に 2 倍の高調波共振成分が加振されることになる. 以上のような理由から, 式(3-5), (3-6)の解を本論文では次式のように仮定する.

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_{11} \cos \omega \tau + s_{11} \sin \omega \tau \\ &+ c_{12} \cos 2\omega \tau + s_{12} \sin 2\omega \tau \\ &= c_{10} + A_{11/2} \cos \left( \frac{\omega \tau}{2} - \phi_{11/2} \right) + A_{11} \cos(\omega \tau - \phi_{11}) + A_{12} \cos(2\omega \tau - \phi_{12}) \quad (3-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= c_{30} + c_{31} \cos \omega \tau + s_{31} \sin \omega \tau + c_{32} \cos 2\omega \tau + s_{32} \sin 2\omega \tau \\ &= c_{30} + A_{31} \cos(\omega \tau - \phi_{31}) + A_{32} \cos(2\omega \tau - \phi_{32}) \quad (3-9) \end{aligned}$$

ここに,  $A_{11} = \sqrt{c_{11}^2 + s_{11}^2}$ ,  $A_{31} = \sqrt{c_{31}^2 + s_{31}^2}$ ,  $A_{32} = \sqrt{c_{32}^2 + s_{32}^2}$  : 付随応答成分,  $A_{11/2} = \sqrt{c_{11/2}^2 + s_{11/2}^2}$ ,  $A_{12} = \sqrt{c_{12}^2 + s_{12}^2}$  : 分岐応答成分,

$$\phi_{11/2} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{11/2}}{c_{11/2}} \right), \quad \phi_{11} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{11}}{c_{11}} \right), \quad \phi_{12} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{12}}{c_{12}} \right),$$

$$\phi_{31} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{31}}{c_{31}} \right), \quad \phi_{32} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{32}}{c_{32}} \right) : \text{位相差, } c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12} :$$

1 次振動の振幅成分,  $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$  : 3 次振動の振幅成分.

式(3-8), (3-9)を式(3-5), (3-6)に代入して, 調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる. これに Newton-Raphson 法を用いて解けば, 定常振動の振幅成分が得られる. また, 荷重強度を  $p=0$  とすれば, 非線形自由振動数  $\omega$  と自由振動の振幅成分との関係が得られる.

### 3.4 Runge-Kutta-Gill 法による時間応答解析

(a) 1 自由度系の場合

$T = P_1, \dot{T} = P_2$  とおくと, 式(3-4)は次に示す 2 個の 1 階常微分方程式に変換することができる.

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h\alpha P_2 - \alpha^2 P_1 - \frac{3}{4}\Delta P_1^2 - \frac{1}{4}P_1^3 + \frac{4}{\pi^5}p \cos\omega\tau \end{aligned} \quad (3-10)$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて, 時間応答解析を行う.

(b) 2 自由度系の場合

$T_1 = P_1, \dot{T}_1 = P_2, T_3 = P_3, \dot{T}_3 = P_4$  とおくと, 式(3-5), (3-6)は次に示す 4 個の 1 階常微分方程式に変換することができる.

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h_1\alpha_1 P_2 - \alpha^2 P_1 - \frac{3}{4}\Delta P_1^2 - \frac{9}{4}\Delta P_3^2 - \frac{9}{4}P_1 P_3^2 - \frac{1}{4}P_1^3 + \frac{4}{\pi^5}p \cos\omega\tau \end{aligned} \quad (3-11)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_3 &= P_4 \\ \dot{P}_4 &= -18h_3 P_4 - 81P_3 - \frac{9}{2}\Delta P_1 P_3 - \frac{9}{4}P_1^2 P_3 - \frac{81}{4}P_3^3 + \frac{4}{3\pi^5}p \cos\omega\tau \end{aligned} \quad (3-12)$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて, 時間応答解析を行う. 時

間応答解析によって周期解の精度の検討および各種の高調波共振，  
分数調波共振，カオスを明らかにすることができる。

## 第4章 1自由度系としての解析結果

### 4.1 非線形自由振動の特性

図-4.1は、非線形自由振動曲線を、図-4.2は無次元振動数 $\omega$ と振幅の直流成分(静的応答成分) $c_0$ との関係を示したものである。減衰定数 $h=0.0$ の非減衰振動を対象としている。図-4.1の横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元振動数 $\omega = \Omega/\omega_1$ で、縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅 $c_1$ である。図-4.2の横軸は無次元振動数 $\omega$ で、縦軸は振幅の直流成分 $c_0$ である。

$\Delta = 0.0$ のときは、振幅の変動成分 $c_1$ は振動数とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が回転半径以上( $\Delta \geq 1$ )になるとライズの影響が効いてくる。この時の無次元振動数 $\omega$ は振幅の増加とともに減少する軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると、振幅の変動成分 $c_1$ は無次元振動数 $\omega$ の増加とともに増加する硬化バネの挙動を示す。振幅の直流成分 $c_0$ がライズ比 $\Delta$ を打ち消す方向(符号がマイナスでライズと逆向き)に作用する。振幅 $c_1$ が小さい場合は、偏平アーチのライズのまわりで振動する。振幅が大きくなるにつれて、 $c_0$ が効いてきて振動中のライズの大きさ $\Delta + c_0$ が小さくなって、ライズのないはりの振動に近づく。このときの振動と振動数の関係が、軟化バネ特性を示す。さらに、振幅が大きくなると、 $c_0 = -\Delta$ となり、ライズのないつまり直線ばりとしての振動をする。

以上のように、非線形自由振動特性はライズの影響を強く受け、振幅の大きさによって軟化および硬化バネの両特性をもつことが確認できる。

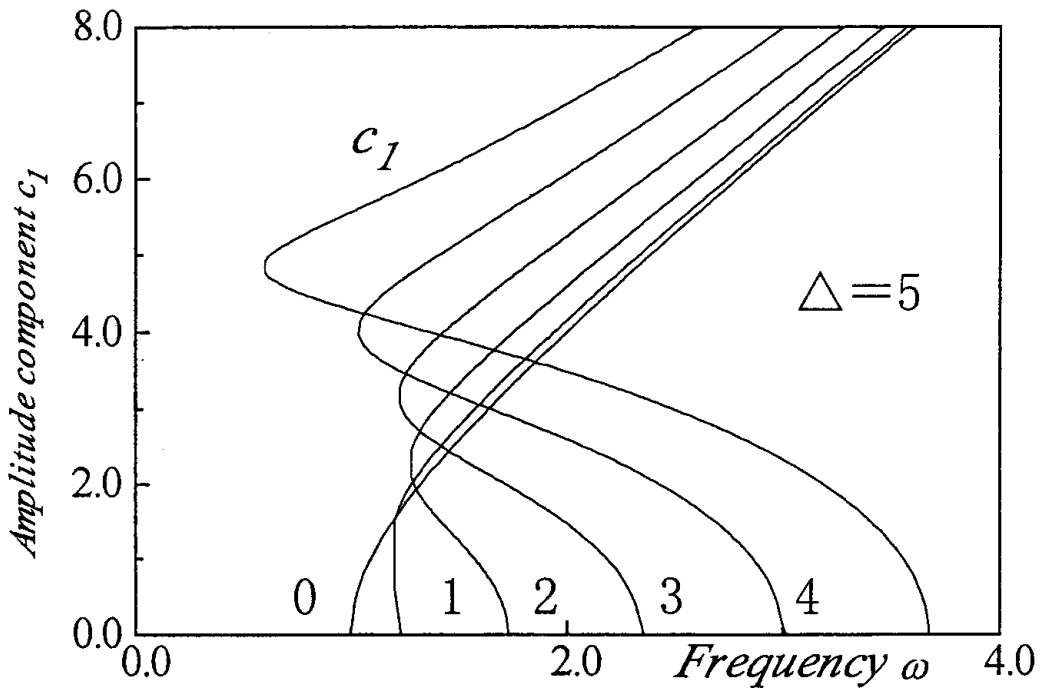


図-4.1 非線形自由振動曲線  
 ( $p = 0.0, h = 0.0$ )

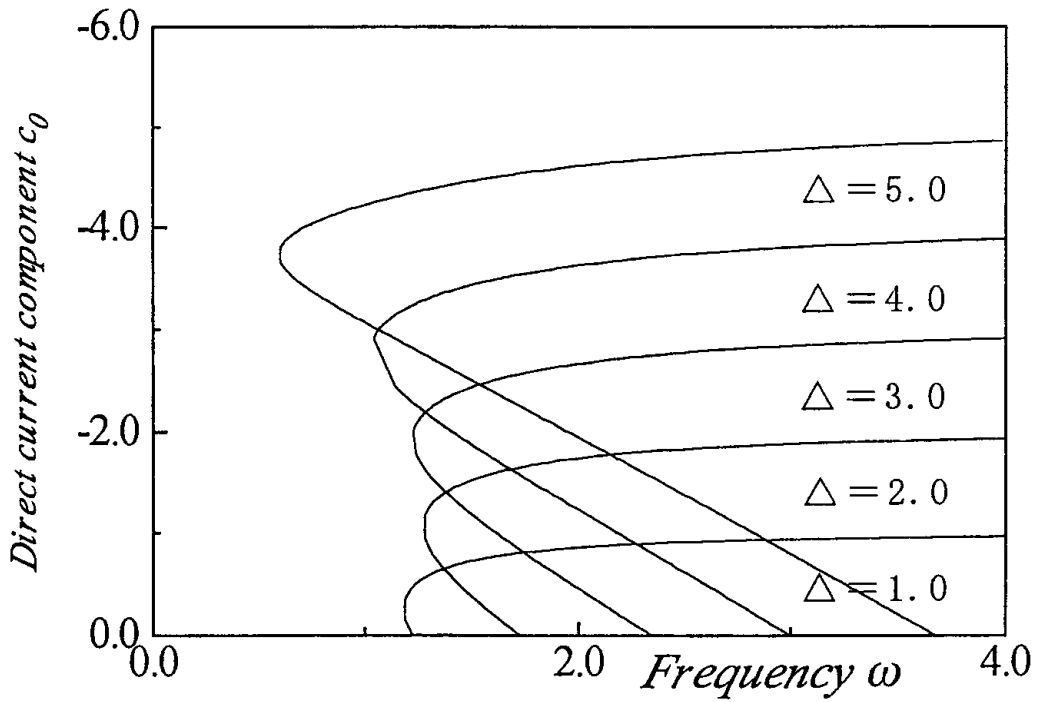


図-4.2 直流成分  $c_0$  と無次元振動数  $\omega$  の関係  
 ( $p = 0.0, h = 0.0$ )

## 4.2 ライズ比の影響

図-4.3~4.6は、減衰定数  $h=0.005$ 、荷重強度  $p$  は  $\omega=0.0$  のときの静的応答が回転半径の0.5倍となるように設定している場合の無次元加振振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1$ 、 $A_{1/2}$  との関係を示す。横軸はライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元加振振動数  $\omega$  で、縦軸は回転半径で無次元化した無次元応答振幅である。ただし、ライズ比  $\Delta=0.0$  の場合、減衰力があると1/2分数調波共振は生じていない。よって1/2分数調波共振は、減衰定数  $h=0.0$  の場合で求める。主調波応答  $A_1$  は、あらゆる振動数領域で生じているが、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  は、固有振動数 ( $\Delta=0.0$  のとき  $\omega_1=1.0$ 、 $\Delta=3.0$  のとき  $\omega_1=2.35$ 、 $\Delta=4.0$  のとき  $\omega_1=3.0$ 、 $\Delta=5.0$  のとき  $\omega_1=3.67$ ) の2倍の振動数近傍で分岐する。扁平アーチでは、ライズ比によって固有振動数が変化し、それに伴って分数調波共振の生じる振動数領域も変わってくる。主調波応答  $A_1$ 、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  とともにライズ比の影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性をもつ。さらに、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  の方が主調波応答  $A_1$  よりライズ比の影響を受けるため、軟化・硬化バネの両特性がより強く現れている。また、ライズ比が大きくなるにしたがい、応答振幅が大きくなることを確認できる。同様にライズ比が大きくなると1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  の発生領域が広がることが確認できる。これは、ライズ比が大きくなるにしたがい運動方程式内の2次の非線形項の効果が強くなることによる。

以上のように、主調波応答  $A_1$ 、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  とともにライズ比の影響を強く受け、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  においては、発生領域はライズ比によって異なり、また発生領域は、ライズ比が大きくなると、はり(ライズ比  $\Delta=0.0$ )に比べ著しく広がる傾向が見られる。

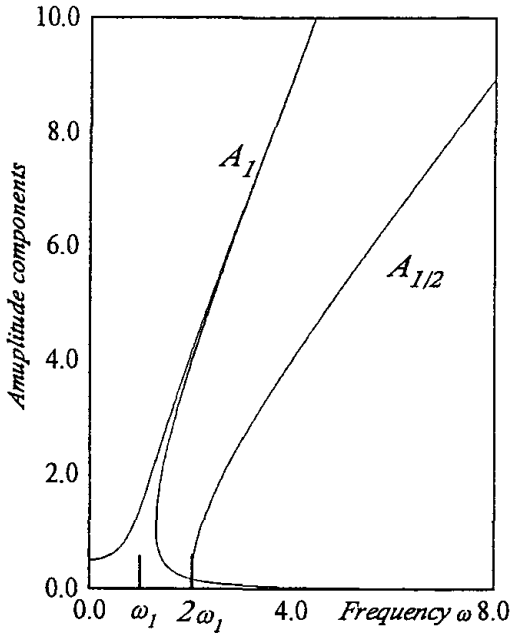


图-4.3 応答曲線  
 $(\Delta = 0.0, p = 0.5313, h = 0.0)$

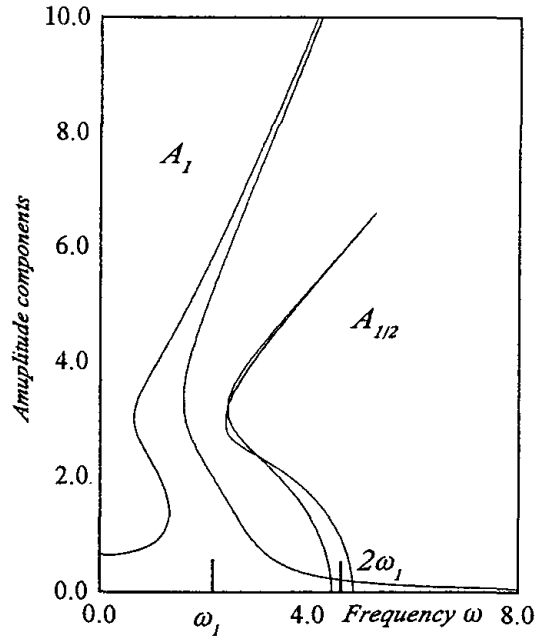


图-4.4 応答曲線  
 $(\Delta = 3.0, p = 3.3438, h = 0.005)$

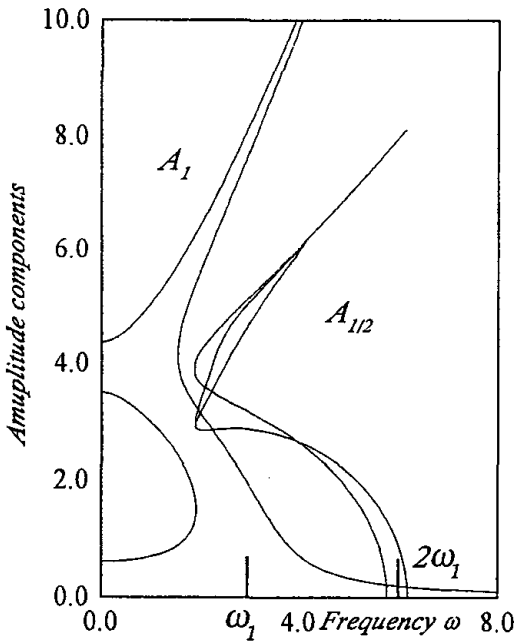


图-4.5 応答曲線  
 $(\Delta = 4.0, p = 5.2813, h = 0.005)$

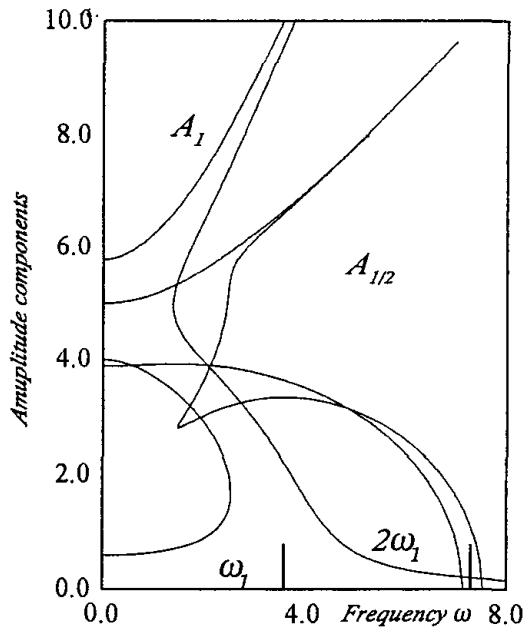


图-4.6 応答曲線  
 $(\Delta = 5.0, p = 7.7188, h = 0.005)$

### 4.3 荷重強度の影響

図-4.7,4.8に、ライズ比 $\Delta=3.0$ 、減衰定数 $h=0.005$ の場合について無次元加振振動数 $\omega$ と応答振幅 $A_1$ 、 $A_{1/2}$ との関係を荷重強度 $p=3.3438$ と $p=8.0$ について示す。これらの図には、Runge-Kutta-Gill法による応答振幅をプロットしている。図中の○はシミュレーションによる周期 $T(=2\pi/\omega)$ 、加振振動数の周期)の最大応答、□は周期 $2T$ (加振振動数の周期の2倍)の最大応答、△は周期 $nT(n\geq 3)$ 、加振振動数の周期の $n$ 倍)の最大応答、×はカオスの最大応答を示している。荷重強度が大きくなるにしたがい主調波応答の応答振幅は大きくなり、 $1/2$ 分数調波応答の発生領域は広くなる。周期解に関しては、解析解とシミュレーションによる数値解は、荷重強度が増加してもほぼ一致する。また、 $1/2$ 分数調波共振近傍、高調波共振領域においては、荷重強度が増加すれば、周期 $nT$ およびカオスが発生しやすい傾向が見られる。

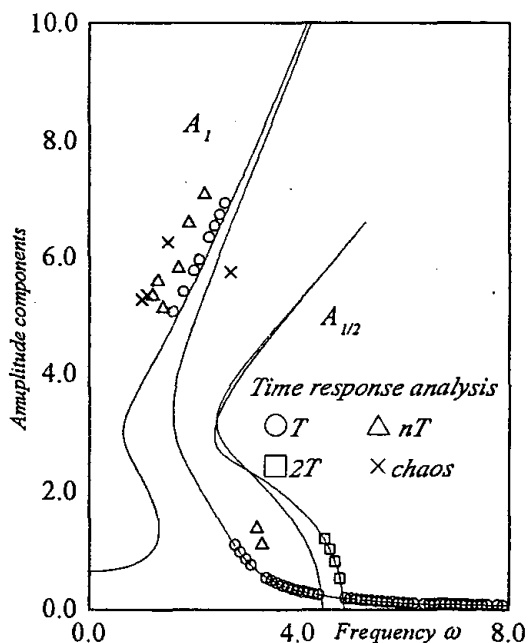


図-4.7 応答曲線

( $\Delta=3.0, p=3.3438, h=0.005$ )

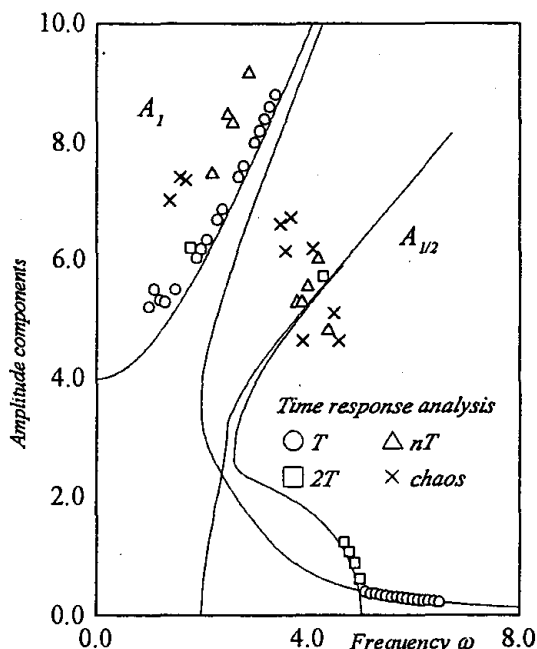


図-4.8 応答曲線

( $\Delta=3.0, p=8.0, h=0.005$ )



#### 4.4 減衰力の影響

図-4.9に、ライズ比  $\Delta=3.0$ 、荷重強度  $p=3.3438$  について無次元加振振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1$ 、 $A_{1/2}$  の関係を減衰定数  $h$  をパラメーター ( $h=0.005, 0.05$ ) に示す。当然のことながら、減衰力の影響は主調波応答においては、減衰力が大きくなるほど共振振幅を小さくする。1/2分数調波共振応答においては、減衰力による影響は主調波応答に比べ大きいですが、減衰定数  $h=0.05$  の場合においても分岐を妨げるほどではなく、減衰力の影響が大きい場合についても、1/2分数調波共振応答を無視することはできない。

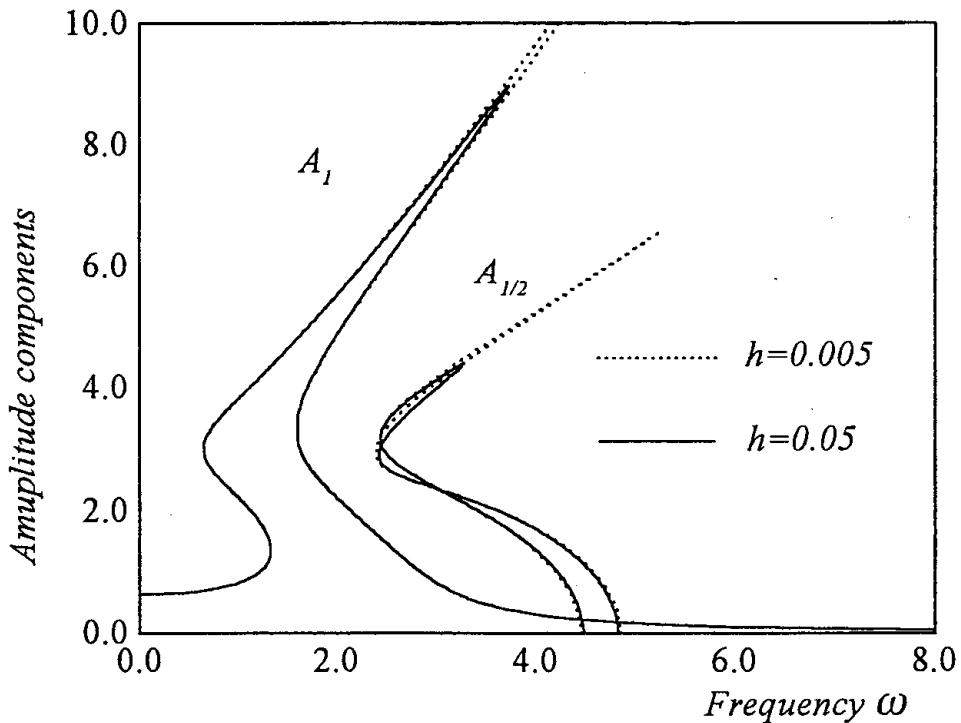


図-4.9 応答曲線 ( $\Delta=3.0$ ,  $p=3.3438$ )

#### 4.5 1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動

図-4.10にライズ比  $\Delta = 3.0$ ，荷重強度  $p = 8.0$ ，減衰定数  $h = 0.005$  の場合について，横軸に無次元加振振動数  $\omega$ ，縦軸に応答振幅  $A_1$ ， $A_{1/2}$  をとり，1/2分数調波共振近傍の主調波応答と1/2分数調波共振応答を示す．図中の○，□，△および×は数値シミュレーションによる振幅である．これらのシミュレーションにあたっては，初期変位，速度をいずれも0とし，時間刻みは  $\Delta\tau = 1/250$  無次元時間で  $n\Delta\tau = 5000$  以降の応答を求めた．また振動を特定するため，時刻歴応答波形，Poincaré写像，パワースペクトル密度を参考にした．その結果，図中のポイント①，⑤は外力と同周期  $T$  の主調波応答，②は2倍周期  $2T$  の1/2分数調波共振応答であり，この2種類の定常応答は，解析解と一致している．一方，ポイント③，④では，周期  $T$  および周期  $2T$  と一致しない応答が生じている．カオスが生じている無次元加振振動数  $\omega = 3.925$  のポイント④について，その時刻歴応答波形，Poincaré写像，パワースペクトル密度を図-4.11に示す．同様に，ポイント③では周期  $6T$  の応答が確認できた．

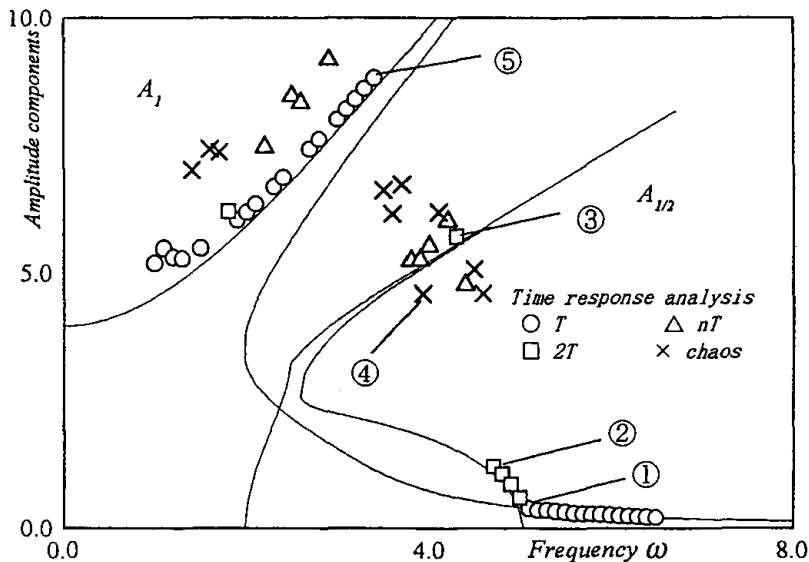
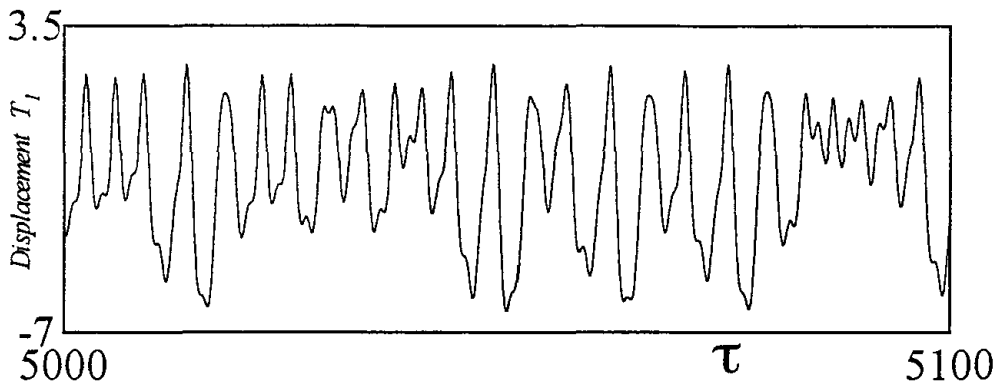
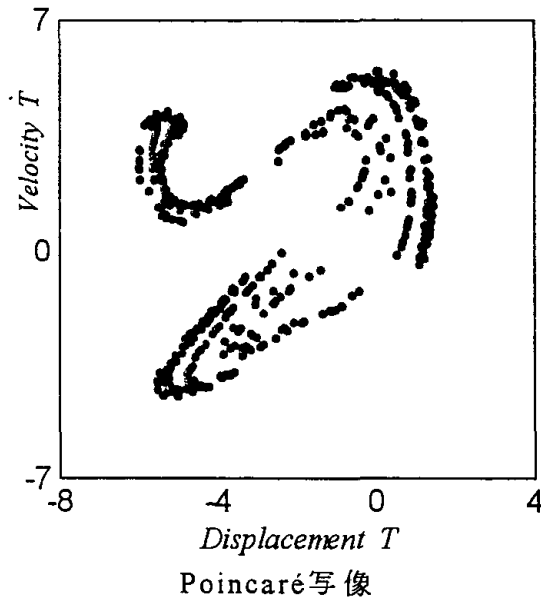


図-4.10 応答曲線

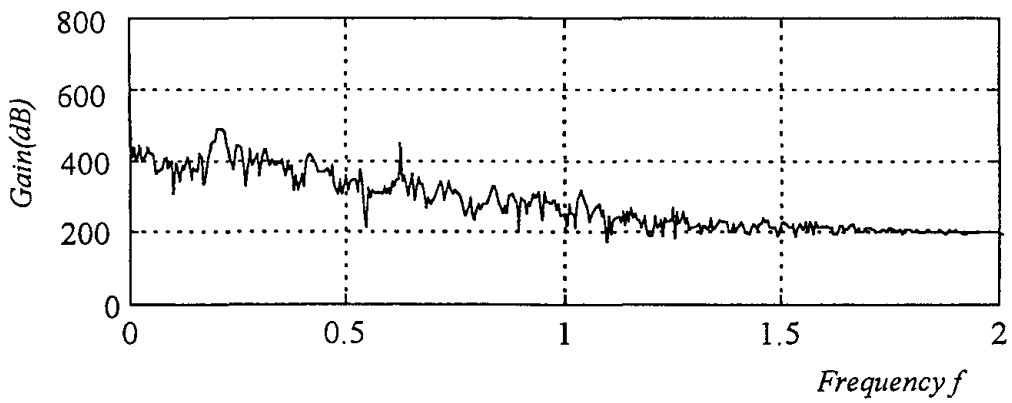
( $\Delta = 3.0$ ,  $p = 8.0$ ,  $h = 0.005$ )



時刻歴応答波形



Poincaré写像



パワースペクトル密度

図-4.12 数値解析結果(ポイント④)

また図-4.12には，1/2分数調波近傍の分岐を調べるために分岐図を示す．図-4.12の横軸は無次元加振振動数 $\omega$ で，縦軸はシミュレーションによって得られた速度である．分岐図よりカオスに至る様子を調べると，無次元加振振動数 $\omega$ を5.1より減少させると $\omega=5.0$ で周期 $T$ の振動が，周期 $2T$ の振動に移る．さらに，無次元加振振動数 $\omega$ を減少させると，周期 $nT(n\geq 3)$ の振動を間欠的に繰り返し，無次元加振振動数 $\omega=4.6$ 近傍よりカオスが発生し始め， $\omega=3.7$ 近傍よりカオスが頻繁に現れる．

1/2 分数調波共振近傍のカオスに至る道筋は，周期的な振動が周期倍加分岐を繰り返し，カオスに至るといえないが，無次元加振振動数 $\omega$ が減少するにつれて，周期 $2T$ の振動が周期 $nT(n\geq 3)$ の振動を間欠的に繰り返しながらカオスに至る．さらに，間欠的なカオスの様子を詳しく調べるために，図-4.13～17 にパワースペクトル密度を示す．図より，無次元加振振動数 $\omega=4.6$ では，単一周波数の $f_1$ の他に $f_1/2$ および高調波のピークが発生し，無次元加振振動数 $\omega=4.4$ では，単一周波数の $f_1$ の他に $f_1/6$ ， $f_1/3$ ， $f_1/2$ ， $2f_1/3$ ， $5f_1/6$ および高調波のピークが発生している．さらに無次元加振振動数 $\omega$ が減少すると周期 $8T$ ，周期 $6T$ ，そしてついにはカオスになっている．これらパワースペクトル密度からも無次元加振振動数 $\omega$ が減少するにつれ周期 $2T$ の振動が周期 $nT(n\geq 3)$ の振動を間欠的に繰り返しながらカオスに至る様子がわかる．

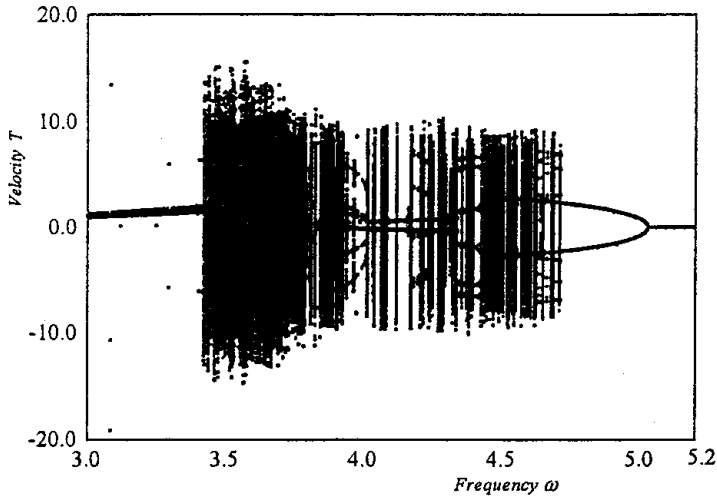


図-4.12 分岐図

(  $\Delta = 3.0, p = 8.0, h = 0.005$  )

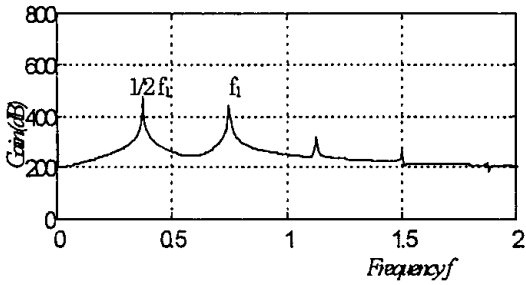


図-4.13 パワースペクトル密度  
(  $\omega = 4.6, f = 0.7324$  )

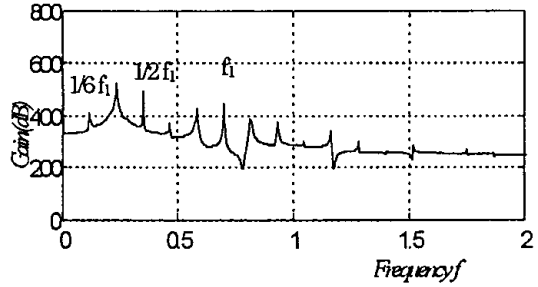


図-4.14 パワースペクトル密度  
(  $\omega = 4.4, f = 0.7006$  )

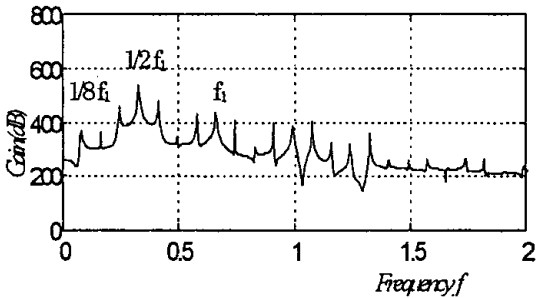


図-4.15 パワースペクトル密度  
(  $\omega = 4.2, f = 0.6687$  )

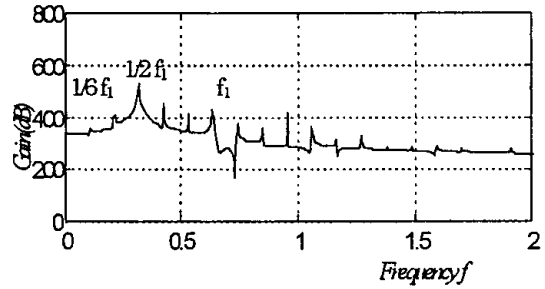


図-4.16 パワースペクトル密度  
(  $\omega = 4.0, f = 0.6369$  )

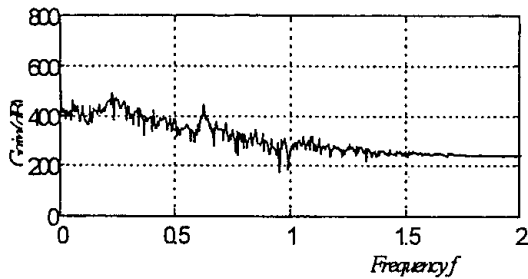


図-4.17 パワースペクトル密度  
(  $\omega = 3.94, f = 0.6274$  )

## 4.6 本章のまとめ

本章では、偏平アーチに現れる1/2分数調波共振について調和バランス法による解析および時間応答解析を行った。偏平アーチの形状パラメーターであるライズ比、荷重強度および減衰力の影響を明らかにした。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 非線形自由振動の振動特性はライズによって、軟化・硬化バネの両特性を持つため、ライズ比は応答特性に大きな影響を及ぼしてくる。
- (2) 1/2分数調波共振の発生領域はライズ比によって異なり、ライズ比が大きくなるにしたがい発生領域は、はりに比べ著しく広くなる傾向がある。
- (3) 1/2分数調波共振近傍において、周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) およびカオスを確認した。
- (4) 1/2分数調波共振近傍で、カオスに至る道筋は、周期的振動が周期倍加分岐を繰り返してカオスに至るとはいえない。周期的振動がカオスもしくはカオスに近い周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) の振動に至る。
- (5) 減衰力が大きい場合に、1/2分数調波共振を無視することはできない。

## 第5章 多自由度系としての解析結果

### 5.1 線形自由振動の特性

図-5.1は、扁平アーチのライズ比 $\Delta$ と1次および3次振動の線形固有振動数 $n_1$ 、 $n_3$ の関係を示す。ライズの大きさは回転半径 $r$ 程度であるから<sup>8)</sup>、ライズ比 $\Delta$ の大きさは10まで表示している。3.2節で述べたように1次振動の線形固有振動数はライズ比 $\Delta$ の影響を受け、ライズ比 $\Delta$ の増大と共に増加する。一方、3次振動の線形固有振動数は、ライズ比 $\Delta$ の影響を受けず一定値 $n_3 = 9.0$ をとる。式(3-3)の第3項において、扁平アーチの初期形状が正弦波 $\bar{X} = \sin \pi \xi$ で与えられ、かつ仮定した座標関数が固有関数 $X_n = \sin n \pi \xi$ で表される。この項の積分は直交性が成り立つため零となる。したがって、3次振動の線形固有振動数は初期形状すなわちライズの影響を受けない。

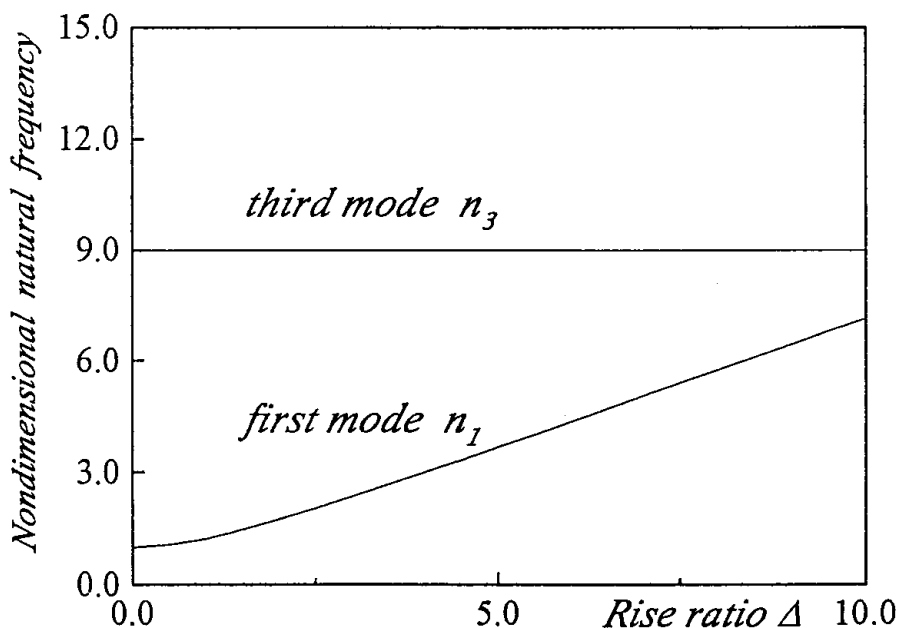


図-5.1 無次元固有振動数とライズ比の関係

## 5.2 非線形自由振動の特性

図-5.2は、3次振動の非線形自由振動曲線を、図-5.3は無次元振動数 $\omega$ と1次振動の振幅の直流成分(静的応答成分) $c_{10}$ との関係を示したものである。図-5.4は無次元振動数 $\omega$ と1次振動の振幅の変動成分 $c_{11}$ との関係を示している。減衰定数 $h_1 = h_3 = 0.0$ の非減衰振動を対象としている。図-5.2の横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元振動数 $\omega$ 、縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅 $c_{31}$ である。図-5.3の横軸は無次元振動数 $\omega$ 、縦軸は1次振動の振幅の直流成分 $c_{10}$ である。図-5.4の横軸は無次元振動数 $\omega$ 、縦軸は1次振動の振幅の変動成分 $c_{11}$ である。

3次振動の自由振動が起きると、1次振動と連成し、1次振動の2倍の高調波共振成分 $c_{12} \cos 2\omega\tau$ が加振され、1次振動の直流成分 $c_{10}$ がライズを打ち消す方向(符号がマイナスでライズと逆向き)に発生する(図-5.3)。1次振動において、変動成分 $c_{11}$ は微小振動し(図-5.4)、直流成分 $c_{10}$ は3次振動の自由振動の振幅 $c_{31}$ が小さい時は、振動数にほぼ比例して増大し、振幅 $c_{31}$ が大きくなり、ある値を越えると直流成分 $c_{10}$ は $-\Delta$ に漸近する(図-5.3)。さらに、振幅が大きくなると、 $\Delta + c_{10} \approx 0$ となり、ライズのないつまり直線ばりとしての振動をする。なお、3次振動は静的応答 $c_{30}$ を発生しない。また、図-5.4に示すように1次振動は連成して生ずるが、その振幅は小さい。

以上のように、3次振動が生じると、連成項を介して1次振動の直流成分が発生し、4.2節で示した1自由度系と同じライズを打ち消す挙動を示す。

次に、図-5.2で示した3次振動の振動数と振幅比の関係に注目すると、ライズの大きさに無関係に振幅とともに振動数が増加する硬化バネ特性<sup>9)</sup>を示す。ライズがある場合がない場合よりも非線形自由振動数の振幅依存性が小さくなるため、非線形項の影響が小さく



なる。振幅比の大きさがライズ比程度まではライズ比の影響が大きい  
が、振幅比が大きくなると小さくなる。

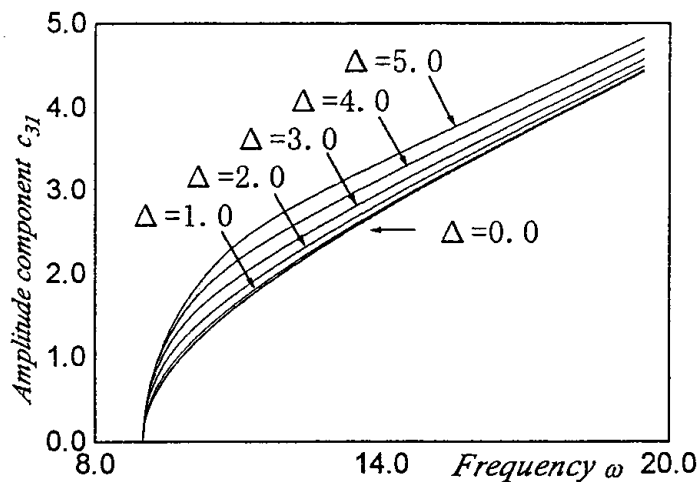


図-5.2 3次振動の非線形自由振動曲線  
( $p = 0.0, h_1 = h_3 = 0.0$ )

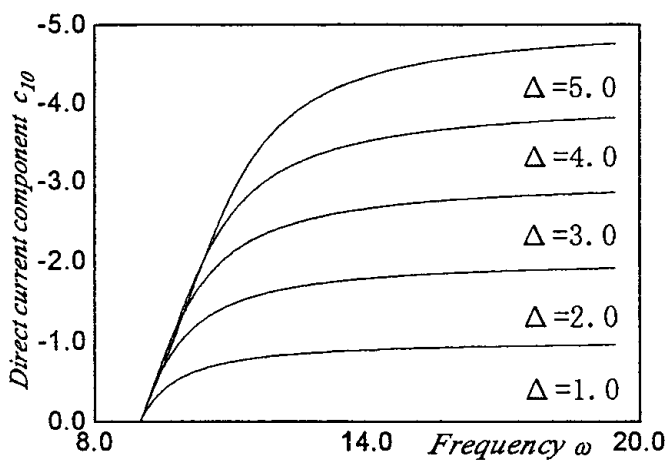


図-5.3 1次振動の直流成分  $c_{10}$  と無次元振動数  $\omega$  の関係

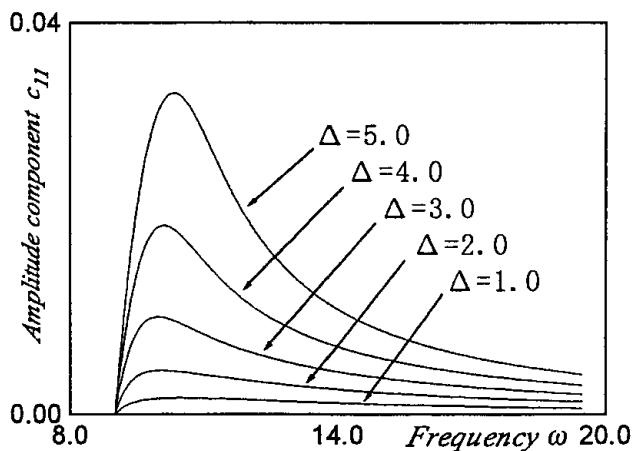


図-5.4 1次振動の変動成分  $c_{11}$  と無次元振動数  $\omega$  の関係  
( $p = 0.0, h_1 = h_3 = 0.0$ )

### 5.3 3次強制振動に及ぼすライズ比の影響

図-5.5 は、3次振動について強制振動の無次元応答振幅と無次元加振振動数 $\omega$ との関係をライズ比 $\Delta$ をパラメーターに示したものである。荷重強度 $p$ は加振振動数 $\omega=0.0$ のときの静的応答が回転半径の0.5倍となるように設定している。横軸は無次元加振振動数 $\omega$ を、縦軸は無次元応答振幅 $c_{31}$ を示している。1次振動では、ライズ比によって固有振動数が変化し、それに伴って主調波応答の共振領域も変動する<sup>8)</sup>。しかし、3次振動ではライズ比 $\Delta$ に無関係に固有振動数( $\omega=9.0$ )は一定であるので、主調波応答の共振領域もライズ比 $\Delta$ に影響を受けず一定である。また、ライズ比が大きくなるにしたがって、応答振幅が大きくなることが確認できる。

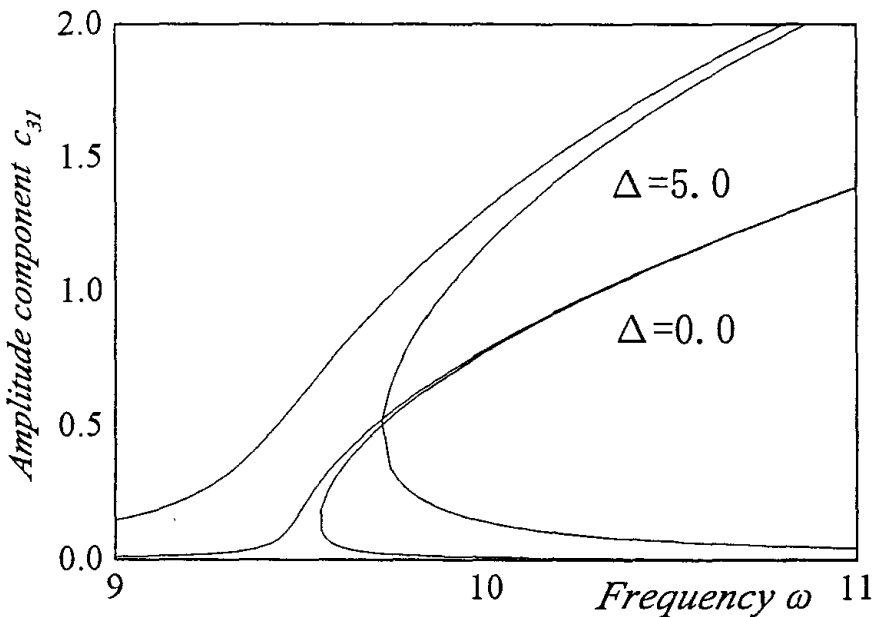


図-5.5 3次振動の応答曲線

( $p = 40.6$  ( $\Delta = 0.0$ ),  $p = 590.5$  ( $\Delta = 5.0$ ),  $h_1 = h_3 = 0.0$ )

#### 5.4 3次強制振動に及ぼす減衰定数の影響

図-5.6に、ライズ比  $\Delta = 3.0$ ，荷重強度  $p = 612.0$  について無次元加振振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_{31}$  の関係を減衰定数  $h_3$  をパラメーターに示す。縦軸は無次元応答振幅  $c_{31}$  を，横軸は無次元加振振動数  $\omega$  を示している。3次強制振動に及ぼす減衰定数の影響は，4.4節で示した1次強制振動に及ぼす影響より大きい。

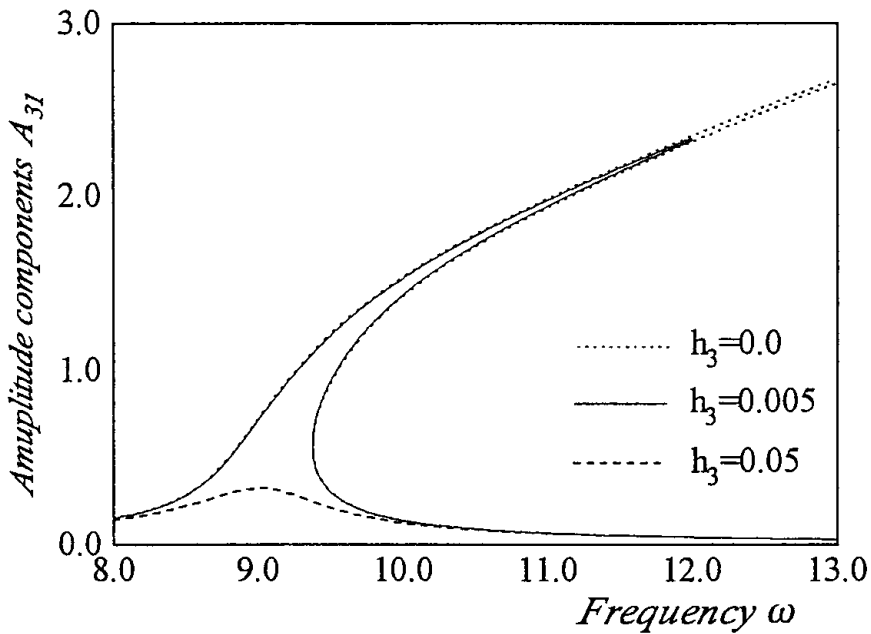


図-5.6 3次振動の応答曲線  
( $\Delta = 3.0, p = 612.0, h_3 = 0.005$ )

## 5.5 1次振動の1/2分数調波共振近傍のカオスに及ぼす3次振動の影響

図-5.7,5.8に、ライズ比 $\Delta=3.0$ 、減衰定数 $h_1=h_3=0.05$ の場合について無次元加振振動数 $\omega$ と応答振幅 $A_1$ との関係を示す。図-5.7は1自由度系の結果を、図-5.8は2自由度系の結果について示している。これらの図には、Runge-Kutta-Gill法による応答振幅をプロットしている。図中の○はシミュレーションによる周期 $T(=2\pi/\omega$ 、加振振動数の周期)の最大応答、□は周期 $2T$ (加振振動数の周期の2倍)の最大応答、△は周期 $nT(n\geq 3$ 、加振振動数の周期の $n$ 倍)の最大応答、×はカオスの発生時の時系列の最大応答を示している。

1自由度系(図-5.7)と2自由度系(図-5.8)の結果を比較すると、解析解とシミュレーションによる数値解の周期解はほぼ一致する。3次振動の2倍の高調波共振は、3次振動の運動方程式に $T_3$ の2乗の項がないため、1/2分数調波共振近傍に及ぼす影響は小さい。1/2分数調波共振近傍のカオスの挙動に注目すると、時系列の最大応答について2自由度系の解が1自由度系の解よりもわずかに大きい、カオスの発生する振動数領域や分布状況はほぼ一致する。

図-5.9,5.10および5.11には、1/2分数調波近傍の分岐を調べるためにシミュレーションによって得られた分岐図を示す。図は加振振動数を高い振動数領域から減少した場合の結果である。図-5.9は1自由度系の1次振動を、図-5.10および5.11は2自由度系で、これらのうち図-5.10が1次振動の分岐図を、図-5.11が3次振動の分岐図を示している。縦軸は速度で、横軸は無次元加振振動数 $\omega$ である。分岐図より1自由度系(図-5.9)と、2自由度系(図-5.10)のカオスに至る様子を調べる。無次元加振振動数 $\omega=5.2$ より減少させると $\omega=4.9$ で周期 $T$ の振動が、周期 $2T$ の振動に移る。さらに、無次元加振振動数 $\omega$ を減少させると、無次元加振振動数 $\omega=4.1$ 近傍よりカ

オスが発生し始め，無次元加振振動数  $\omega = 3.5$  近傍を除く無次元加振振動数  $\omega = 3.0 \sim 4.1$  付近でカオスが頻繁に現れる．2 自由度系の分岐図に，無次元加振振動数  $\omega = 4.3 \sim 4.4$  近傍に周期  $nT (n \geq 3)$  が間欠的に発生する以外に 1 自由度系の分岐図との差は認められない．

1 次振動の  $1/2$  分数調波共振近傍のカオスに対する 3 次振動の影響をより詳しく調べるため，カオスが発生する付近の振動数領域の時系列応答波形および Poincaré 写像を 1 自由度系と 2 自由度系の両者を **図-5.12, 5.13** および **5.14** に示す．**図-5.12, 5.13** の時系列応答波形と Poincaré 写像ともに 1 自由度系と 2 自由度系の応答がよく一致する．**図-5.12** は周期  $T$ ，**図-5.13** は周期  $2T$  の振動を示し，3 次振動の影響はない．**図-5.14** はカオスが頻繁に発生している無次元加振振動数  $\omega = 3.8$  の時系列応答波形および Poincaré 写像を示したものである．時系列応答波形，Poincaré 写像ともにカオスを示し，時系列応答波形はややちがうものの，Poincaré 写像のカオスの特徴を表示するストレンジアトラクターはほぼ同じである．**図-5.11, 5.12** のようにカオスの発生する振動数領域や分岐のパターンも本質的に変わらない．

以上により，カオスに及ぼす 3 次振動の影響は強くないことが確認できた．

**図-5.15** には，1 次振動でカオスが発生している無次元加振振動数  $\omega = 3.8$  における 3 次振動の時系列応答波形，Poincaré 写像およびパワースペクトルを示す．時系列応答波形，Poincaré 写像ともに不規則な応答を示している．しかし，Poincaré 写像はカオスの典型的ストレンジアトラクターを形成していない．パワースペクトルに単一の振動数  $f_1 = 0.6051$  にピークが見られる．本来は 3 次振動は周期的であるが 1 次振動の影響を受けて波形が不規則になったと判断される．

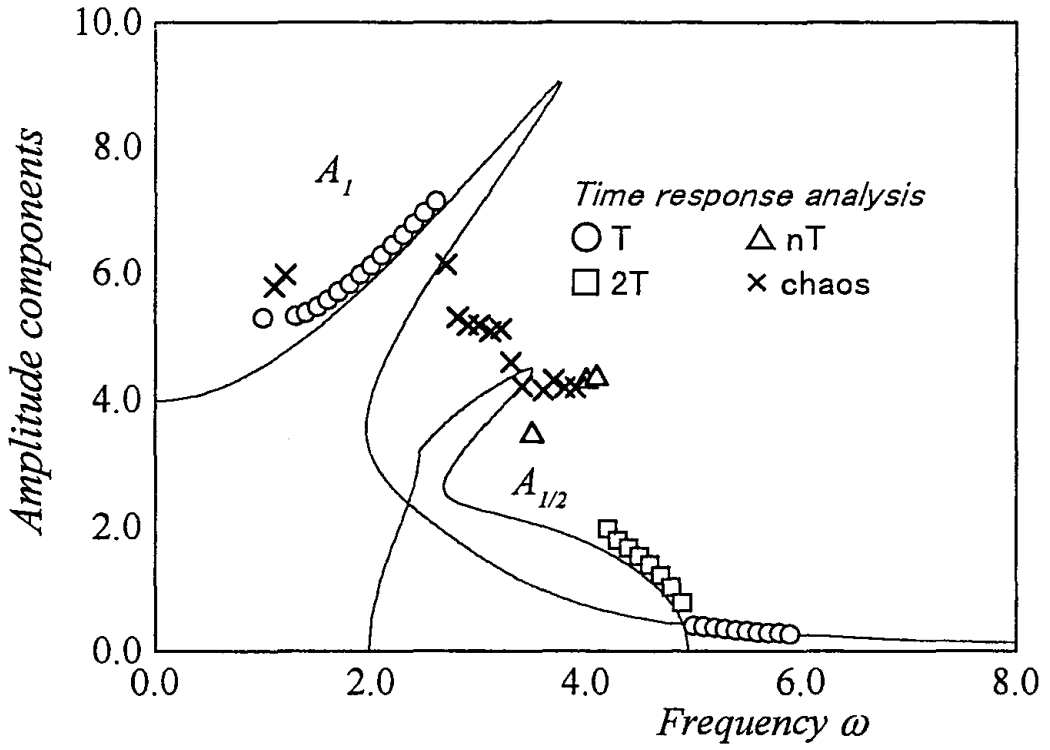


圖-5.7 応答曲線

( $\Delta = 3.0, h_1 = 0.05, p = 612.0$ (1 自由度系))

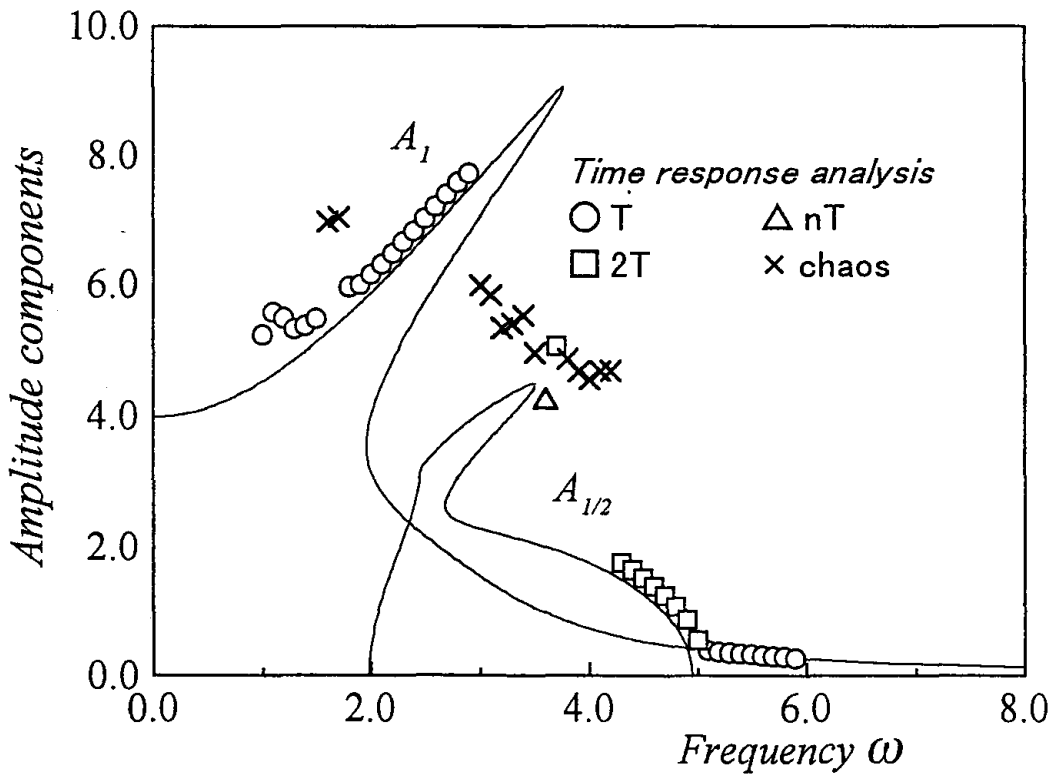


圖-5.8 応答曲線

( $\Delta = 3.0, h_1 = h_3 = 0.05, p = 612.0$ (2 自由度系))

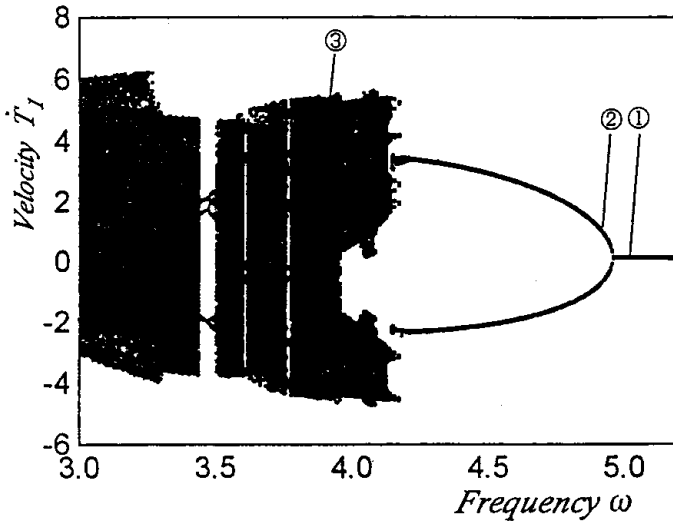


図-5.9 1自由度系の分岐図  
 $(\Delta = 3.0, h_1 = 0.05, p = 612.0)$

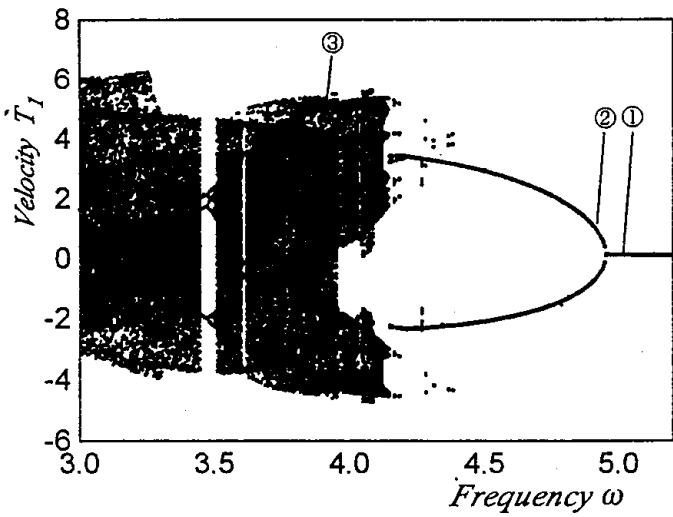


図-5.10 1次振動の分岐図  
 $(\Delta = 3.0, h_1 = h_3 = 0.05, p = 612.0 (2 \text{ 自由度系}))$

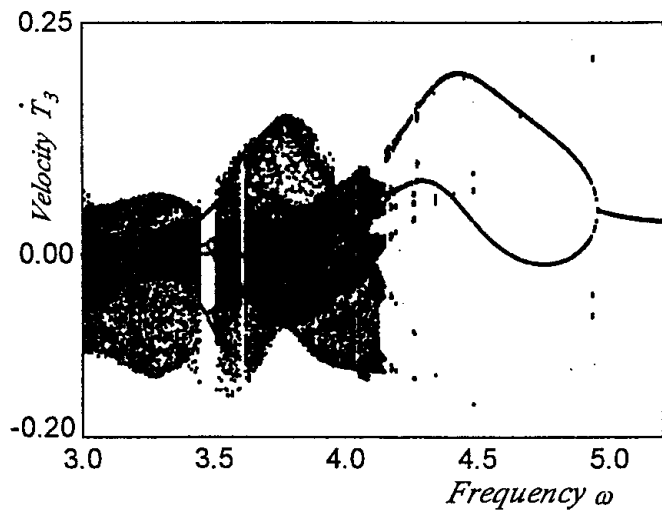
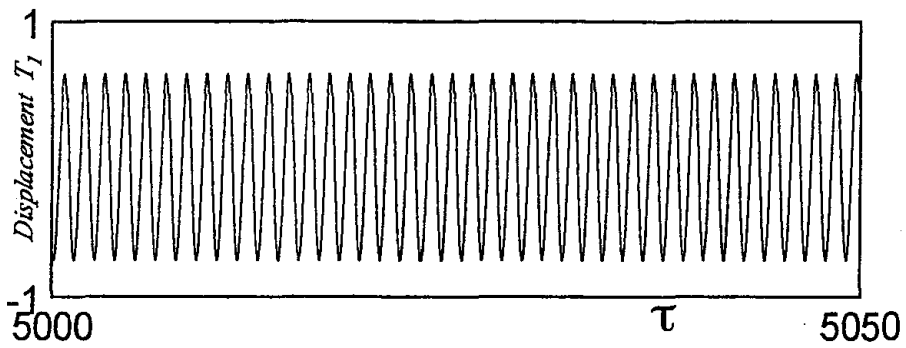
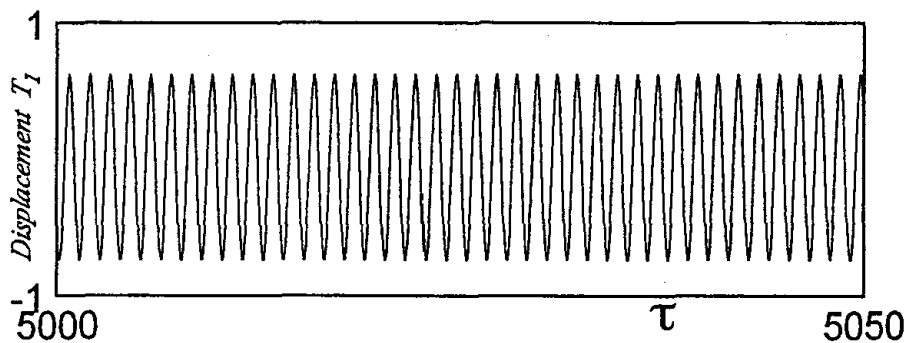


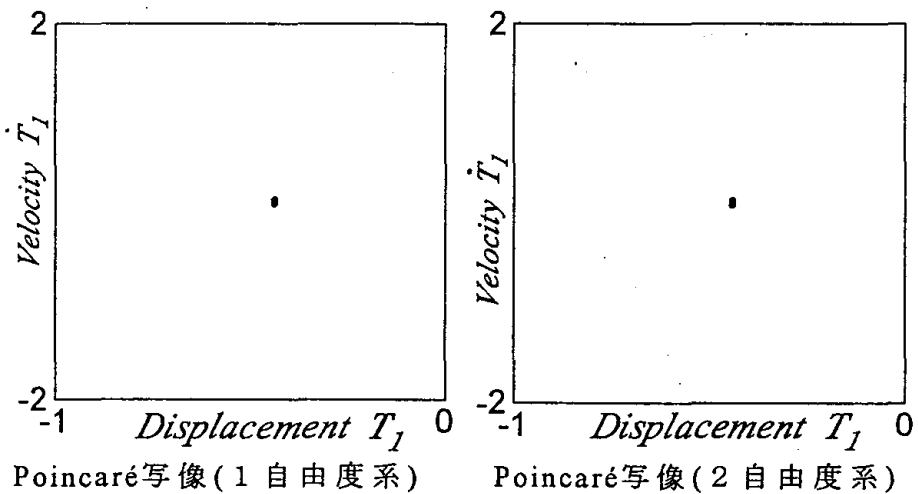
図-5.11 3次振動の分岐図  
 $(\Delta = 3.0, h_1 = h_3 = 0.05, p = 612.0 (2 \text{ 自由度系}))$



時系列応答波形(1自由度系)



時系列応答波形(2自由度系)

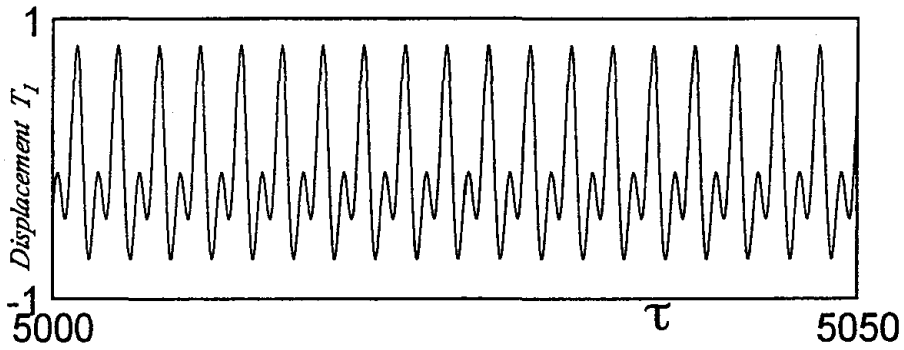


Poincaré写像(1自由度系)

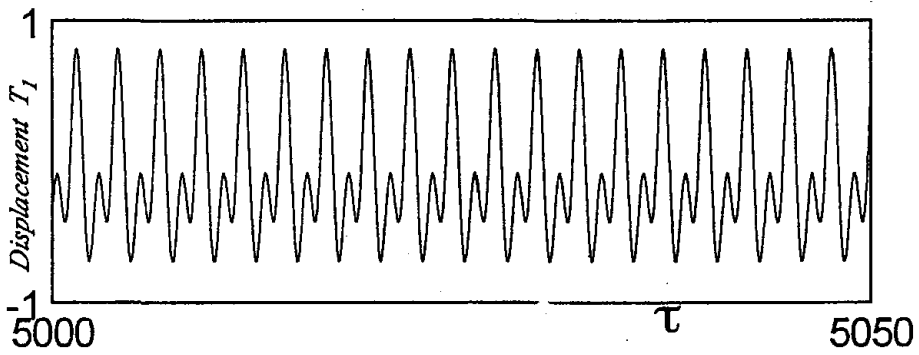
Poincaré写像(2自由度系)

図-5.12 1次振動の数値解析結果  
(ポイント①)

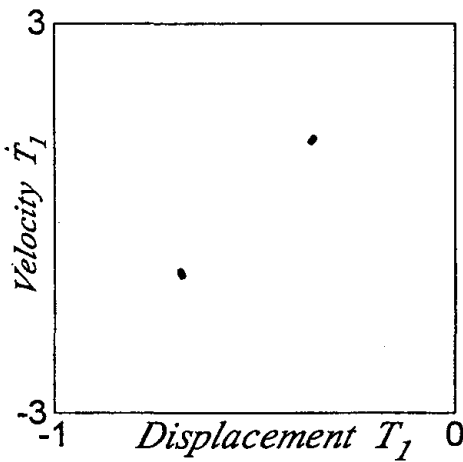




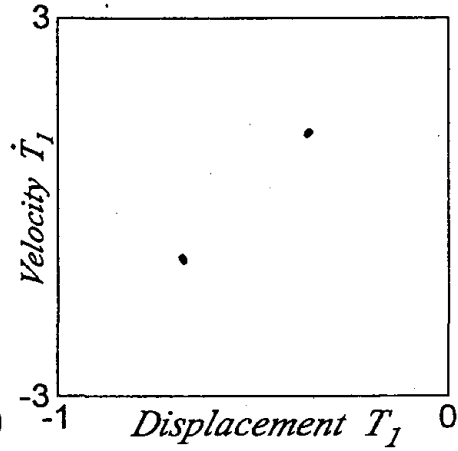
時系列応答波形(1自由度系)



時系列応答波形(2自由度系)

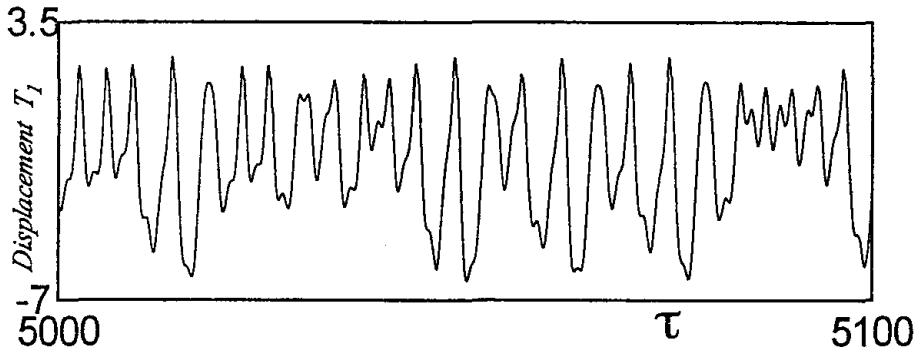


Poincaré写像(1自由度系)

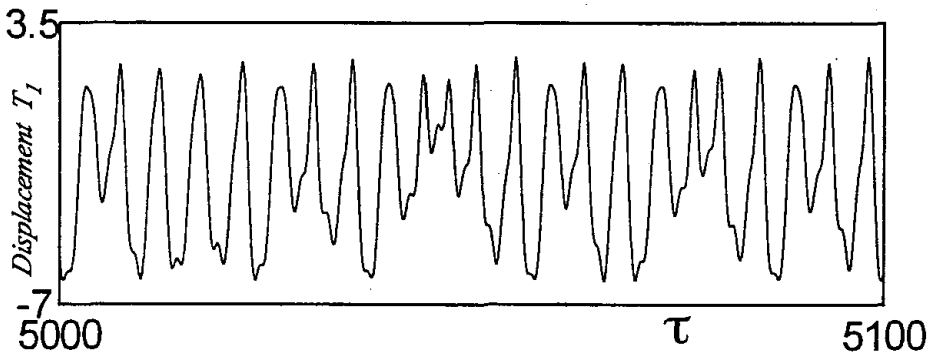


Poincaré写像(2自由度系)

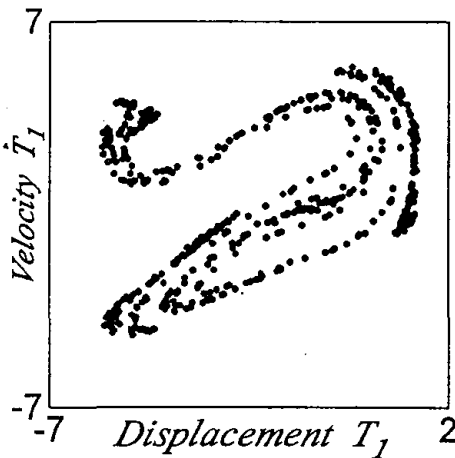
図-5.13 1次振動の数値解析結果  
(ポイント②)



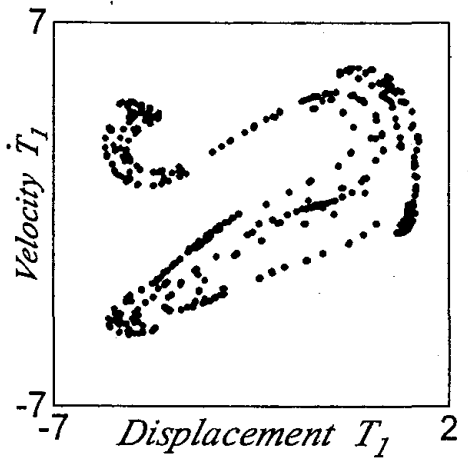
時系列応答波形(1自由度系)



時系列応答波形(2自由度系)

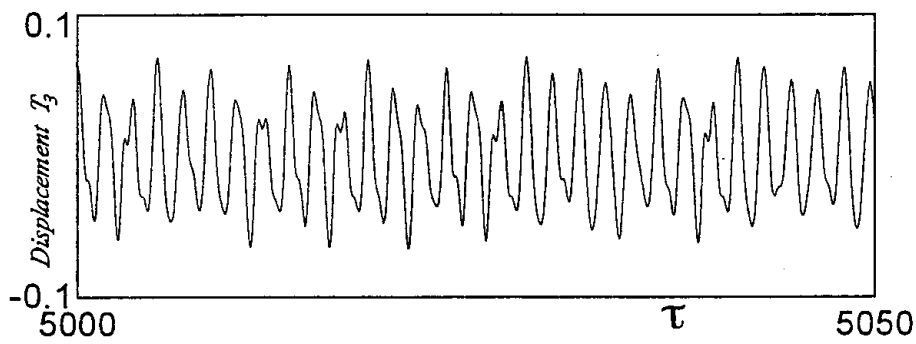


Poincaré写像(1自由度系)

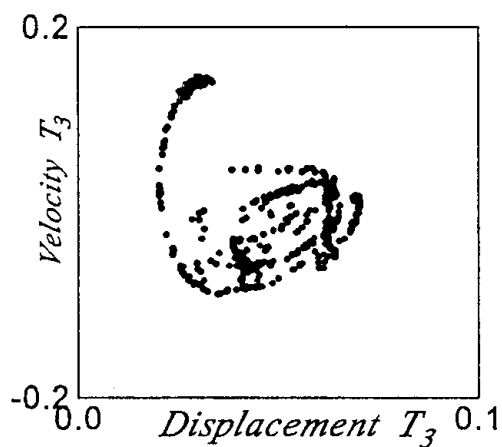


Poincaré写像(2自由度系)

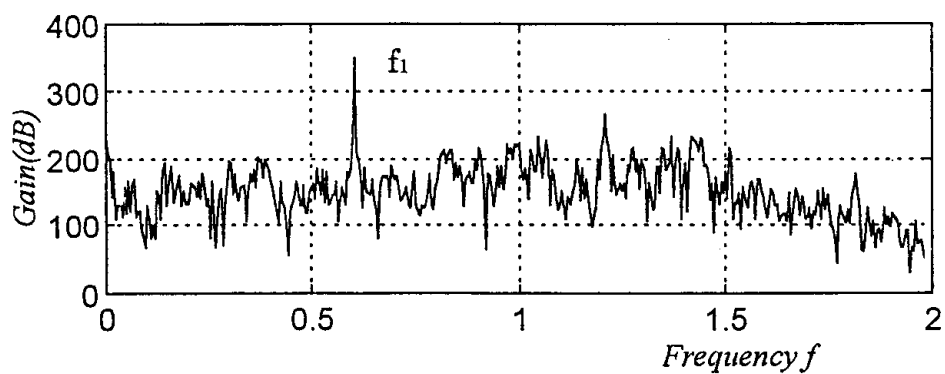
図-5.14 1次振動の数値解析結果  
(ポイント③)



時系列応答波形



Poincaré写像



パワースペクトル

図-5.15 3次振動の数値解析結果  
(ポイント③)

## 5.6 本章のまとめ

本章では，正弦波で与えられる初期形状をもつ偏平アーチを2自由度系で近似し，3次振動の非線形振動特性および1次振動の1/2分数調波共振近傍に及ぼす3次振動の影響について調和バランス法による解析および時間応答解析を行った．3次振動については，偏平アーチの形状パラメータであるライズ比および減衰定数の影響を明らかにした．

得られた結果をまとめると次のとおりである．

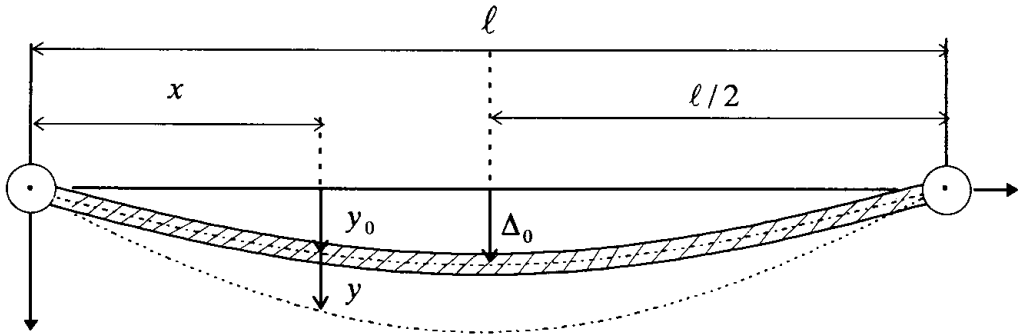
- (1) 1次振動の固有振動数はライズ比の影響を受けるのに対して，3次振動の固有振動数はライズ比の大きさに無関係である．
- (2) 3次振動の非線形自由振動が起きると1次振動と連成し，変動成分が加振され，直流成分がライズを打ち消す方向に作用する．3次非線形振動については1次振動の影響を考慮した多自由度系の取り扱いが必要である．3次振動の振動数と振幅の関係はライズの大きさに無関係に硬化バネを示す．
- (3) 3次振動において主調波応答の共振領域はライズ比の影響を受けないが，ライズがある場合の方が応答振幅が大きくなる．3次振動に及ぼす減衰定数の影響は1次振動に及ぼす減衰定数の影響より大きい．
- (4) 1次振動が周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) で振動している振動数領域では3次振動も周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) で振動し，カオスが発生している領域においては，不規則振動を示す．

- (5) 1次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍のカオスの発生について、その特性に及ぼす3次振動の影響は小さい。したがって、1次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍のカオスについては、第4章で示した1自由度系の解析で妥当である。

## 第6章 偏平アーチの初期形状の影響

### 6.1 はじめに

前章までは、偏平アーチの初期形状として正弦波をもつ場合を対象として非線形振動特性について取り扱ってきた。初期形状が偏平アーチの非線形振動に及ぼす影響が予想される。そのため、本章では、アーチの初期形状の影響を明らかにする。本章では、**図-6.1**に示すような等分布荷重を受ける単純支持ばりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチについて解析を行う。



**図-6.1** 等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの一般図

### 6.2 等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの非線形運動方程式

式(3-3)より、境界条件が両端ヒンジで等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの対称振動を考える。初期形状の形状関数として  $\bar{X} = \frac{16}{5}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$  を用い、系と1次振動と3次振動の2自由度系と仮定し線形減衰力を考慮すれば、次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + \underline{0.01866\Delta^2 T_3} + 0.7529\Delta T_1^2 + 2.259\Delta T_3^2 + \underline{0.01859\Delta T_1 T_3} + \frac{9}{4}T_1 T_3^2 + \frac{1}{4}T_1^3 = \frac{4}{\pi^5} p \cos \omega \tau \quad (6-1)$$

$$\ddot{T}_3 + 2h_3\alpha_3\dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 + \underline{0.01866\Delta T_1} + \underline{0.009295\Delta T_1^2} + \underline{0.2510\Delta T_3^2} + 4.517\Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4}T_1^2 T_3 + \frac{81}{4}T_3^3 = \frac{4}{3\pi^5} p \cos \omega \tau \quad (6-2)$$

ここに、 $h_1, h_3$  : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + 0.5039\Delta^2}$ 、 $\alpha_3 = \sqrt{81 + 0.0006912\Delta^2}$  .

**表-6.1** 初期形状が正弦波と等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合の係数

	$n=1$		$n=3$		
	正弦波	たわみ曲線	正弦波	たわみ曲線	
線形固有振動数 $\alpha_n$	$\sqrt{1 + 0.5\Delta^2}$	$\sqrt{1 + 0.5039\Delta^2}$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{81 + 0.0006912\Delta^2}$	
単独項	$T_1$	—	—	0.01866 $\Delta$	
	$T_3$	—	0.01866 $\Delta^2$	81	
	$T_1^2$	0.75 $\Delta$	0.7529 $\Delta$	—	0.009295 $\Delta$
	$T_3^2$	2.25 $\Delta$	2.259 $\Delta$	—	0.2510 $\Delta$
	$T_1^3$	0.25	0.25	—	—
	$T_3^3$	—	—	20.25	20.25
連成項	$T_1 T_3$	—	0.01859 $\Delta$	4.5 $\Delta$	4.517 $\Delta$
	$T_1^2 T_3$	—	—	2.25	2.25
	$T_1 T_3^2$	2.25	2.25	—	—

— : 係数が存在しない。

式(6-1),(6-2)を初期形状が正弦波の場合の式(3-5),(3-6)と比較する。表-6.1は初期形状が正弦波と等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合の時間に関する非線形運動方程式の係数を示している。

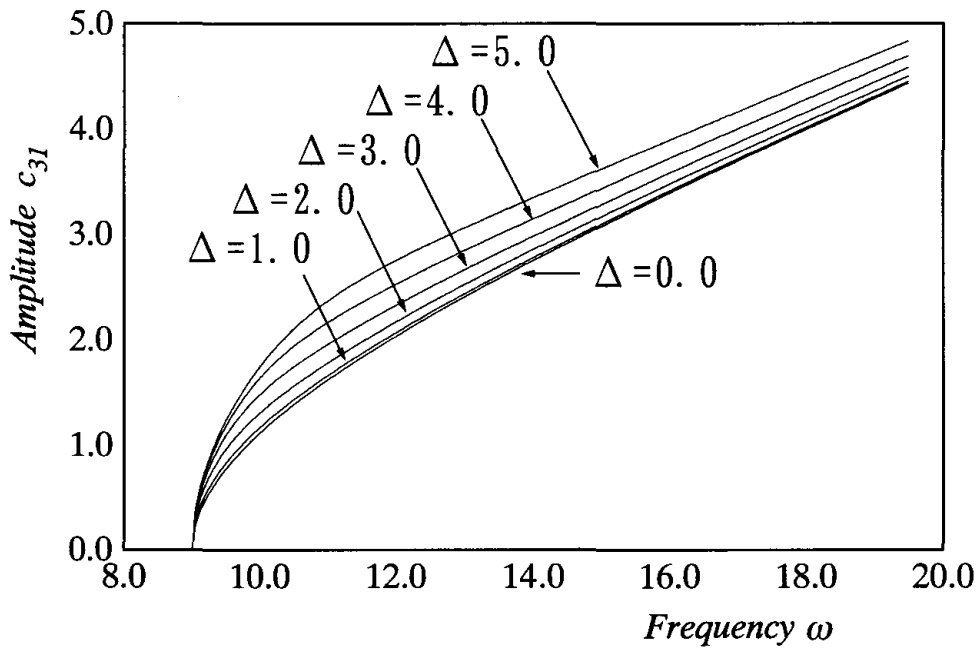
$n=1$ の1次振動の場合において、初期形状が正弦波の場合(式(3-

5))と等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合(式(6-1))に共通する単独項および連成項では,それぞれの係数の差は十分に小さい.式(3-5)に存在しない単独項および連成項が式(6-1)に存在するが,それぞれ係数は十分に小さく,1次振動においては,両者は同じものとして取り扱っても差し支えないと言える.

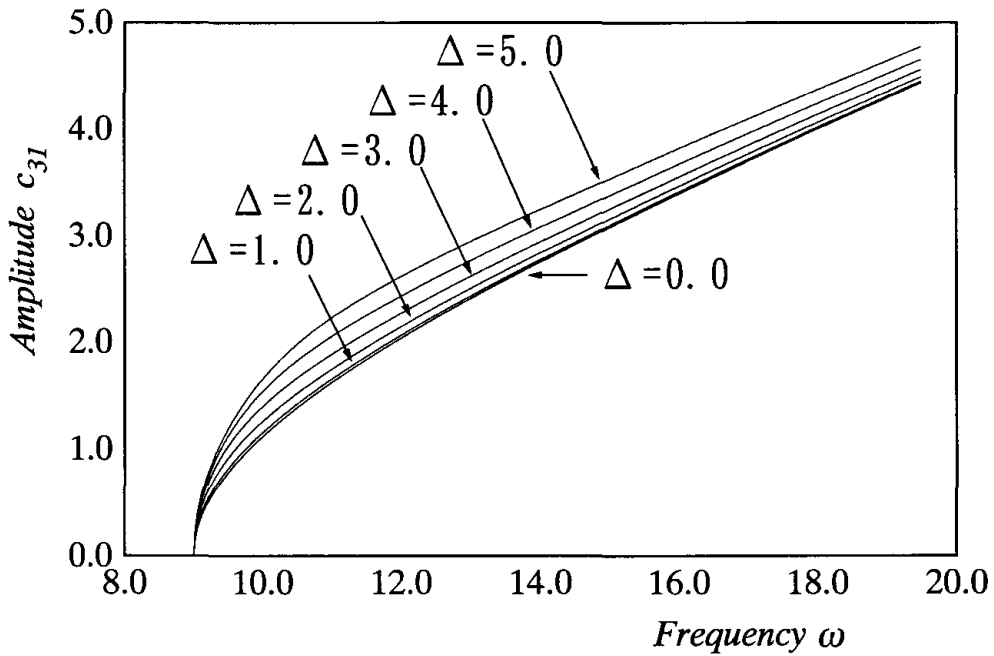
$n=3$ の3次振動の場合では,式(3-6),(6-2)に共通する単独項および連成項について,それぞれの係数の差は十分に小さい.式(3-6)に存在しない単独項および連成項の中に,係数の大きさが無視できない単独項 $T_3^2$ が存在する.単独項 $T_3^2$ はライズ比を介する2次の非線形項であり,偏平アーチの非線形振動特性に影響を及ぼすことが予想される.初期形状が等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合に存在する単独項 $T_3^2$ による非線形振動特性への影響を調べるために,調和バランス法を用いて解析を行う(3.3節参照).図-6.1は,3次振動の非線形自由振動曲線の結果を初期形状が正弦波と等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合について示す.単独項 $T_3^2$ が存在しない正弦波の場合と比較すると,単独項 $T_3^2$ が及ぼす影響はライズ比が増大するほど増加し,同じ加振振動数において応答振幅は減少する.しかし,両者の本質的な非線形振動特性に違いは見られず,初期条件の違いが及ぼす非線形振動特性への影響は小さい.

以上より,正弦波を初期形状にもつ偏平アーチと等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチについて,時間に関する非線形運動方程式の係数に大きな違いは見られず,非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さいことがわかる.





(a) 初期形状が正弦波で与えられる偏平アーチ



(b) 等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を  
初期形状にもつ偏平アーチ

図-6.1 3次振動の非線形自由振動曲線

### 6.3 本章のまとめ

本章では，等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチについて時間に関する非線形運動方程式を導き，偏平アーチの非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響を明らかにした．得られた結果を要約すると，次のとおりである．

正弦波を初期形状にもつ偏平アーチと等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの両者の非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さく，両者は，本質的に同じ非線形振動特性を示す．

## 第7章 偏平アーチの非線形応答に及ぼす境界条件の影響

### 7.1 はじめに

前章までは、境界条件が両端ヒンジの偏平アーチについて解析を行ってきた。しかし、境界条件が異なる場合に、端部の曲げに対する拘束度の大きさの違いによって非線形振動特性が異なることが予想される。そこで、この章では、偏平アーチの非線形振動に及ぼす境界条件の影響を調べるため、境界条件が両端固定の偏平アーチの非線形振動特性を1自由度系について明らかにし、境界条件が両端ヒンジの場合の非線形振動特性と比較、検討を行う。

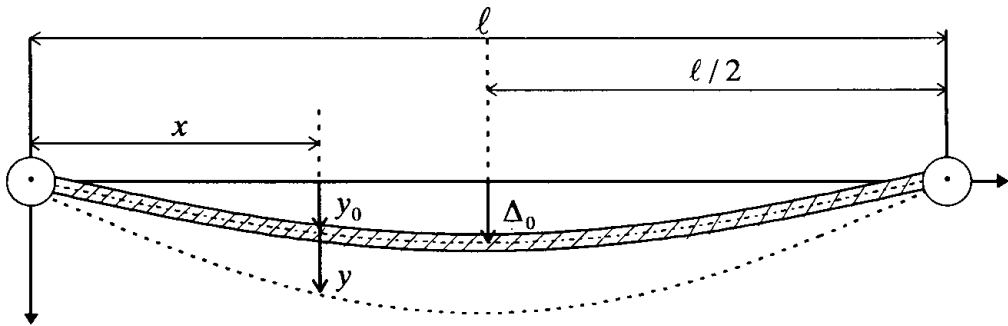


図-7.1 両端ヒンジの偏平アーチの一般図

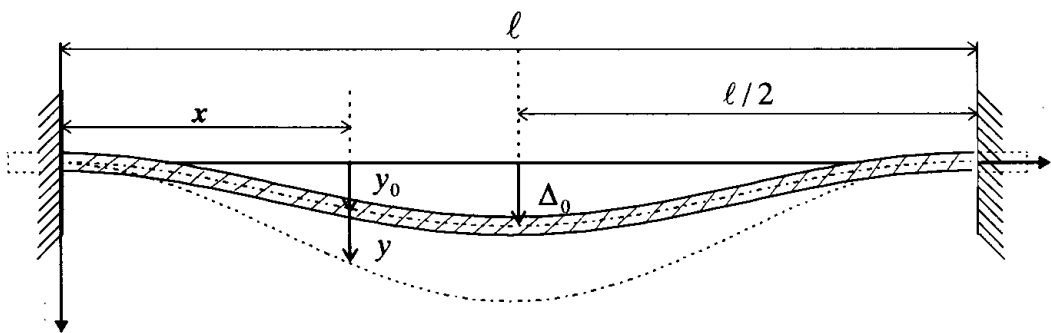


図-7.2 両端固定の偏平アーチの一般図

## 7.2 境界条件が固定の場合の非線形運動方程式

図-7.1 は、前章までに取り扱った、境界条件が両端ヒンジで、座標関数および形状関数が正弦波で与えられた場合の偏平アーチの一般図について示したものである。図-7.2 は、この章で取り扱う両端固定の偏平アーチの一般図を示したものである。ライズの形状関数は座屈波形を用いている。

図-7.2 に示すような偏平アーチに周期的変動荷重が作用する場合の時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が第3章の式(3-3)より次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left( Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m \\ = \gamma_n p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (7-1)$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$ 、 $p = p_0 \ell^4 / EI r$ 、 $h_n$ ：減衰定数、 $\omega = \Omega / \omega_1$ 、 $\tau = \omega_1 t$ ：無次元時間、 $\omega_1$ ：ライズのないうりの線形1次固有円振動数、 $\lambda_1 = \ell \sqrt{\rho S \omega_1^2 / EI}$ 、定積分  $S_n^0$ 、 $Q_k^0$ 、 $\beta_{klm}^n$ 、 $R_{ln}$ 、 $P_{kl}$  および  $\gamma_n$  は、3.1節に示している。

座標関数  $X_n$  は、両端固定ばりの固有振動形を用いる。

$$\begin{aligned} X_n(x) = \frac{1}{X_n(0.5\ell)} \left[ (\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x) - \frac{\cos \lambda_n \ell - \cosh \lambda_n \ell}{\sin \lambda_n \ell - \sinh \lambda_n \ell} \right. \\ \left. \times (\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x) \right] \end{aligned} \quad (7-2)$$

$$\lambda_1 \ell = 4.730040744863$$

$$\lambda_2 \ell = 7.853204624096$$

$$\lambda_3 \ell = 10.99560783800$$

両端固定の偏平アーチへの適用として、ライズの形状関数が座屈波形  $\bar{X} = \sin^2 \pi \xi$  の場合の対称振動を考える。系を1次振動と3次振動の2自由度系と仮定し線形減衰力を考慮すれば、式(7-1)は次式となる。

$$\begin{aligned} \ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.1407\Delta^2 T_3 + 0.1801\Delta T_1^2 + 0.3551\Delta T_1 T_3 \\ + 0.7413\Delta T_3^2 + 0.1606T_1^2 T_3 + 0.7105T_1 T_3^2 + 0.05994T_1^3 \\ + 0.5493T_3^3 = 0.002636p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (7-3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_3 + 2h_3\alpha_3\dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 + 0.1103\Delta^2 T_1 + 0.1391\Delta T_1^2 + 1.1621\Delta T_1 T_3 \\ + 1.6942\Delta T_3^2 + 0.5569T_1^2 T_3 + 1.2916T_1 T_3^2 + 0.04197T_1^3 \\ + 4.9428T_3^3 = -0.0010p \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (7-4)$$

ここに、 $h_1, h_3$  : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1+0.1202\Delta^2}$  : 1次固有円振動数、  
 $\alpha_3 = \sqrt{29.2023+0.1291\Delta^2}$  : 3次固有円振動数。

1次振動のみを考慮した1自由度系の解法について述べる。

1次振動の1/2分数調波共振を求めるために、式(7-3)の解を次式のように仮定する。

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_1 \cos \omega \tau + s_1 \sin \omega \tau \\ = \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos \left( \frac{\omega \tau}{2} - \phi_{1/2} \right) + A_1 \cos(\omega \tau - \phi_1) \end{aligned} \quad (7-5)$$

ここに、 $A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$  : 分岐応答成分、 $A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$  : 付随応答成分、 $\phi_{1/2} = \tan^{-1} \left( \frac{s_{1/2}}{c_{1/2}} \right)$ 、 $\phi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{s_1}{c_1} \right)$  : 位相差、 $c_0, c_1, s_1$  : 付随型の振幅成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$  : 分岐型の振幅成分。

式(7-5)を式(7-3)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られる。これにNewton-Raphson法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

また、 $T_1 = P_1$ 、 $\dot{T}_1 = P_2$ とおくと、式(7-3)は次に示す2個の1階常微

分方程式に変換することができる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h\alpha P_2 - \alpha^2 P_1 - 0.1801\Delta P_1^2 - 0.05994P_1^3 + 0.002636p \cos\omega\tau \end{aligned} \quad (7-5)$$

この式にRunge-Kutta-Gill法を用いて、時間応答解析を行う。

### 7.3 解析結果

#### 7.3.1 線形自由振動の特性

本項では、対称1，2次振動，逆対称1次振動を対象に線形自由振動の特性について解析を行う。7.2節に示した誘導を非線形項を無視して行えば、時間に関する線形運動方程式は、次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.1801\Delta T_1^2 + 0.05994T_1^3 = 0.002636p \cos\omega\tau \quad (7-6)$$

$$\ddot{T}_2 + 2h_2\alpha_2\dot{T}_2 + \alpha_2^2 T_2 + 0.92996T_2^3 = 0 \quad (7-7)$$

$$\ddot{T}_3 + 2h_3\alpha_3\dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 + 1.6942\Delta T_3^2 + 4.9428T_3^3 = -0.0010p \cos\omega\tau \quad (7-8)$$

ここに、

$$\alpha_1 = \sqrt{1+0.1202\Delta^2} \quad : \text{対称1次固有円振動数}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{7.5982} = 2.7565 \quad : \text{逆対称1次固有円振動数}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{29.2023+0.1291\Delta^2} \quad : \text{対称2次固有円振動数.}$$

図-7.3,7.4は、境界条件が両端ヒンジの場合と両端固定の場合の扁平アーチのライズ比 $\Delta$ と線形固有振動数の関係を対称1，2次振動，逆対称1次振動について示す。ライズの大きさは回転半径 $r$ 程度であるから<sup>8)</sup>，ライズの大きさは10まで表示している。

境界条件がヒンジの場合は、対称1次振動の線形固有振動数以外は、ライズ比 $\Delta$ の影響を受けずに一定の値をとっていたが、境界条件が固定の場合には、対称1次振動のみでなく、対称2次振動の線形固有振動数もライズ比 $\Delta$ の影響を受け、ライズ比 $\Delta$ の増大と共に増加する。一方、逆対称1次振動の線形固有振動数は、ライズ比 $\Delta$ の影響を受けず一定値2.7565をとる。したがって、逆対称1次振動

の線形固有振動数は初期形状すなわちライズの影響を受けない。また、境界条件が固定では、境界条件がヒンジの場合に比べ、各モードの線形固有振動数の値が接近し、振動モード間のより強い連成が予想される。また、ライズ比  $\Delta$  が大きくなると、対称 1 次振動の線形固有振動数が逆対称 1 次振動の線形固有振動数より高い振動数を示す。しかし、本論文で取り扱うライズ比  $\Delta$  の範囲においては、境界条件がヒンジと固定ともに、最小固有振動数は、対称 1 次振動である。

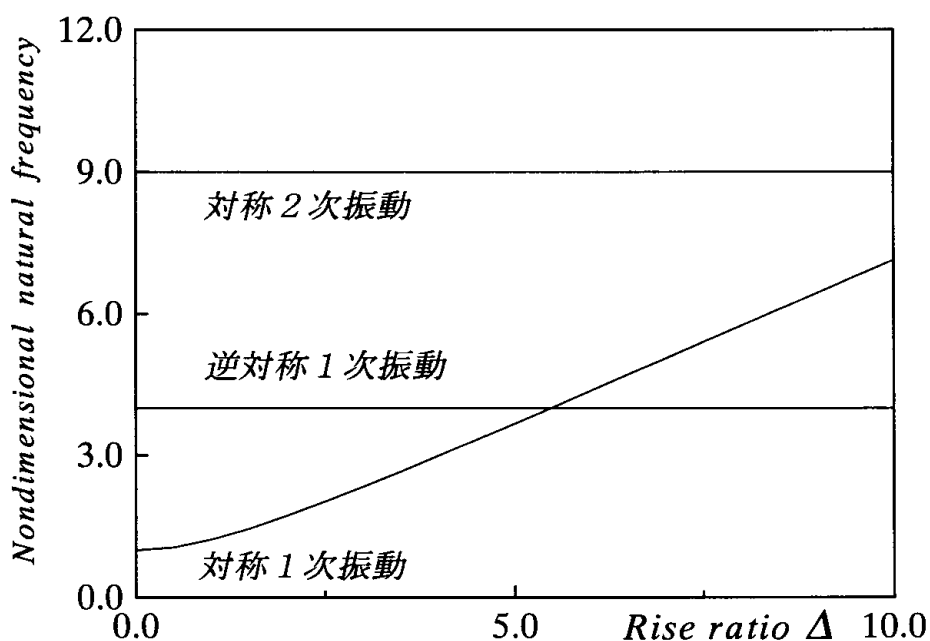


図-7.3 両端ヒンジの場合の線形自由振動曲線

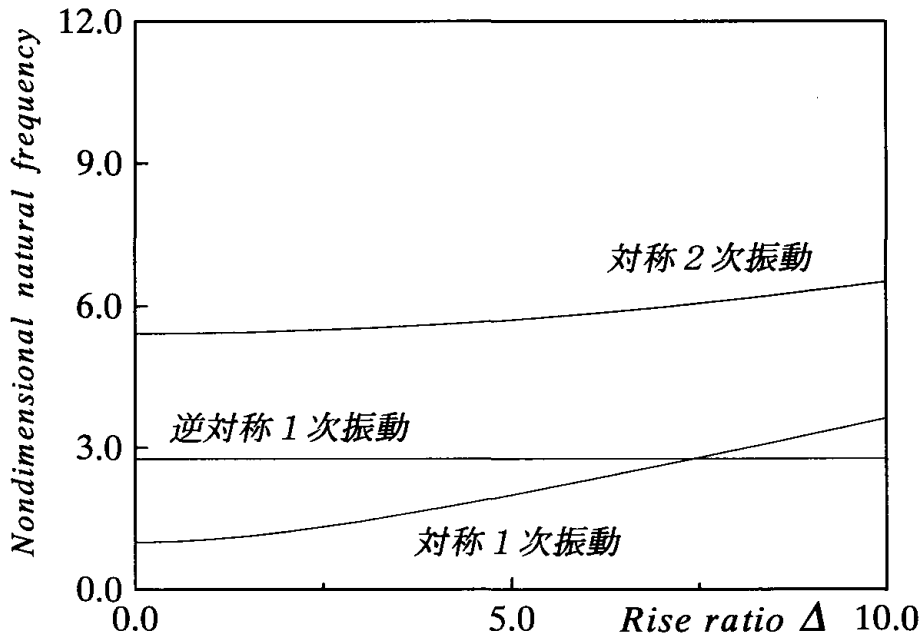


図-7.4 両端固定の場合の線形自由振動曲線

### 7.3.2 非線形自由振動の特性

図-7.5は、境界条件が固定の場合の非線形自由振動曲線をライズ比 $\Delta$ をパラメータに示す。減衰定数 $h=0.0$ の非減衰振動を対象としている。横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形1次固有円振動数で無次元化した無次元振動数 $\omega$ 、縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅 $c_1$ である。

$\Delta=0.0$ のときは、振幅の変動成分 $c_1$ は無次元振動数とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が大きくなるとライズの影響が効いてくる。この時の無次元振動数 $\omega$ の増加とともに、振幅の変動成分 $c_1$ は減少する軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると、振幅の変動成分 $c_1$ は無次元振動数 $\omega$ の増加する硬化バネの挙動を示す。境界条件が両端ヒンジの場合と比べると両端固定の場合の方がライズの影響は小さく、軟化・硬化バネ特性はあまり強く現れない。

以上より、境界条件が異なる場合でも、ライズの影響を受け、振幅に大きさにより軟化・硬化バネの両特性をもつ。また、境界条件



が両端ヒンジに比べ両端固定の方が軟化・硬化バネ特性は弱い。

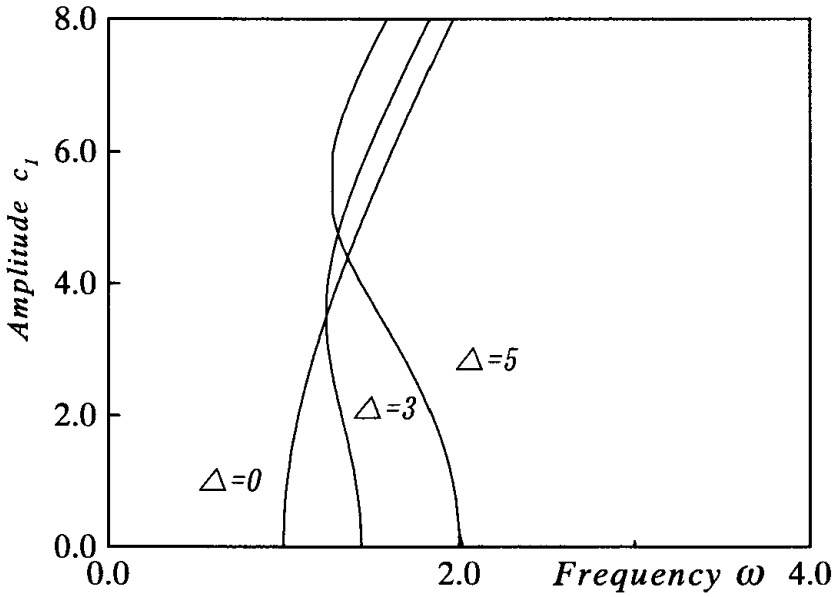


図-7.5 非線形自由振動曲線 ( $h_1 = 0.0, p_1 = 0.0$ )

### 7.3.3 荷重 - 変位曲線の特性

図-7.6 は、境界条件が固定の場合の偏平アーチの静的荷重 - 変位曲線を示している。横軸は静的応答成分  $c_0$  を、縦軸は荷重強度  $p$  である。

ライズ比  $\Delta = -3.0$  程度までは静的応答成分  $c_0$  は、荷重とともに単調に増加するのみであるが、ライズがマイナス方向に大きくなり、ライズ比  $\Delta = -5.0$  以下(絶対値は増加)になると釣合荷重に極値が存在し、飛び移り座屈が可能となる。本論文では、対称な偏平アーチに対称に分布する荷重が作用する場合を対象とするため、これらの変形は、偏平アーチの中央に対して対称である。

飛び移り座屈が可能な釣合荷重の極値について境界条件が両端ヒンジの場合と比較すると両端固定の場合の方が釣合荷重の極値はかなり高く、動座屈は生じにくい。

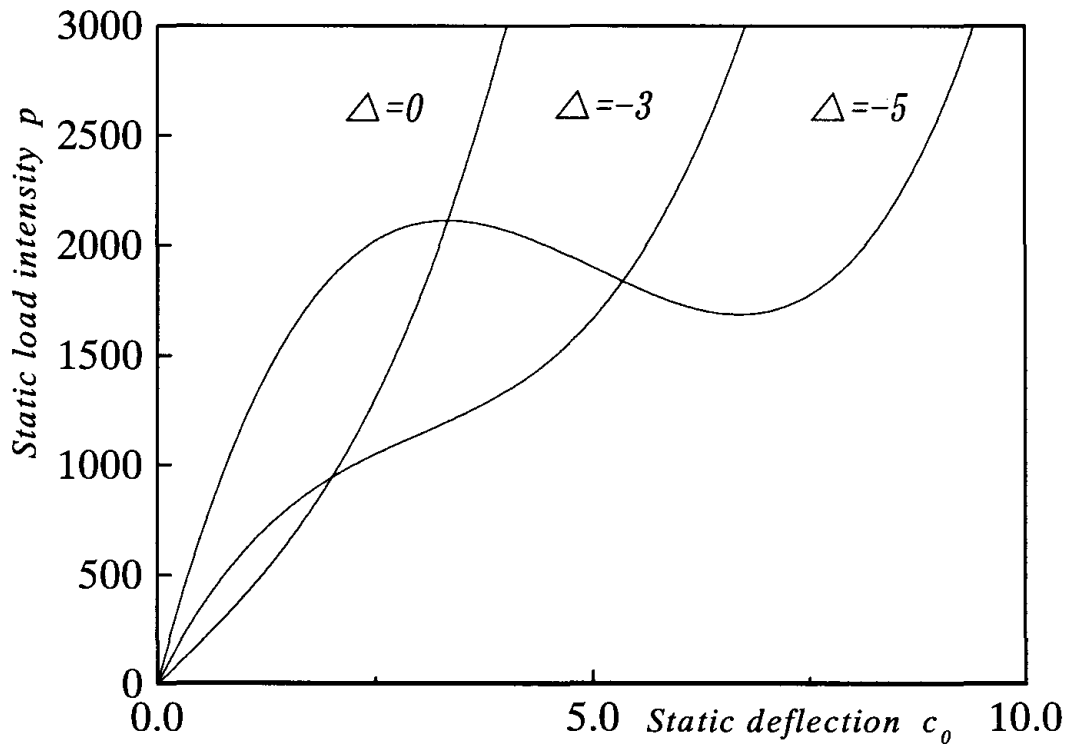


図-7.6 荷重-変位曲線

### 7.3.4 応答曲線の特性

図-7.7 は、境界条件が両端ヒンジの偏平アーチのライズ比  $\Delta = 3.0$ 、荷重強度  $p = 612.0$ 、減衰定数  $h = 0.005$  について無次元振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1$ 、 $A_{1/2}$  の関係を示す。図-7.8, 7.9 は、境界条件が両端固定の偏平アーチのライズ比  $\Delta = 3.0$ 、減衰定数  $h = 0.005$  について無次元振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1$  の関係を両端ヒンジの場合と同じ荷重強度  $p = 612.0$  および静的応答が同じとなる荷重強度  $p = 1017.8$  の場合について示す。

境界条件が異なる場合でも、主調波応答  $A_1$  は、あらゆる振動数領域で生じ、1/2 分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  は、固有振動数の 2 倍の振動数近傍で分岐する。式(7-3)に  $\Delta T_1^2$  が含まれるため主調波応答  $A_1$ 、1/2 分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  とともにライズ比の影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性もつが、両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合の方がライズ比の影響が小さい。これは、式(7-3)のライズ比を含ん

だ 2 次の非線形項の係数が両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合の方が小さいことに起因する。荷重強度が増加すると、境界条件がヒンジの場合では、1/2 分数調波共振の発生領域の幅は著しく広がるが、境界条件が固定の場合では、荷重強度が増加しても 1/2 分数調波共振の発生領域の幅はあまり変わらない。また、境界条件が異なる両端ヒンジと両端固定の偏平アーチでは、両端固定の偏平アーチの方が、1 次振動の 1/2 分数調波共振近傍に現れるカオスについて発生し難い。

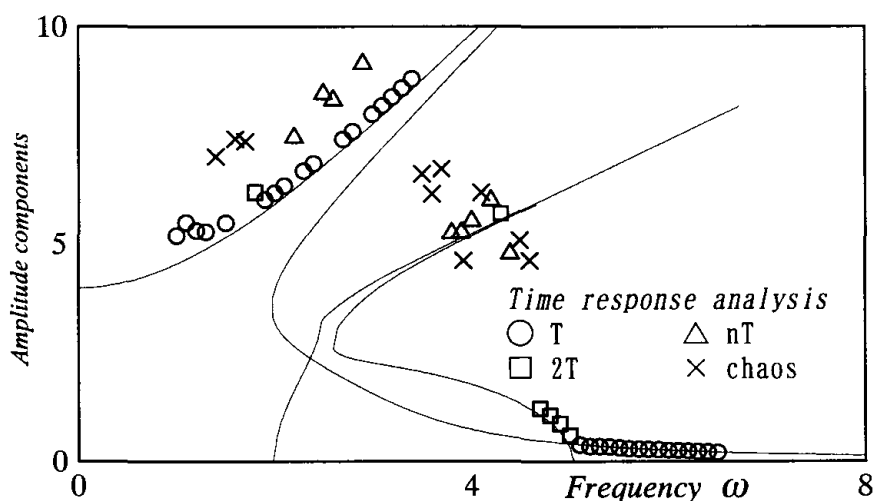


図-7.8 両端ヒンジの偏平アーチの応答曲線  
( $\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 612.0$ )

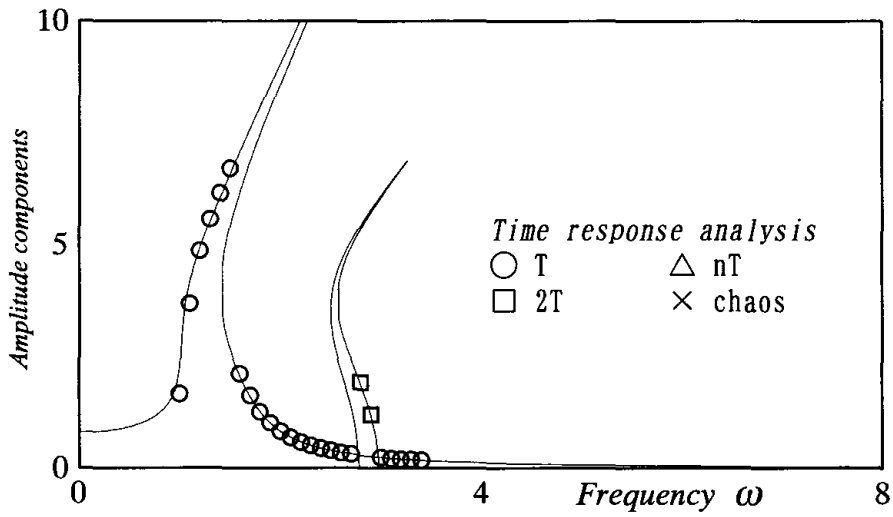


図-7.9 両端固定の偏平アーチの応答曲線  
 ( $\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 612.0$ )

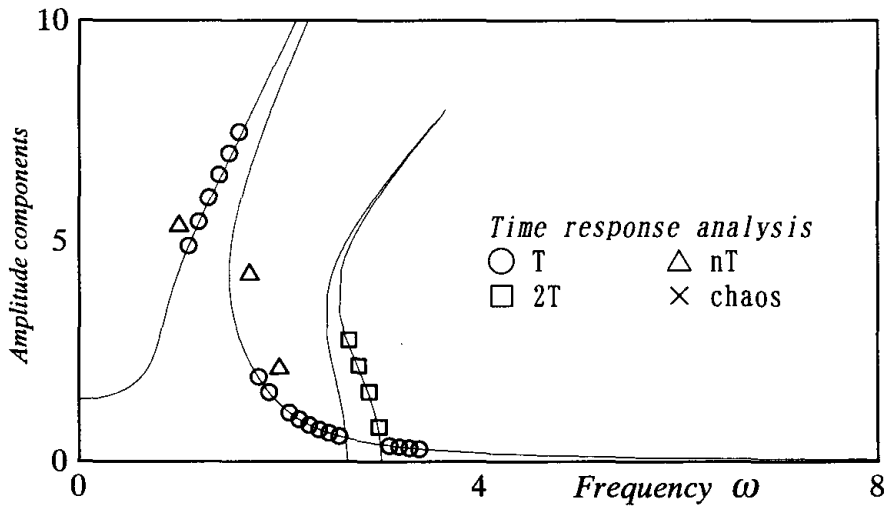


図-7.10 両端固定の偏平アーチの応答曲線  
 ( $\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 1017.8$ )

#### 7.4 本章のまとめ

本章では、境界条件が両端固定の偏平アーチの非線形振動特性について解析を行い、境界条件が両端ヒンジの場合と比較して偏平アーチに及ぼす境界条件の影響について検討を行った。得られた結果を要約すると次のとおりである。

- (1) ライズの小さい偏平アーチでは，境界条件が両端固定と両端ヒンジの異なる場合においても対称 1 次振動が最小固有振動数を有する．
- (2) 境界条件が異なる場合においても，線形自由振動曲線は軟化・硬化バネの両特性を示す．
- (3) 境界条件が異なる場合においても，応答曲線はライズの影響を受けて，軟化・硬化バネの両特性を示すが，境界条件が両端固定の場合にライズの影響が小さい．
- (4) 荷重強度の増加により，1 次振動の  $1/2$  分数調波共振の発生領域の幅は変化する． $1/2$  分数調波共振の発生領域の幅の変化に対して，境界条件の違いは顕著に現れる．
- (5) 境界条件が異なる両端ヒンジと両端固定の偏平アーチでは，両端固定の偏平アーチの方が，1 次振動の  $1/2$  分数調波共振近傍に現れるカオスについて発生し難い．

## 第 8 章 まとめ

本論文では、未解明な問題が残されている偏平アーチの非線形振動の挙動について、カオスを含めた振動モード間の連成の影響、初期形状と境界条件が及ぼす非線形応答への影響に関する基礎的な特性を得るために解析を行った。

得られた結果を総括すると次のとおりである。

- (1) 非線形自由振動の振動特性はライズによって、軟化・硬化バネの両特性を持つため、ライズ比は応答特性に大きな影響を及ぼしてくる。
- (2) 1次振動の1/2分数調波共振近傍において、周期 $nT$  ( $n \geq 3$ )およびカオスが存在し、カオスに至る道筋は、周期的振動が周期 $nT$  ( $n \geq 3$ )の振動を間欠的に繰り返しながら、カオスに至る。
- (3) 1次振動の固有振動数はライズ比の影響を受けるのに対して、3次振動の固有振動数はライズ比の大きさに無関係である。
- (4) 3次振動の非線形自由振動が起きると1次振動と連成し、変動成分が加振され、直流成分がライズを打ち消す方向に作用する。3次非線形振動については1次振動の影響を考慮した多自由度系の取り扱いが必要である。3次振動の振動数と振幅の関係はライズの大きさに無関係に硬化バネを示す。
- (5) 3次振動の主調波応答の共振領域はライズ比の影響を受けないが、ライズがある場合の方が応答振幅が大きくなる。3次振

動に及ぼす減衰定数の影響は 1 次振動に及ぼす減衰定数の影響より大きい。

- (6) 1 次振動が周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) で振動している振動数領域では 3 次振動も周期  $nT$  ( $n \geq 3$ ) で振動し、カオスが発生している領域においては、不規則振動を示す。
- (7) 1 次振動の  $1/2$  分数調波共振近傍のカオスの発生について、その特性に及ぼす 3 次振動の影響は小さい。したがって、1 次振動の  $1/2$  分数調波共振近傍のカオス解析については、1 自由度系の解析で妥当である。
- (8) 正弦波を初期形状にもつ偏平アーチと等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの両者の非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さく、両者は、本質的に同じ非線形振動特性を示す。
- (9) ライズの小さい偏平アーチでは、境界条件が両端固定と両端ヒンジの異なる場合においても対称 1 次振動が最小固有振動数を有する。
- (10) 境界条件が異なる場合においても、線形自由振動曲線は軟化・硬化バネの両特性を示す。
- (11) 境界条件が異なる場合においても、応答曲線はライズの影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性を示すが、境界条件が両端固定の場合にライズの影響が小さい。

- (12) 荷重強度の増加により，1次振動の $1/2$ 分数調波共振の発生領域の幅は変化する．1次振動の $1/2$ 分数調波共振の発生領域の幅の変化に対して，境界条件の違いは顕著に現れる．
- (13) 境界条件が異なる両端ヒンジと両端固定の偏平アーチでは，両端固定の偏平アーチの方が，1次振動の $1/2$ 分数調波共振近傍に現れるカオスについて発生し難い．



## 参考文献

- 1) 高橋和雄：構造部材の大振幅振動特性に関する基礎的研究（学位論文），1984.
- 2) 土木学会：土木工学ハンドブック，I巻，pp.284～288，1988.
- 3) Yamaki,N. and Mori,A. : Non-linear Vibrations of a clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part I : Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol.71, No.3, pp.333～346, 1980.
- 4) 村田 賢，安江 博：周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈，日本建築学会構造系論文修，第469号，pp71～80，1995.3.
- 5) 高橋和雄，松野 進，鎌田智之，町田健一郎：偏平ケーブルの非線形振動に現われるカオスの解析，土木学会論文集，No. 525/ I - 33, pp.181～190, 1995.10.
- 6) 長島弘幸，馬場良和：カオス入門，培風館，1992..
- 7) Szeplinska-Stupnicka,W. and Niezgodzki,P.: The Approximate Approach to Chaos Phenomena in Oscillators Having Single Equilibrium Position, Journal of Sound and Vibration, Vol.141(2), pp.181～192, 1990.
- 8) 高橋和雄，太田昌一：偏平アーチの非線形振動とカオス解析，構造工学論文集，Vol.4 2 A, pp.55～61, 1996.3.
- 9) I.ジェコブセン・エーア著，後藤尚男・金多 潔共訳：構造物と機械のための振動工学，丸善（株），pp.281～282,1961.
- 10) 下条隆嗣：カオス力学入門，近代科学社，pp59～68,1993.

## 2. 偏平アーチの非線形振動に及ぼす 初期形状および境界条件の影響

高橋和雄\*・太田晶一\*\*

### Influence of the Initial Profile and the Boundary Conditions on Nonlinear Vibrations of an Arch with Small Rise

by

Kazuo TAKAHASHI\* and Shoichi OTA\*\*

Influences of the initial profile and the boundary conditions on nonlinear vibrations of an arch with small rise are discussed in the present paper. The equation of motion is solved by a Galerkin method and the harmonic balance method. From numerical results, the following conclusions are obtained. The influence of the initial profile on nonlinear vibrations is small. However, linear free vibrations, nonlinear free vibrations and forced vibrations are influenced by the difference of the boundary conditions.

#### 1. はじめに

近年、構造物の大規模化、都市景観への関心の高まりおよび構造部材の使用効率の良さなどから、長さに比べて板厚が小さい薄肉材や薄板が採用されている。この種の薄肉構造部材では、製作過程、支持部の出来具合および自重の影響などによってライズが必ず存在する。このようなライズをもつはりや軸方向圧縮力を受けて座屈したはり、偏平アーチとみなすことができる。このような偏平アーチを1自由度系とみなした解析はかなり行われている(文献1の文献参照)。著者らは、境界条件が両端ヒンジで正弦波を初期形状にもつ偏平アーチを1自由度系に近似し、非線形振動特性に及ぼすライズ比の影響およびカオスの存在について明らかにした<sup>1)</sup>。また、偏平アーチは連続体であることから、2自由度近似し、3次対称振動の非線形振動特性および1次対称振動近傍の分岐振動に及ぼす3次対称振動の影響について解析した<sup>2)</sup>。しかし、偏平アーチの非線形振動<sup>3),4)</sup>、動座屈<sup>5),6)</sup>、カオスなどにライズの大きさの他に初期形状が影響を及ぼし、また、

境界条件が異なる場合に、端部の曲げに対する拘束度の大きさの違いにより非線形振動特性が異なることが予想される。

そこで、本研究では、偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状および境界条件の影響を解析する。解析方法として、両端で軸方向変位が拘束された偏平アーチの運動方程式を、多自由度の振動系にモデル化した後、Galerkin法を用いて常微分方程式に変換する。

次に、境界条件が両端ヒンジで、等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチを2自由度系に近似し、常微分方程式の周期解を求めるために調和バランス法を用いて、連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson法により数値解析を行い、初期形状が非線形振動特性に及ぼす影響を明らかにする。また、境界条件が両端固定の偏平アーチを1自由度系に近似し、調和バランス法を用いて数値解析を行う。カオスおよび非周期解に関しては、Runge-Kutta-Gill法による時間応答解析を用い、境界条件が非線形振動特性に及ぼす影響の解析を行う。

平成9年10月28日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*長大(株) (Chodai Co. Ltd.)

2. 運動方程式の誘導

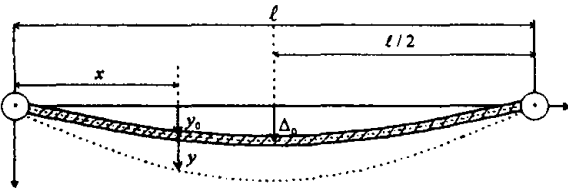


Fig. 1 Geometry of shallow arch.

Fig. 1 に示すような偏平アーチ（ライズの大きさが「はりの回転半径程度」に周期的変動荷重が作用する場合の非線形曲げ振動の運動方程式は次のように与えられる<sup>1)</sup>。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{EA}{2l} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right) dx \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = p_0 \cos \Omega t \tag{1}$$

ここに、 $E$ ：ヤング率、 $I$ ：断面2次モーメント、 $\rho$ ：密度、 $A$ ：断面積、 $l$ ：スパン長、 $y$ ：たわみ、 $x$ ：スパン方向の座標、 $y_0$ ：初期形状、 $p_0$ ：荷重強度、 $\Omega$ ：荷重の円振動数、 $t$ ：時間。

初期形状は境界条件を満足しなければならないので、次のように関数表示されるものとする。

$$y_0 = \Delta r \bar{X}(x) \tag{2}$$

ここに  $\Delta = \Delta_0/r$ ：ライズ比、 $\Delta_0$ ：ライズ、 $r$ ：回転半径、 $\bar{X}(x)$ ：初期形状の形状関数。

式(1)の解を次の変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \tag{3}$$

ここに、 $X_n$ ：座標関数、 $T_n$ ：未知の時間関数。

式(3)の座標関数  $X_n$  としてライズが零の直線ばりの固有振動形を用いる。式(2)、式(3)を式(1)に代入し、Galerkin 法を適用すれば次のような時間に関する多自由度の連立非線形常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \Delta^2 S_n^0 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^0 T_k \\ & + \Delta \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left( Q_k^0 R_{ln} + \frac{1}{2} S_n^0 P_{kl} \right) T_k T_l \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^0 T_k T_l T_m \\ & = \gamma_n p \cos \omega \tau \end{aligned} \tag{4}$$

ここに、 $\alpha_n = (\lambda_n/\lambda_1)^2$ 、 $S_n^0 = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_n d\xi$ 、

$$Q_k^0 = \int_0^l \frac{d\bar{X}}{d\xi} \frac{dX_k}{d\xi} d\xi, \quad R_{ln} = -\frac{1}{\lambda_1^4 x_n} \int_0^l \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_l X_n d\xi,$$

$$P_{kl} = \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi,$$

$$B_{klm}^0 = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \int_0^l \frac{d^2 \bar{X}}{d\xi^2} X_m d\xi / (\lambda_1^4 x_n),$$

$$\gamma_n = \int_0^l X_n d\xi / (\lambda_1^4 x_n), \quad X_n = \int_0^l X_n^2 d\xi,$$

$$p = p_0 l^4 / EI r,$$

$\lambda_1 = l^4 \sqrt{\rho A \omega_1^2 / EI}$ 、 $\omega = \Omega / \omega_1$ 、 $\omega_1$ ：ライズのないはりの線形1次固有円振動数、 $\tau = \omega_1 t$ 、 $\xi = x/l$

3. 初期形状の影響

3.1 等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチへの適用

境界条件が両端ヒンジで等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチの対称振動を考える。初期形状の関数として  $\bar{X} = 3.2 (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$  を用い、系を1次対称振動と3次対称振動の2自由度系に仮定し線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_1 + 2 h_1 \alpha_1 \dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.0187 \Delta^2 T_3 + 0.7529 \Delta T_1^2 \\ & + 2.2592 \Delta T_3^2 + 0.0186 \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1 T_3^2 + \frac{1}{4} T_1^3 \\ & = \frac{4}{\pi^3} p \cos \omega \tau \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_3 + 2 h_3 \alpha_3 \dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 + 0.0187 \Delta T_1 + 0.0092 \Delta T_1^2 \\ & + 0.2510 \Delta T_3^2 + 4.5173 \Delta T_1 T_3 + \frac{9}{4} T_1^2 T_3 + \frac{81}{4} T_3^3 \\ & = -\frac{4}{3 \pi^5} p \cos \omega \tau \end{aligned} \tag{6}$$

ここに、 $\alpha_1 = \sqrt{1 + 0.5039 \Delta^2}$ 、 $\alpha_3 = \sqrt{81 + 0.0007 \Delta^2}$ 。

Table 1 は前報の初期形状が正弦波の場合<sup>2)</sup> と本研究の等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線の場合の時間に関する非線形運動方程式の係数を示している。両者に共通する単独項および連成項の係数の差は十分に小さい。また、初期形状が正弦波の場合に存在しない単独項および連成項の係数に注目すると、 $n=1$  の1次対称振動の場合では、係数は十分に小さいが、 $n=3$  の3次対称振動の場合に、係数の大きさが無視できない単独項  $0.25 \Delta T_3^2$  が存在する。単独項  $0.25 \Delta T_3^2$  はライズ比を介する2次の非線形項であり、偏平アーチの3次対称振動の非線形振動特性に影響を及ぼすことが予想される。

Table 1 The coefficients of ordinary differential equations for the time functions

(a) sin curve  
(b) deflection curve.

	n = 1		n = 3	
	(a)	(b)	(a)	(b)
$a_n$	$\sqrt{1+0.5\Delta^2}$	$\sqrt{1+0.503\Delta^2}$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{81+0.0007\Delta^2}$
$T_1$	-	-	-	-
$T_3$	-	$0.02\Delta^2$	81	$81+0.0007\Delta^2$
$T_1^2$	$0.75\Delta$	$0.752\Delta$	-	$0.009\Delta$
$T_3^2$	$2.25\Delta$	$2.259\Delta$	-	$0.25\Delta$
$T_1^3$	0.25	0.25	-	-
$T_3^3$	-	-	20.25	20.25
$T_1T_3$	-	$0.02\Delta$	$4.5\Delta$	$4.517\Delta$
$T_1^2T_3$	-	-	2.25	2.25
$T_1T_3^2$	2.25	2.25	-	-

3.2 調和バランス法による解析

本研究では3.1節で述べたように非線形振動特性に及ぼす初期条件の影響が予想される3次対称振動について解析を行うために、式(5)、(6)の解を本研究では次式のように仮定する。

$$T_1 = c_{10} + c_{11/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{11/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + C_{11} \cos \omega \tau + s_{11} \sin \omega \tau \tag{7}$$

$$T_3 = c_{30} + c_{31} \cos \omega \tau + s_{31} \sin \omega \tau + c_{32} \cos 2 \omega \tau + s_{32} \sin 2 \omega \tau \tag{8}$$

ここに、 $c_{10}, c_{11/2}, s_{11/2}, c_{11}, s_{11}, c_{12}, s_{12}$  : 1次対称振動の振幅成分、 $c_{30}, c_{31}, s_{31}, c_{32}, s_{32}$  : 3次対称振動の振幅成分。

式(7)、(8)を式(5)、(6)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これにNewton-Raphson法を用いて解けば、定常振動の振幅成分が得られる。

3.3 数値結果

Table 2は、両者の3次対称振動の非線形自由振動曲線における、同じ無次元振幅  $c_{31}$  に対する無次元振動数  $\omega$  の値をライズ比  $\Delta = 1.0 \sim 5.0$  の場合について示す。単独項  $0.25\Delta T_3^2$  が存在しない正弦波の場合と比較すると、無次元振幅が小さい場合には、ライズ比が増大するほど単独項  $0.25\Delta T_3^2$  が及ぼす影響は増加し、同じ無次元振幅において無次元振動数は増大する。

無次元振幅が増加すると、両者の無次元振動数の差は小さくなっていく。

以上より、正弦波を初期形状にもつ偏平アーチと等分布荷重を受けるはりのたわみ曲線を初期形状にもつ偏平アーチについて、時間に関する非線形運動方程式の係数に大きな違いは見られず、非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さい。

Table 2 Nonlinear free vibrations of the third mode

(a) sin curve  
(b) deflection curve.

$\Delta$	$\omega$	10.0		12.0		14.0		16.0		18.0	
		(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
1.0	1.17	1.16	2.07	2.06	2.78	2.77	3.42	3.41	4.02	4.02	
2.0	1.31	1.26	2.17	2.15	2.86	2.84	3.48	3.47	4.07	4.07	
3.0	1.48	1.4	2.33	2.27	2.98	2.94	3.58	3.55	4.16	4.14	
4.0	1.64	1.54	2.53	2.43	3.15	3.08	3.73	3.67	4.29	4.24	
5.0	1.75	1.66	2.75	2.62	3.35	3.25	3.9	3.82	4.44	4.37	

4. 境界条件の影響

4.1 境界条件が両端固定の偏平アーチへの適用

両端固定の偏平アーチが、初期形状の関数として座屈波形  $X = \sin^2 \pi \xi$  をもつ場合に、系を1自由度系と仮定し線形減衰力を考慮すれば、時間に関する非線形運動方程式は次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 + 0.1801\Delta T_1^2 + 0.05994 T_1^3 = 0.002636 p \cos \omega \tau \tag{9}$$

ここに、 $h_1$  : 減衰定数、 $\alpha_1 = \sqrt{1+0.1202\Delta^2}$  : 1次固有円振動数。

4.2 調和バランス法による解析

1次対称振動の1/2分数調波共振を求めるために、式(9)の解を次式のように仮定する。

$$T_1 = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_1 \cos \omega \tau + s_1 \sin \omega \tau \tag{10}$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1$  : 付随型の振幅成分、 $c_{1/2}, s_{1/2}$  : 分岐型の振幅成分。

式(10)を式(9)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形方程式が得られ、これにNewton-Raphson法を用いて解けば、振幅成分が得られる。

4.3 時間応答解析

$T_1 = P_1, T_1 = P_2$  とおくと、式(9)は次に示す 2 個の 1 階常微分方程式に変換することができる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h\alpha_1 P_2 - \alpha_1^2 P_1 - 0.1801\Delta P_1^2 \\ &\quad - 0.05994P_1^3 + 0.002636p \cos \omega \tau \end{aligned} \tag{11}$$

この式に Runge-Kutta-Gill 法を用いて、時間応答解析を行う。

4.4 数値結果

(a) 線形自由振動の特性

両端固定の偏平アーチの 1 次対称、3 次対称振動、2 次逆対称振動を対象に線形自由振動の特性について解析を行う。4.1 節に示した誘導を非線形項を無視して行えば、時間に関する線形運動方程式は、次式となる。

$$\ddot{T}_1 + 2h_1\alpha_1\dot{T}_1 + \alpha_1^2 T_1 = 0 \tag{12}$$

$$\ddot{T}_2 + 2h_2\alpha_2\dot{T}_2 + \alpha_2^2 T_2 = 0 \tag{13}$$

$$\ddot{T}_3 + 2h_3\alpha_3\dot{T}_3 + \alpha_3^2 T_3 = 0 \tag{14}$$

ここに、

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + 0.1202\Delta^2} : \text{1 次対称固有円振動数}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{7.5982} = 2.7565 : \text{2 次逆対称固有円振動数}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{29.2023 + 0.1291\Delta^2} : \text{3 次対称固有円振動数}$$

上式の固有振動数と求めれば、線形自由振動数が得られる。

Fig. 2 は、境界条件が両端固定の場合の偏平アーチのライズ比と無次元線形固有振動数  $n_i$  の関係を 1 次対称、3 次対称振動および 2 次逆対称振動について示す。ライズの大きさは回転半径  $r$  程度であるから<sup>1)</sup>、ライズの大きさは 10 まで表示している。

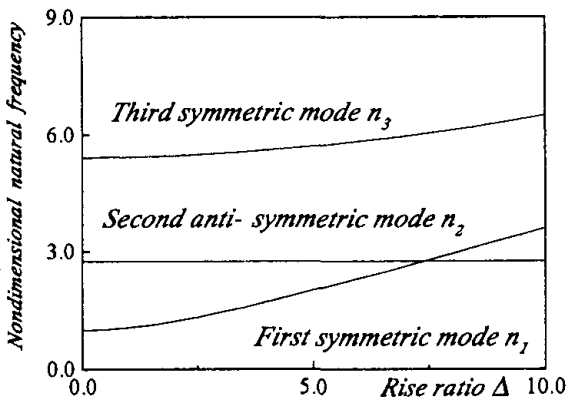


Fig. 2 Rise ratio vs. non-dimensional natural frequency.

境界条件がヒンジの場合は、1 次対称振動の線形固有振動数以外は、ライズ比  $\Delta$  の影響を受けずに一定の値であっが<sup>2)</sup>、境界条件が固定の場合には、1 次対称振動のみでなく、3 次対称振動の線形固有振動数もライズ比  $\Delta$  の影響を受け、ライズ比  $\Delta$  の増大と共に増加する。一方、2 次逆対称振動の線形固有振動数は、ライズ比  $\Delta$  の影響を受けず一定値をとる。したがって、2 次逆対称振動の線形固有振動数は初期形状すなわちライズの影響を受けない。また、境界条件が固定では、境界条件がヒンジの場合に比べ、各モードの線形固有振動数の値が接近し、振動モード間の連成が予想される。

(b) 非線形自由振動の特性

Fig. 3 は、境界条件が固定の場合の 1 次対称振動の非線形自由振動曲線をライズ比をパラメータに示す。減衰定数  $h=0.0$  の非減衰振動を対象としている。横軸は非線形円振動数をライズがないはりの線形 1 次固有円振動数で無次元化した無次元振動数、縦軸は回転半径で無次元化した無次元振幅である。

$\Delta=0.0$  のときは、振幅の変動成分  $c_1$  は無次元振動数とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が大きくなるとライズの影響が効いてくる。この時の無次元振動数  $\omega$  の増加とともに、振幅の変動成分  $c_1$  は減少する軟化バネの挙動を示す。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると、振幅の変動成分  $c_1$  は無次元振動数  $\omega$  の増加する硬化バネの挙動を示す。境界条件が両端ヒンジの場合と比べると両端固定の場合の方がライズの影響は小さく、軟化・硬化バネ特性はあまり強く現れない。

以上より、境界条件が異なる場合でも、ライズの影響を受け、振幅に大きさにより軟化・硬化バネの両特

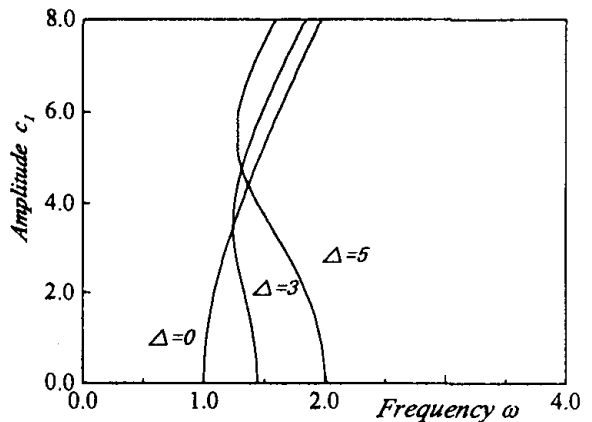


Fig. 3 Amplitude-frequency curves of the first mode with  $h_1=h_3=0.0$ .

性をもつ。また、境界条件が両端ヒンジに比べ両端固定の方が軟化・硬化バネ特性は強くない。

(c) 荷重-変位曲線の特性

Fig. 4は、境界条件が固定の場合の偏平アーチの静的荷重-変位曲線を示している。横軸は静的応答成分  $c_0$  を、縦軸は荷重強度  $p$  である。

ライズ比  $\Delta = -3.0$  程度までは静的応答成分  $c_0$  は、荷重とともに単調に増加するのみであるが、ライズがマイナス方向に大きくなり、ライズ比  $\Delta = -5.0$  以上（絶対値が増加）になると釣合荷重に極値が存在し、飛び移り座屈が可能となる。本研究では、対称な偏平アーチに対称に分布する荷重が作用する場合を対象とするため、これらの変形は、偏平アーチの中央に対して対称である。

飛び移り座屈が可能な釣合荷重の極値について境界条件が両端ヒンジの場合と比較すると両端固定の場合の方が釣合荷重の極値はかなり高く、動座屈は生じにくい。

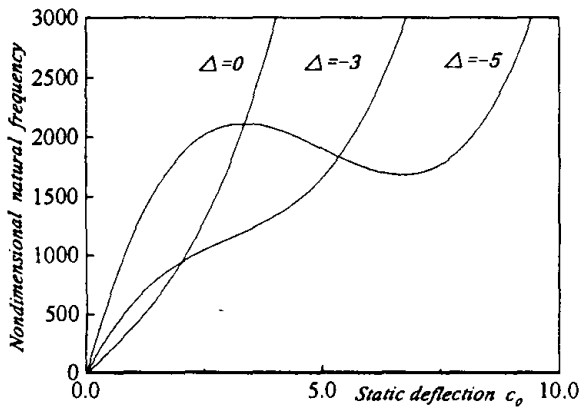


Fig. 4 Static load-deflection curves.

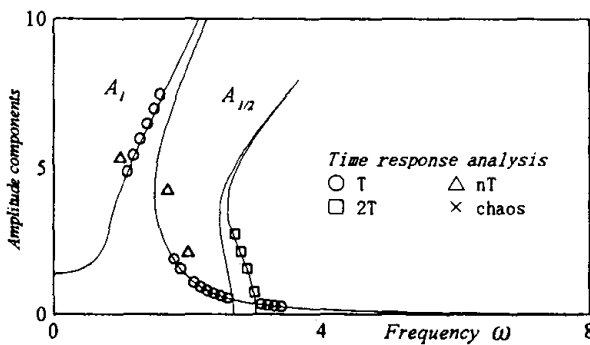


Fig. 5 Amplitude-frequency curves with  $\Delta = 3.0, h = 0.005, p = 1017.8$ .

(d) 応答曲線の特性

Fig. 5に両端固定の偏平アーチのライズ比  $\Delta = 3.0$ 、減衰定数  $h_1 = 0.05$  の無次元加振円振動数  $\omega$  と応答振幅  $A_1, A_{1/2}$  との関係を示す。境界条件が異なる場合については、式(9)に  $\Delta T^2$  が含まれるため主調波応答  $A_1$ 、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2}$  ともにライズ比の影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性もつが、両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合がライズ比の影響が小さい。これは、式(9)のライズ比を含んだ2次の非線形項の係数が両端ヒンジの場合に比べて両端固定の場合が小さいことに起因する。また、1次対称振動の1/2分数調波共振近傍に現れるカオスについて、境界条件が両端固定の場合は発生しない。

5. まとめ

本研究では、偏平アーチの非線形振動特性に及ぼす初期形状および境界条件の影響について解析を行った。

得られた結果をまとめると次のとおりである。

- (1) 偏平アーチの非線形振動特性に及ぼす初期形状の影響は小さい。
- (2) 両端固定の偏平アーチに無次元線形固有振動数は、1次対称振動のみならず、3次対称振動の場合にもライズ比の影響を受けて変化する。
- (3) 応答曲線はライズの影響を受けて、軟化・硬化バネの両特性を示すが、境界条件が両端固定の場合にライズの影響が小さい。
- (4) 両端固定の偏平アーチの方が、1次対称振動の1/2分数調波共振近傍に現れるカオスについて発生しない。

今後、多自由度系として係数励振振動による連成現象、偏平アーチの動的な座屈現象とそのメカニズムの解明などを明らかにする必要がある。また、実験におけるカオスの確認も今後の課題である。

なお、数値計算には長崎大学総合情報処理センターのVP-1200を使用したことを付記する。

参考文献

- 1) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動とカオス解析, 構造工学論文集, Vol.42A, pp.55~61, 1996.3.
- 2) 高橋和雄, 太田晶一: 偏平アーチの非線形振動解析-多自由度系としての解析-, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.89~96, 1997.4.
- 3) Plaut, R.H. and Hsieh, J.-C.: Oscillations and In-

- stability of a Shallow Arch under Two-Frequency Excitation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, No.2, pp.189~201, 1985.
- 4) Yamaki, N. and Mori, A.: Non-linear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.71, No.3, pp.333~346, 1980.
- 5) Leung, A.Y.T. and Fung, T.C.: Nonlinear Steady State Vibration and Dynamic Snap Through of Shallow Arch Beams, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.19, pp.409~430, 1990.
- 6) 村田 賢, 安江 博: 周期外乱を受ける偏平アーチの動座屈, *日本建築学会構造系論文集*, 第469号, pp.71~80, 1995.3.

## 3. ライズを持つ長方形板の非線形振動挙動に関する研究

高橋 和雄\*・三堂 聡\*\*

## Study on Nonlinear Vibration Properties of a Rectangular Plate with a Small Rise

by

Kazuo TAKAHASHI\*, Satoshi MIDOU\*\*

In this study, the nonlinear vibration properties of a rectangular plate with a small rise are examined. The equations of motion of describing the large deflection of the initially deflected plate using the Marguerre equation are analyzed by a Galerkin method. The resulting equation for time variable with quadratic and cubic nonlinear terms is solved by the harmonic balance method. Nonlinear free vibrations and forced vibrations are obtained for two boundary conditions, various aspect ratios and rise ratios. The rise of the plate has a significant influence upon nonlinear vibration properties.

## 1. まえがき

薄板にライズを持たせると曲率構造となるため、剛性が高まり構造上有利である。しかし、飛び移り座屈を含めた不安定現象が生じやすく、ライズの大きさが座屈強度に敏感に影響を及ぼすことが知られている。これまでライズを持つ偏平アーチの非線形振動を解析してきたが<sup>1)</sup>、本研究では、ドームや体育館の屋根などに使われるライズを持つ長方形板の解析を行うため、これまでの偏平アーチの取り扱い<sup>1)</sup>を板構造に拡張して解析する。ライズによって生じる運動方程式内の2次の非線形項が座屈特性に重要な役割を果たす。動的荷重が作用する場合には、動座屈や振動の問題が生じてくる。変形に対して幾何学的非線形性を示すため動力学特性を説明するためには、線形振動のみならず、非線形振動特性も明らかにしなければならない。非線形振動<sup>2)</sup>、動的座屈<sup>3)</sup>、カオス<sup>4)</sup>などに、ラ

イズの大きさや形状が大きな影響を及ぼすことが予想される。ライズを持つ長方形板の非線形振動の挙動は極めて複雑で、カオスの存在、動座屈など未解明な問題が残されている。

このような観点から、本研究はまずライズを持つ長方形板の運動方程式の応力関数を決定し、Galerkin法を適用して1自由度系に近似した非線形運動方程式を得る。これに、調和バランス法を用いて連立非線形代数方程式に変換し、Newton-Raphson法により解析を行う。また、調和バランス法から得られる解析解の妥当性を検証するためにRunge-Kutta-Gill法による数値シミュレーションによって、精度を検討する。さらに、境界条件が、全周辺単純支持と全周辺固定について荷重変位曲線、非線形自由振動及び強制振動の特性を、ライズ比、縦横比及び荷重強度をパラメーターに解析を行う。

平成10年 4月13日

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*大学院工学研究科社会開発工学専攻 (Graduate Student, Department of Civil Engineering)



## 2. 運動方程式

Fig. 1 のようなライズを持つ長方形板を対象としている。

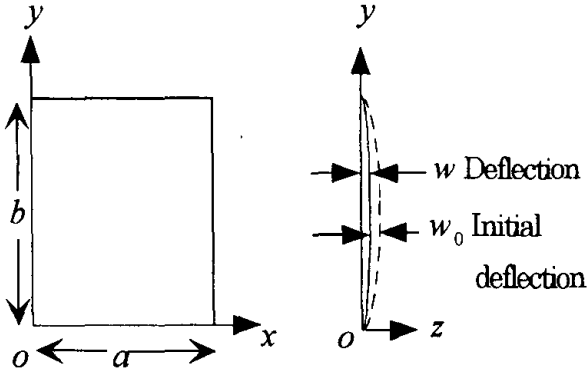


Fig. 1 Rectangular plate with a small rise and co-ordinate system.

ライズを持つ長方形板の運動方程式と適合条件式は次のようである<sup>5)</sup>。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w + p_0 \cos \Omega t - d \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 F = E \left[ \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\}^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \right] \quad (2)$$

ここに、 $\rho$ :板の密度、 $d$ :板厚、 $E$ :ヤング率、

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)}: \text{板剛度}, \nu: \text{ポアソン比},$$

$$\nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2, \quad p_0: \text{荷重強度}, \quad t: \text{時間},$$

$\Omega$ : 励振円振動数、 $F$ : Airy の応力関数。

## 3. 解法

面外変位  $w$  の境界条件として、次の 2 ケースを考える。

case 1 : 全周辺単純支持

case 2 : 全周辺固定

面内方向の境界条件として、面内変位  $u, v$  は固定とする。

### 3.1 たわみの仮定

式 (1) の解を境界条件を満足するように次のように仮定する。

case 1

$$w = dT(t) \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (3)$$

case 2

$$w = \frac{1}{4} dT(t) \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{a} x \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{b} y \right) \quad (4)$$

ここに、 $T(t)$ : 未知の時間関数。

ライズの形状も境界条件を満足する必要があるから、次のように仮定する。

case 1

$$w_0 = de_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad (5)$$

case 2

$$w_0 = \frac{1}{4} de_0 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{a} x \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{b} y \right) \quad (6)$$

ここに、 $e_0$ : 板厚で無次元化した初期変形の大きさ。

### 3.2 応力関数の決定

まず式 (2) より応力関数  $F$  の一般解を、面内方向の境界条件の下に決定しなければならない。式 (2) の一般解は次のように表される。

$$F = F_p + F_c \quad (7)$$

ここに、 $F_p$ : 特解、 $F_c$ : 余解。

式 (2) の余解を次のように仮定すれば、 $\nabla^4 F_c = 0$  を満足する。

$$F_c = A(t)x^2 + B(t)y^2$$

ここに、 $A(t), B(t)$ : 面内変位の境界条件を満足するように決定される  $t$  の関数 (Appendix a 参照)。

また、式 (2) の特解は Appendix b に示すように得られる (Appendix b 参照)。

3.3 連立非線形代数方程式の誘導

式(1)に、求められた応力関数及びたわみの仮定を代入して Galerkin 法を適用すると、式(1)は次のような時間に関する運動方程式に変換され、これに減衰力を考慮すると、

$$\ddot{T} + 2h\dot{T} + (1 + 2e_0^2\alpha)T + 3e_0\alpha T^2 + \alpha T^3 = \delta p \cos \omega \tau \tag{8}$$

ここに、 $\alpha, \delta$  : 係数 (Appendix c 参照),

$h$  : 減衰定数,  $\mu = \frac{a}{b}$  : 縦横比,  $p = \frac{p_0 b^4}{Dd}$  : 荷重強度,

$\omega = \frac{\Omega}{\omega_{11}}$  : 無次元加振円振動数,

$\tau = \omega_{11}t$  : 無次元時間.

式(8)の主共振及び1/2分数波共振を求めるために、次のように解を仮定する<sup>1)</sup>.

$$T = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\omega \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\omega \tau}{2} + c_1 \cos \omega \tau + s_1 \sin \omega \tau \tag{9}$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1$  : 付随型の振幅成分,  
 $c_{1/2}, s_{1/2}$  : 分岐型の振幅成分.

式(9)を式(8)に代入して、調和バランス法を適用すれば連立非線形代数方程式が得られる。これに、Newton-Raphson 法を適用して解けば、振幅成分が得られる。

4. 解析結果

4.1 荷重変位曲線の特性

Fig. 2 および 3 は、case 1 および case 2 の正方形板 ( $\mu=1.0, \nu=0.3$ ) の静的荷重—変位曲線をライズ比  $e_0=0.0, -0.5, -1.0, -1.5$  および  $-2.0$  について示している。縦軸は荷重強度  $p$  を、横軸は長方形板中央点の無次元静的応答成分  $c_0$  をとっている。

case 1 ではライズ比  $e_0=0.0$  および  $-0.5$ , case 2 ではライズ比  $e_0=0.0, -0.5$  および  $-1.0$  までは静的応答成分  $c_0$  は、荷重とともに単調に増加するのみであるが、ライズ比が大きくなり case 1 ではライズ比  $e_0=-1.5$ , case 2 ではライズ比  $e_0=-2.0$  になると、釣り合い荷重に極値が発生することが分かる。したがって、ライズ比が  $e_0=-1.5$  (case 1) および  $e_0=-2.0$  (case 2) を越えると、荷重の増加が微小でも変位が急増する、いわゆる飛び移り座屈が発生することが予想される。

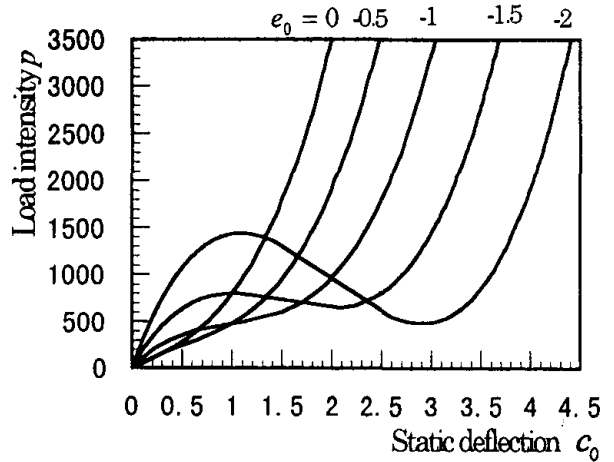


Fig. 2 Static load-deflection curve (case 1,  $\mu=1.0, \nu=0.3$ ).

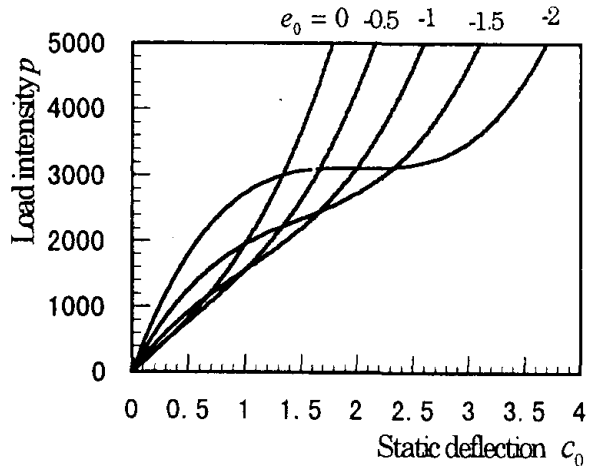


Fig. 3 Static load-deflection curve (case 2,  $\mu=1.0, \nu=0.3$ ).

4.2 Runge-Kutta-Gill 法における数値シミュレーションによる精度の検討

調和バランス法による解析の精度を検討するために、Runge-Kutta-Gill 法による数値シミュレーションを行う。Fig. 4 は、case 1,  $\mu=1.0$  の場合の非線形振動曲線のそれぞれのライズ比  $e_0=0.0, 0.5, 1.0, 1.5$  および  $2.0$  の調和バランス法と数値シミュレーションの解析結果を示した図である。実線は調和バランス法で解析した結果で、数値シミュレーション結果記号を●, □, ○, ▲および■で示している。調和バランス法と数値シミュレーションによる結果はほぼ一致し、解析結果が妥当であることが分かる。

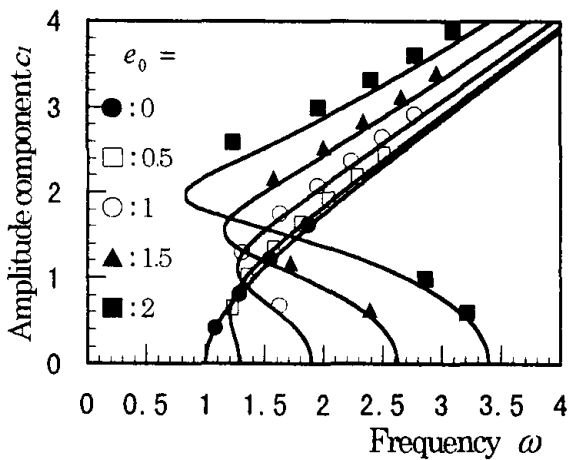


Fig. 4 Accuracy of solution  
(case 1,  $\mu=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

### 4.3 非線形自由振動特性

Fig. 5 は非線形自由振動曲線を, Fig. 6 は無次元振動数  $\omega$  と振動の直流成分 (静的応答成分)  $c_0$  との関係を示す。case 1 の正方形板 ( $\mu=1.0, \nu=0.3$ ) の非線形自由振動数を, ライズ比をパラメータに示したものである。Fig. 7 および 8 は非線形自由振動を case 2 に対して示したものである。減衰定数  $h=0.0$  の非減衰振動を対象としている。Fig. 5 および Fig. 7 の縦軸は板厚で無次元化した無次元振幅  $c_1$  で, 横軸は非線形自由振動数をライズがない長方形板の線形 1 次固有振動数で無次元化した無次元振動数  $\omega = \Omega/\omega_{11}$  である。Fig. 6 および Fig. 8 の縦軸は振動の直流成分  $c_0$  で, 横軸は無次元振動数  $\omega$  である。

Fig. 5 および Fig. 7 から明らかなように平板 ( $e_0=0.0$ ) の場合, 非線形自由振動数  $\omega$  は振幅  $c_1$  の増大とともに単調に増加するのみであるが, ライズ比が板厚程度 ( $e_0=1.0$ ) になるとライズの影響が効いてくる。このときの無次元振動数  $\omega$  は振幅が小さい領域では, 振幅の増加と共に減少する軟化バネの挙動を示している。さらに振幅が増大してライズ比よりも大きくなると, 振幅の変動成分  $c_1$  は無次元振動数  $\omega$  の増加とともに増加する硬化バネの挙動を示す。

Fig. 6 および Fig. 8 に注目すると, 直流成分  $c_0$  は振幅の増加とともにライズ比  $e_0$  を打ち消す方向 (符号がマイナスでライズと逆向き) に作用する。振幅が大きくなるにつれて,  $c_0$  が効いてきて振動中のライズの大きさ  $e_0+c_0 \rightarrow 0.0$  が小さくなって, ライズのない平板の振動に近づく。この時の振動と振動数の関係が, 軟化バネの特性を示す。さらに振幅が大きくなると,  $e_0+c_0 \equiv 0.0$  となり, ライズのある長方形板は, ライズのない平板 ( $e_0=0.0$ ) の振動をする。

以上のように, 非線形自由振動特性はライズの影響を強く受け, 振幅の大きさによって軟化および硬化バネの両特性を持つことが確認できる。また, ライズ比が大きくなるにしたがい, 応答振幅が大きくなることが確認され, 軟化・硬化バネの両特性が強く現れている。境界条件が全周単純支持 (case 1) の場合と比べると全周固定 (case 2) の場合の方がライズの影響は小さく, 軟化・硬化バネの特性は強く現れない。つまり, 運動方程式の非線形項の大きさが小さい。

また, 境界条件が異なる場合でも, ライズの影響を受け, 振幅の大きさにより軟化・硬化バネの両特性を持つ。全周単純支持に比べ全周固定の方が軟化・硬化バネの特性は弱い。

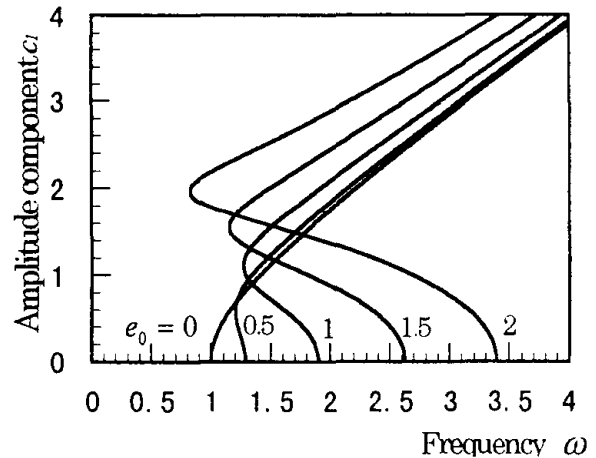


Fig. 5 Nonlinear free vibration curves  
(case 1,  $\mu=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

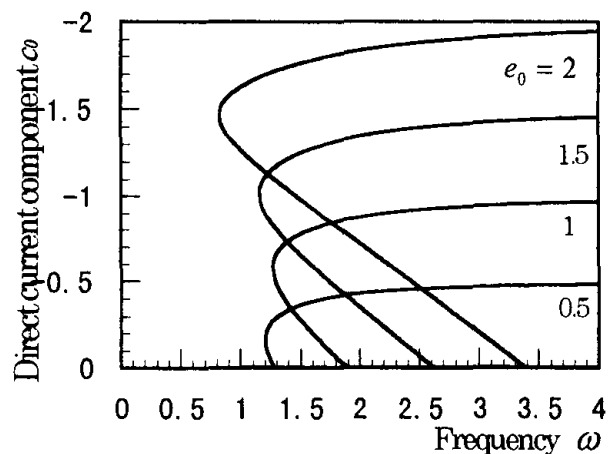


Fig. 6 Nonlinear free vibration curves  
(case 1,  $\mu=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

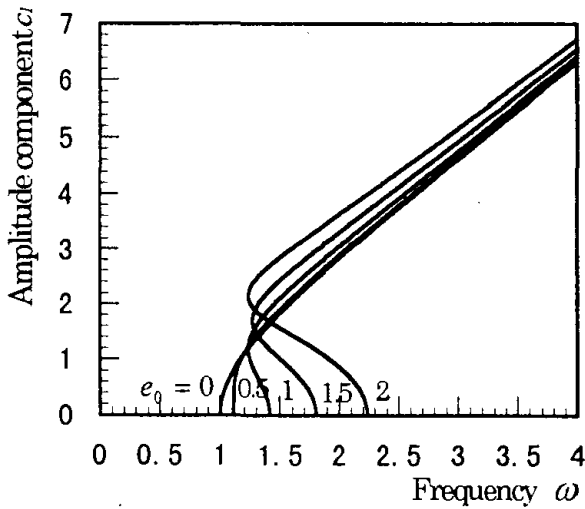


Fig. 7 Nonlinear free vibration curves  
(case 2,  $\mu=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

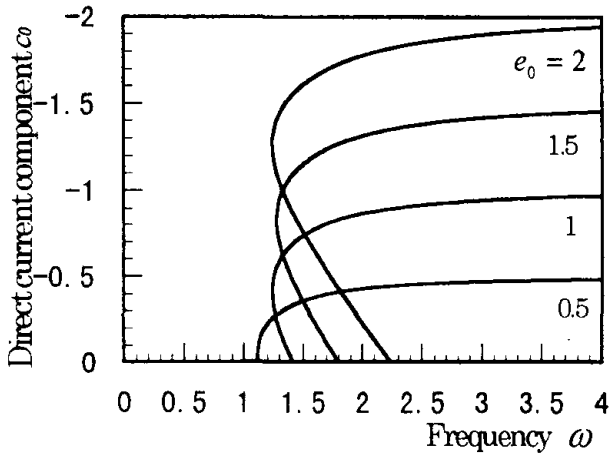


Fig. 8 Nonlinear free vibration curves  
(case 2,  $\mu=1.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

4. 4 非線形自由振動に及ぼす縦横比の影響

Fig. 9 および10は case 1 の縦横比  $\mu=2.0$  および  $3.0$  の非線形自由振動曲線を示している. 同じく Fig.11 および Fig.12は, 境界条件が case 2 の, 縦横比  $\mu=2.0$  および  $3.0$  の非線形自由振動曲線を示している. 縦横比  $\mu=2.0$  および  $3.0$  の場合,  $\mu=1.0$  の正方形板と同様に, Fig. 9, 10, 11 および 12 で, ライズ比  $e_0=0.0$  の場合, 振動数は振幅  $c_1$  の増大とともに単調に増加するのみであるが, ライズ比が板厚程度になるとライズの影響が効いてきて軟化および硬化パネの挙動を示す. 縦横比  $\mu=1.0$  を中心に, 縦横比  $\mu$  が大きくなると, 軟化・硬化パネの特性は強く現れる. ここでは示していないが, 縦横比  $\mu=1/2, 1/3$  の場合はそれぞれ  $\mu=2.0, 3.0$  と同じ結果になる. つまり,  $\mu=1.0$  の正方形板が非線形性が最も小さい.

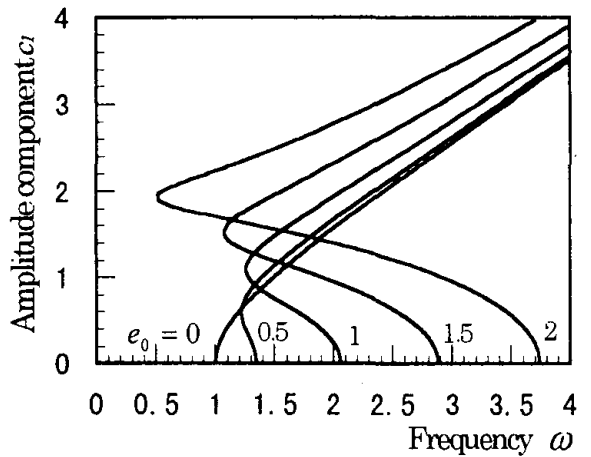


Fig. 9 Nonlinear free vibration curves  
(case 1,  $\mu=2.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

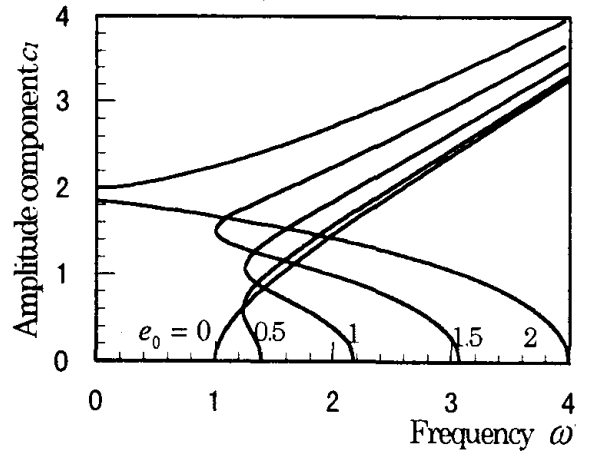


Fig.10 Nonlinear free vibration curves  
(case 1,  $\mu=3.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

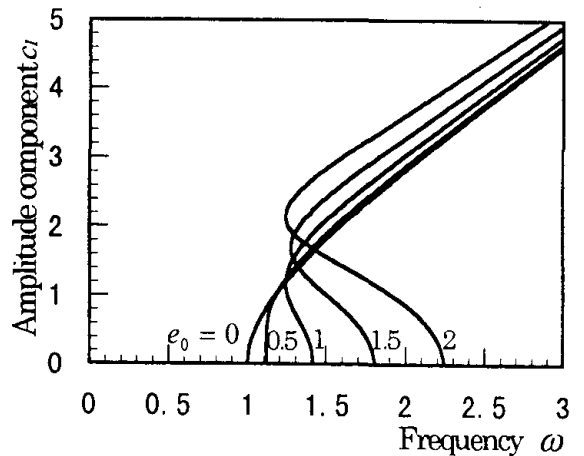


Fig.11 Nonlinear free vibration curves  
(case 2,  $\mu=2.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

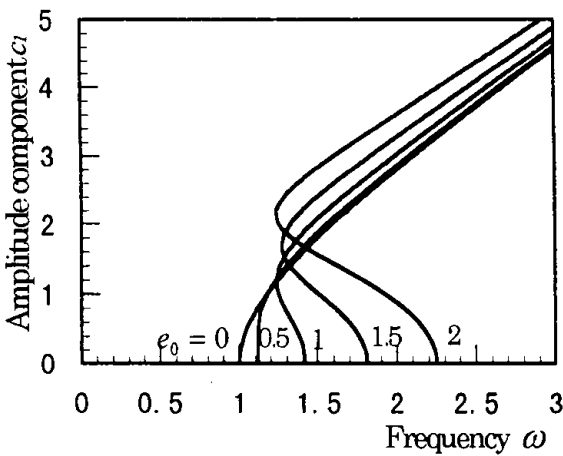


Fig.12 Nonlinear free vibration curves  
(case 2,  $\mu=3.0$ ,  $\nu=0.3$ ).

4. 5 非線形強制振動

本節では、周期的変動荷重を受ける場合のライズを持つ正方形板の加振振動数と振幅の関係（応答曲線）を示す。Fig.13およびFig14は case 1 の正方形板 ( $\mu=1.0$ ) のライズ比  $e_0=0.0$  および  $-1.0$  の場合の応答曲線を示す。同じく、Fig15および Fig16は case 2 の正方形板 ( $\mu=1.0$ ) のライズ比  $e_0=0.0$  と  $-1.0$  の場合の応答曲線を示す。これらの図において、縦軸に振幅成分  $c_1, c_{1/2}, s_{1/2}$  をとり、横軸に無次元加振振動数  $\omega$  をとる。また、減衰定数  $h=0.0$ 、ポアソン比  $\nu=0.3$  とする。

Fig.13では固有円振動数  $\omega=1.0$  付近に、Fig.14では  $\omega=1.8$  付近に、Fig.15では固有円振動数  $\omega=1.0$  付近に、Fig.16では  $\omega=1.42$  付近に主共振  $c_1$  が発生している。また、ライズがある場合に Fig.14 および Fig 16 に示すように固有振動数の 2 倍の 3.6, 2.84 付近に  $1/2$  分数波共振  $c_{1/2}, s_{1/2}$  が発生している。これに対して、ライズがない場合には、2 次の非線形項が存在しないため、Fig.13 および Fig15 は、荷重強度に無関係に  $1/2$  分数波共振  $c_{1/2}$  と  $s_{1/2}$  はほとんど重なって発生する。つまり、応答曲線の幅は狭く、自由振動曲線が得られていると考えられる。従って、強制振動としての解は存在しない。Fig.14 および Fig.16 のライズ比がある場合  $1/2$  分数波共振  $c_{1/2}$  と  $s_{1/2}$  は、別個に離れて発生する。これは、ライズ比が大きくなるに従い運動方程式内の 2 次の非線形項の効果が効いてくることによる。また、主調波応答は Fig.14 および Fig. 16 から明らかなように振幅がライズ比の大きさまでは軟化バネの挙動を示し、振幅がライズ比よりも大きくなると硬化バネの特性を示す。これは前述と同様に、ライズ比が大きくなるにしたがって運動方程式内の 3

次の非線形項の効果が強くなることに依存している。また、境界条件が全周辺単純支持 (case 1) の場合と比べると全周辺固定 (case 2) の場合の方がライズの影響は小さく、軟化・硬化バネの特性はあまり強く現れていない。

以上より、主共振及び  $1/2$  分数波共振の応答の発生領域はライズ比によって異なる。特に  $1/2$  分数波共振の発生領域は、平板 ( $e_0=0.0$ ) に比べ著しく広がる傾向があり、カオスをはじめ各種の不安定現象が発生することが予想される。

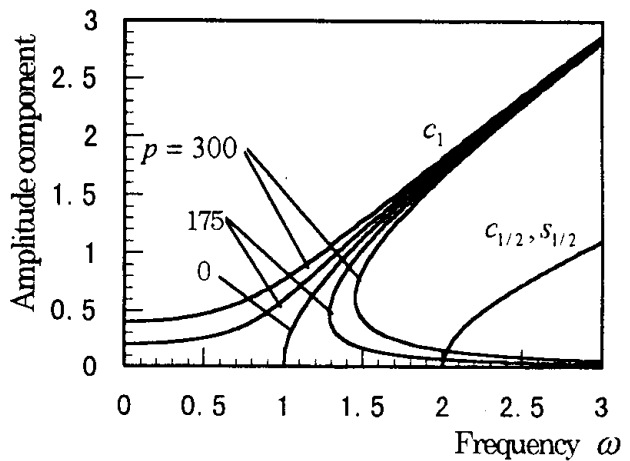


Fig.13 Amplitude response curves  
(case 1,  $\mu=1.0$ ,  $e_0=0.0$ ,  $h=0.0$ ).

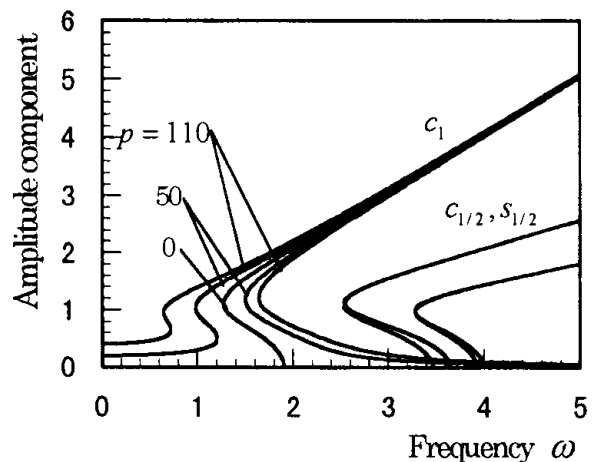


Fig.14 Amplitude response curves  
(case 1,  $\mu=1.0$ ,  $e_0=-1.0$ ,  $h=0.0$ ).

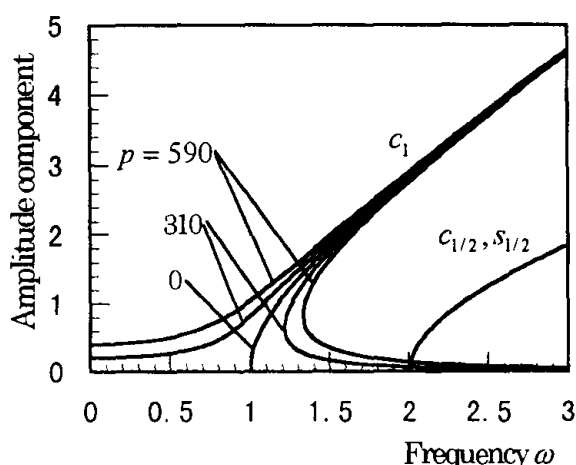


Fig.15 Amplitude response curves  
(case 2,  $\mu=1.0, e_0=0.0, h=0.0$ ).

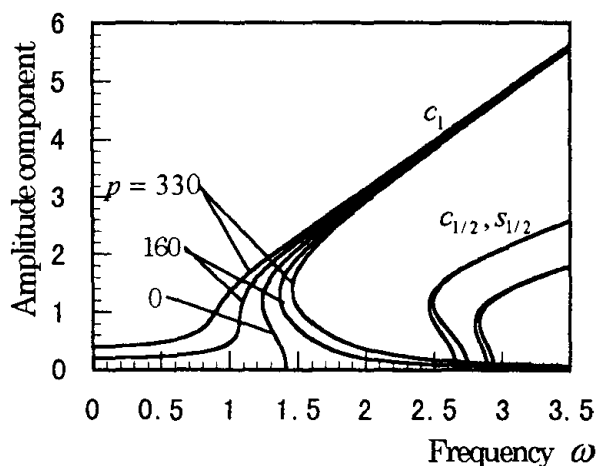


Fig.16 Amplitude response curves  
(case 2,  $\mu=1.0, e_0=-1.0, h=0.0$ ).

5. まとめ

本研究では、ライズを持つ長方形板の非線形振動特性について調和バランス法による解析を行った。非線形振動の挙動に及ぼすライズ比、縦横比、荷重強度の影響および境界条件の影響を明らかにした。

得られた結果を要約すると次のようである。

- (1) 解析解と Runge-Kutta-Gill 法によるシミュレーションの結果はほぼ一致し、これによってライズを持つ長方形板の非線形振動特性の解析を行えることを示した。
- (2) 境界条件が全周辺単純支持の場合ライズ比-1.5、全周辺固定の場合ライズ比-2.0になると、釣り合い荷重に極値が発生し、飛び移り座屈が発生することが示された。

- (3) 非線形自由振動の振動特性はライズ比によって、軟化・硬化バネの両特性を持つため、ライズ比は応答特性に大きな影響を及ぼしてくる。
- (4) ライズ比が大きくなるにしたがい、応答振幅が大きくなり、軟化・硬化バネの両特性が強く現れている。
- (5) 曲げに対する境界条件に無関係に、非線形振動特性はライズの影響を受け、振幅の大きさにより軟化・硬化バネの両特性を持つ。また、境界条件が全周辺単純支持に比べ全周辺固定の場合、軟化・硬化バネの特性は弱い。
- (6) 縦横比が大きくまた小さくなるにつれてライズ比の影響が大きくなり、軟化・硬化バネの特性は強く現れる。
- (7) 曲げに対する境界条件に無関係に、非線形強制振動の応答はライズの影響を受け、軟化・硬化バネの両特性を持った応答が現れる。また、境界条件が全周辺単純支持に比べ全周辺固定の場合がライズの影響は小さい。
- (8)  $1/2$  分数波共振の応答の発生領域はライズによって異なり、またライズのある場合の発生領域は、平板に比べ著しく広がる傾向があり、カオスをはじめ各種の不安定現象が発生することが予想される。

なお、解析にあつては長崎大学情報処理センターの FACOM M-180 AD/2 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 高橋和雄・太田晶一：偏平アーチの非線形振動に及ぼす初期形状及び境界条件の影響，構造工学論文集，Vol.42A, pp.55-61, 1996. 3.
- 2) 高橋和雄・花田博史・C.R.Herath・太田晶一：構造部材の非線形振動及び係数励振振動，非線形振動研究会概要集，pp.C11-C25, 1994. 8.
- 3) 土木学会：座屈設計ガイドライン，鋼構造シリーズ2，pp.161-189, 1987.
- 4) 青木統夫：力学系・カオス，非線形現象の幾何学的構成，共立出版，pp.1-57, 1996.
- 5) 関谷壮・斎藤渥：薄板構造力学，共立出版，pp.161-237, 1968.

## Appendix a

case 1

$$A(t) = \frac{E\pi^2 d^2}{16(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$B(t) = \frac{E\pi^2 d^2}{16(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

case 2

$$A(t) = \frac{3E\pi^2 d^2}{64(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$B(t) = \frac{3E\pi^2 d^2}{64(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

## Appendix b

case 1

$$F_p = \frac{Ed^2}{32} \left\{ T(t)^2 + 2e_0 T(t) \right\} \\ \left( \frac{a^2}{b^2} \cos \frac{2\pi}{a} x + \frac{b^2}{a^2} \cos \frac{2\pi}{b} y \right)$$

case 2

$$F_p = A \cos \frac{2\pi}{a} x + B \cos \frac{2\pi}{b} y + C \cos \frac{4\pi}{a} x \\ + D \cos \frac{4\pi}{b} y + E \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y \\ + F \cos \frac{2\pi}{a} x \cos \frac{4\pi}{b} y + G \cos \frac{4\pi}{a} x \cos \frac{2\pi}{b} y$$

$$A = \frac{Ea^2 d^2}{32b^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$B = \frac{Eb^2 d^2}{32a^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$C = -\frac{Ea^2 d^2}{512b^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$D = -\frac{Eb^2 d^2}{512a^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$E' = -\frac{Ea^2 b^2 d^2}{16(a^2 + b^2)^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$F = \frac{Ea^2 b^2 d^2}{32(4a^2 + b^2)^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

$$G = \frac{Ea^2 b^2 d^2}{32(a^2 + 4b^2)^2} \{T(t)^2 + 2e_0 T(t)\}$$

## Appendix c

case 1

$$\alpha = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3(1-\nu^2)}{2 \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right)^2} \left( 1 + \frac{1}{\mu^4} \right) \right. \\ \left. + \frac{3}{\mu^2 \left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right)^2} \left( \mu^2 + \frac{1}{\mu^2} + 2\nu \right) \right\}$$

$$\delta = \frac{16}{\pi^6} \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{\mu^2} \right)^2}$$

case 2

$$\alpha = \frac{27}{16 \left( \frac{3}{\mu^4} + \frac{2}{\mu^2} + 3 \right)} \left[ \frac{35-17\nu^2}{36} \left( 1 + \frac{1}{\mu^4} \right) \right. \\ \left. + \frac{\nu}{\mu^2} + \frac{2}{9} (1-\nu^2) \left\{ \frac{4}{(1+\mu^2)^2} + \frac{1}{(1+4\mu^2)^2} \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{(4+\mu^2)^2} \right\} \right]$$

$$\delta = \frac{1}{\pi^4} \frac{1}{\left( \frac{3}{\mu^4} + \frac{2}{\mu^2} + 3 \right)}$$

## 8. 周期的変動軸力を受ける偏平ケーブルの分岐応答に 及ぼす高次モードの影響

高橋和雄\*・花田博史\*\*

### Influence of the Higher Mode of Vibration on Nonlinear Vibrations of the Small Sag Cable Subjected to an Axial Time-varying Load

by

Kazuo TAKAHASHI\* and Hiroshi HANADA\*\*

Nonlinear dynamic response of a suspended small sag cable driven by harmonic axial load is presented. The basic equation of motion is solved by a Galerkin method for space co-ordinate and the harmonic balance method for time co-ordinate. The multi-degree-of-freedom approach is employed. The influences of the second symmetric mode and the first anti-symmetric mode on the first symmetric mode are discussed.

#### 1. まえがき

斜張橋の主桁あるいは主塔が風荷重や走行荷重などによって振動すると支持ケーブルに振幅の大きな局部振動が発生する可能性があることが指摘されている。これらの原因として係数励振振動が考えられる。この問題に関して、著者らは支点が拘束された単一ケーブルをモデルに周期的変動軸力と面内変動荷重が同時に作用する場合のケーブルの非線形応答として解析を行い、その応答特性を明らかにしている<sup>1)</sup>。文献1)では、ケーブルの対称1次振動のみを考え、対称1次固有振動数近傍とその2倍で現れる1/2分数調波共振の応答に着目した解析を行い、変動軸力の影響によって1/2分数調波共振の応答振幅が増大することが明らかになった。しかし、ケーブルは連続体であることを考えると、対称1次振動の1/2分数調波共振の応答と高次振動の応答が同一の振動数領域で発生する可能性があり、分岐応答に及ぼす高次振動モードの影響を評価しておく必要がある。

そこで本研究では、変動軸力を受ける偏平ケーブル

の分岐応答に及ぼす高次モードの影響を明らかにする。ここで、高次モードとして対称2次および逆対称1次振動を対象とする。まず、文献1)と同様に支点が拘束された単一ケーブルの非線形運動方程式を誘導する。次いで、運動方程式を2自由度系で近似し Galerkin 法を適用して離散化を行い、連立常微分方程式に変換する。得られた各自由度における常微分方程式の周期解をフーリエ級数を使って仮定し、調和バランス法を適用して連立非線形代数方程式に変換する。この方程式を解いて振幅成分を求めることによって解析を行う。

#### 2. 運動方程式

Fig. 1 に示す偏平ケーブル (サグ比  $\gamma=f/l < 1/8$ ) が周期的変動軸力と面内変動荷重を受ける場合の非線形運動方程式は次式で与えられる<sup>1)</sup>。

$$L(w) = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{8f}{l^2} H_a \\ - (H_e + H_l \cos \Omega t + H_a) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p \cos(\Omega t + \phi) = 0 \quad (1)$$

平成9年10月28日受理

\*社会開発工学科 (Department of Civil Engineering)

\*\*前田建設工業(株) (Maeda Corporation)



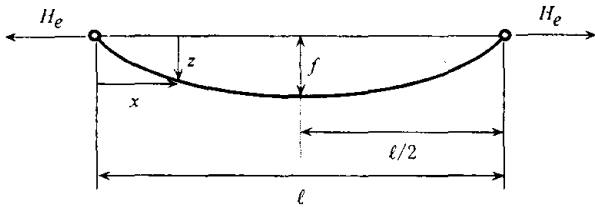


Fig. 1 Geometry of the cable

ここに,  $H_a = \frac{EA}{L_e} \left\{ \frac{8f}{l^2} \int_0^l w dx + \int_0^l \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\}$ : たわみによる付加水平張力,  $m$ : ケーブルの質量,  $f$ : ケーブルのサグ,  $l$ : スパン長,  $H_e$ : 初期水平張力,  $H_i$ : 係数励振力の振幅,  $p$ : 荷重強度,  $w$ : たわみ,  $x$ : 支点からの水平距離,  $t$ : 時間,  $\Omega$ : 周期的変動軸力と面内変動荷重の円振動数,  $E$ : ヤング率,  $A$ : 断面積,  $L_e = l(1 + 8f^2/l^2)$ : 放物線ケーブルの長さ,  $\phi$ : 位相角.

### 3. 解法

#### (1) 常微分方程式への変換

対称1次振動の分岐応答に及ぼす高次モード(対称2次振動もしくは逆対称1次振動)の影響を明らかにするために, 式(1)の解を2自由度系モデルで次の変数分離形に仮定する.

$$w = l \{ T_1(t) W_1(x) + T_2(t) W_2(x) \} \quad (2)$$

ここに,  $T_1, T_2$ : 対称1次および対称2次(もしくは逆対称1次)振動の時間関数,  $W_1, W_2$ : 座標関数で線形振動の対称1次および対称2次(もしくは逆対称1次)振動の固有振動形.

上式の座標関数  $W_1, W_2$  として, 対称振動の場合は基準化した線形自由振動の面内対称モードを用いる.

$$W_i(\xi) = \left( 1 - \tan \frac{\pi \omega_i}{2} \sin \pi \omega_i \xi - \cos \pi \omega_i \xi \right) / W_{i, \max} \quad (3)$$

ここに,  $\xi = x/l$ ,  $\omega_i = n_i/\pi n_0$ : 第  $i$  次の無次元固有円振動数,  $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m l^2}$ : 弦の1次の固有円振動数,  $n_i$ : ケーブルの第  $i$  次の固有円振動数,  $W_i(\xi)_{\max}$ : 第  $i$  次対称振動の最大振幅.

また, 逆対称1次振動の座標関数  $W_2$  として, スパン  $l$  の1/4点の振幅で基準化した線形自由振動の面内逆対称モードを用いる.

$$W_2(\xi) = \sin 2\pi \xi / W_2(0.25) \quad (4)$$

ここに,  $W_2(0.25)$ : 第1次逆対称振動のスパン  $l$  の1/4点の振幅.

式(2)を式(1)に代入し Galerkin 法を適用し線形減衰力を考慮すると, 次式の常微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 + 2h_1 \omega_1 \dot{T}_1 + (\omega_1^2 + a_1 \bar{H}_i \cos \bar{\omega} \tau) T_1 + b_1 \bar{H}_i \cos \bar{\omega} \tau \\ T_2 + c_1 T_1^2 + d_1 T_1 T_2 + e_1 T_2^2 + f_1 T_1^3 + g_1 T_1^2 T_2 \\ + i_1 T_1 T_2^2 + j_1 T_2^3 = k_1 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \phi) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{T}_2 + 2h_2 \omega_2 \dot{T}_2 + a_2 \bar{H}_i \cos \bar{\omega} \tau T_1 \\ + (\omega_2^2 + b_2 \bar{H}_i \cos \bar{\omega} \tau) T_2 + c_2 T_1^2 + d_2 T_1 T_2 \\ + e_2 T_2^2 + f_2 T_1^3 + g_2 T_1^2 T_2 + i_2 T_1 T_1^2 \\ + j_2 T_2^3 = k_2 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega} \tau + \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,  $\omega_1, \omega_2$ : 対称1次および対称2次(もしくは逆対称1次)振動の無次元固有円振動数,  $h_1, h_2$ : 対称1次および対称2次(もしくは逆対称1次)振動の減衰定数,  $\bar{H}_i = H_i/H_e$ : 無次元変動軸力の振幅,  $\bar{\omega} = \Omega/n_0$ : 無次元加振円振動数,  $\bar{p}_0 = p/H_e$ : 荷重強度,  $\tau = n_0 t$ : 無次元時間,  $n_0 = \sqrt{H_e \pi^2 / m l^2}$ : 弦の第1次の固有円振動数,  $a_1 \sim g_1, i_1 \sim k_1, a_2 \sim g_2, i_2 \sim k_2$ : ケーブルのサグ比  $\gamma$ , 縦波-横波伝播速度比  $k = \sqrt{EA/H_e}$  および  $W_1, W_2$  より定まる係数.

#### (2) 対称1次および対称2次振動の解析

この場合, 対称1次固有円振動数の2倍付近で発生する1/2分数調波共振と対称2次振動の主共振が同じ振動数領域で発生する可能性がある. そこで対称1次振動の分岐応答に及ぼす対称2次振動の影響を解析するため, 式(5)および(6)の周期解を次式で仮定する.

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{c_{10}}{2} + c_{1/2} \cos \frac{\bar{\omega} \tau}{2} + s_{1/2} \sin \frac{\bar{\omega} \tau}{2} \\ + c_{11} \cos \bar{\omega} \tau + s_{11} \sin \bar{\omega} \tau \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_2 = \frac{c_{20}}{2} + c_{21} \cos \bar{\omega} \tau + s_{21} \sin \bar{\omega} \tau \quad (8)$$

ここに,  $c_{10}, c_{11}, s_{11}$ : 対称1次振動の付随調波成分,  $c_{1/2}, s_{1/2}$ : 対称1次振動の固有円振動数の2倍付近に生ずる分岐調波成分,  $c_{20}, c_{21}, s_{21}$ : 対称2次振動の付随調波成分.

式(7)および(8)を式(5)および(6)にそれぞれ代入して調和バランス法を適用すれば, 未定定数を求めるための8個の非線形連立代数方程式が得られる. これらの方程式に Newton-Raphson 法を用い, 初期値のもとにとけば各振幅成分が得られる.

また, 式(7)および(8)はそれぞれ次式のように書ける.

$$T_1 = \frac{c_{10}}{2} + A_{1/2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \varphi_{1/2}\right) + A_{11} \cos(\bar{\omega}\tau - \varphi_{11}) \quad (9)$$

$$T_2 = \frac{c_{20}}{2} + A_{21} \cos(\bar{\omega}\tau - \varphi_{21}) \quad (10)$$

$A_{11} = \sqrt{c_{11}^2 + s_{11}^2}$ : 対称 1 次振動の付随応答成分,

$A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$ : 対称 1 次振動の分岐応答成分,

$A_{21} = \sqrt{c_{21}^2 + s_{21}^2}$ : 対称 2 次振動の付随応答成分,

$\varphi_{11} = \tan^{-1}(s_{11}/c_{11})$ ,  $\varphi_{1/2} = \tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$ ,

$\varphi_{21} = \tan^{-1}(s_{21}/c_{21})$ ,  $\varphi_{1/2}$ ,  $\varphi_{11}$  および  $\varphi_{21}$ : 位相差

### (3) 対称 1 次および逆対称 1 次振動の解析

逆対称 1 次固有円振動数の 2 倍付近で生ずる周期の主不安定領域および逆対称 1 次固有円振動数付近で生ずる周期の副不安定領域を対象とし、1 次振動の分岐応答に及ぼす影響を解析するため、式(5)および(6)の周期解を次式で仮定する。

$$T_1 = \frac{c_0}{2} + c_{1/2} \cos\frac{\bar{\omega}\tau}{2} + s_{1/2} \sin\frac{\bar{\omega}\tau}{2} + c_1 \cos\bar{\omega}\tau + s_1 \sin\bar{\omega}\tau \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{\bar{c}_0}{2} + \bar{c}_{1/2} \cos\frac{\bar{\omega}\tau}{2} + \bar{s}_{1/2} \sin\frac{\bar{\omega}\tau}{2} + \bar{c}_1 \cos\bar{\omega}\tau + \bar{s}_1 \sin\bar{\omega}\tau \quad (12)$$

ここに、 $c_0, c_1, s_1$ : 対称 1 次振動の付随調波成分,  $c_{1/2}, s_{1/2}$ : 対称 1 次振動の固有円振動数の 2 倍付近に生ずる分岐調波成分,  $\bar{c}_0, \bar{c}_1, \bar{s}_1$ : 逆対称 1 次固有円振動数付近に生ずる分岐調波成分,  $\bar{c}_{1/2}, \bar{s}_{1/2}$ : 逆対称 1 次固有円振動数の 2 倍付近に生ずる分岐調波成分。

式(11)および(12)を式(5)および(6)にそれぞれ代入して調和バランス法を適用すれば前述と同様に解析解が得られる。

また、式(11)および(12)はそれぞれ次式のように書ける。

$$T_1 = \frac{c_0}{2} + A_{1/2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \varphi_{1/2}\right) + A_1 \cos(\bar{\omega}\tau - \varphi_1) \quad (13)$$

$$T_2 = \frac{\bar{c}_0}{2} + \bar{A}_{1/2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}\tau}{2} - \bar{\varphi}_{1/2}\right) + \bar{A}_1 \cos(\bar{\omega}\tau - \bar{\varphi}_1) \quad (14)$$

$A_{1/2} = \sqrt{c_{1/2}^2 + s_{1/2}^2}$ : 対称 1 次振動の分岐応答成分,

$A_1 = \sqrt{c_1^2 + s_1^2}$ : 対称 1 次振動の付随応答成分,

$\bar{A}_1 = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{s}_1^2}$ ,  $\bar{A}_{1/2} = \sqrt{\bar{c}_{1/2}^2 + \bar{s}_{1/2}^2}$ : 逆対称 1 次振動の分岐応答成分,

$\varphi_1 = \tan^{-1}(s_1/c_1)$ ,  $\varphi_{1/2} = \tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$ ,

$\bar{\varphi}_1 = \tan^{-1}(\bar{s}_1/\bar{c}_1)$ ,  $\bar{\varphi}_{1/2} = \tan^{-1}(\bar{s}_{1/2}/\bar{c}_{1/2})$ ,

$\varphi_{1/2}$ ,  $\varphi_1$  および  $\bar{\varphi}_{1/2}$ ,  $\bar{\varphi}_1$ : 位相差

### (4) Runge-Kutta-Gill 法による数値解法

式(5)および(6)において  $T_1 = P_1$ ,  $\dot{T}_1 = P_2$  および  $T_2 = P_3$ ,  $\dot{T}_2 = P_4$  とおくと、次の 4 元連立の 1 階常微分方程式となる。

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= P_2 \\ \dot{P}_2 &= -2h_1\omega_1 P_2 - \omega_1^2 P_1 - a_1 \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau P_1 \\ &\quad - b_1 \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau P_3 - c_1 P_1^2 - d_1 P_1 P_3 \\ &\quad - e_1 P_3^2 - f_1 P_1^3 - g_1 P_1^2 P_3 - i_1 P_1 P_3^2 \\ &\quad - j_1 P_3^3 + k_1 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega}\tau + \phi) \\ \dot{P}_3 &= P_4 \\ \dot{P}_4 &= -2h_2\omega_2 P_4 - \omega_2^2 P_3 - a_2 \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau P_1 \\ &\quad - b_2 \bar{H}_t \cos \bar{\omega}\tau P_3 - c_2 P_1^2 - d_2 P_1 P_3 \\ &\quad - e_2 P_3^2 - f_2 P_1^3 - g_2 P_1^2 P_3 - i_2 P_1 P_3^2 \\ &\quad - j_2 P_3^3 + k_2 \bar{p}_0 \cos(\bar{\omega}\tau + \phi) \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)に Runge-Kutta-Gill 法を適用して、直接数値積分すれば時間応答が求められる。

## 4. 解析結果

### (1) 対称 2 次および逆対称 1 次振動の固有振動特性

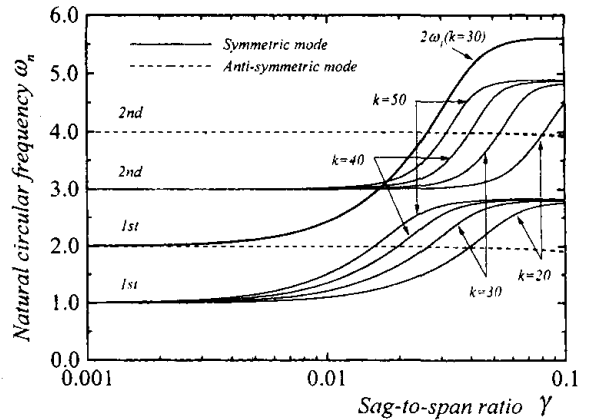


Fig. 2 Relation between sag-to-span ratio  $\gamma$  and natural circular frequency  $\omega_n$ .

Fig. 2 は、サグ比  $\gamma$  と対称 1 次、対称 2 次および逆対称 1 次の無次元固有円振動数  $\omega_n$  の関係を、縦波—横波伝播速度比  $k$  をパラメータに示したものである。実線は対称モードを破線は逆対称モードをそれぞれ表す。Fig. 2 より各対称モードは、ある特定のサグ比において一段高次の対称モードに遷移する。遷移領域は高次モードになるほど、または縦波—横波伝播速度比  $k$  が小さくなるほどサグ比の大きいところで発生する。各逆対称モードは、サグ比および縦波—横波伝播

速度比に関わらず一定の値となり、他のモードへの遷移は起こらない。

本解析では、縦波-横波伝播速度比  $k=30$  のケーブルを取り扱い、対称1次振動の固有円振動数の2倍(太線)付近で発生する分岐応答に及ぼす高次モードの影響を検討する。対称2次振動の場合は、サグ比  $\gamma=0.02$  付近のサグ比で主共振が、逆対称1次振動では  $\gamma=0.026$  付近のサグ比で主不安定領域が対称1次振動の分岐応答と同一の振動数領域で発生する可能性がある。また、逆対称1次振動の副不安定領域についてはサグ比が小さいときに同一の振動数領域で発生する可能性があるが、ここでは対称2次振動に関してはサグ比  $\gamma=0.01, 0.02$  および  $0.03$  の偏平ケーブルを、逆対称1次振動に関しては  $\gamma=0.02$  の偏平ケーブルを対象として解析を行う。

## (2) 対称2次振動の影響

### (a) 対称2次振動の応答特性

Fig. 3, 4, 5は、サグ比  $\gamma=0.01, 0.02$  および  $0.03$  の偏平ケーブル(縦波-横波伝播速度比  $k=30$ , 減衰定数  $h_1, h_2=0.005$ ) で、連成項を無視した場合の対称1次振動  $A_{11}, A_{1/2(1)}$  および対称2次振動  $A_{21}, A_{1/2(2)}$  の応答曲線を示す。ここで、無次元変動軸力の振幅  $\bar{H}_t=0.1$ , 荷重強度  $\bar{p}_0=0.1$  としている。また、横軸は無次元加振円振動数、縦軸は無次元応答振幅を示す。サグ比  $\gamma$  に関わらず、対称2次振動の主調波応答  $A_{21}$  はあらゆる振動数領域に生じ2次固有円振動数  $\omega_2$  で共振する。また、1/2分数調波共振の応答  $A_{1/2(2)}$  はその2倍 ( $2\omega_2$ ) に分岐応答として発生する。しかし、対称1次振動に比べると主調波および1/2分数調波共振のどちらの応答振幅も小さい。また、対称1次振動ではサグ比  $\gamma=0.02$  および  $0.03$  で振幅の小さい領域において軟化バネ特性が現れるが対称2次振動ではサグ比に関わらず硬化バネ特性を示す。また、サグ比  $\gamma=0.02$  の場合に対称2次振動の主共振は対称1次固有円振動数の2倍付近から発生している。また、サグ比  $\gamma=0.01$  はそれよりも高い振動数から、 $\gamma=0.03$  は低い振動数からそれぞれ発生する。連成項を考慮すると、サグ比  $\gamma=0.01, 0.03$  の場合において対称2次振動は分岐応答に影響をおよぼす可能性がある。

### (b) サグ比の影響

Fig. 6, 7, 8は、サグ比  $\gamma=0.01, 0.02$  および  $0.03$  の偏平ケーブル(縦波-横波伝播速度比  $k=30$ , 減衰定数  $h_1, h_2=0.005$ ) で、連成項を考慮した場合の対称1次および対称2次振動の応答曲線を示す。また、

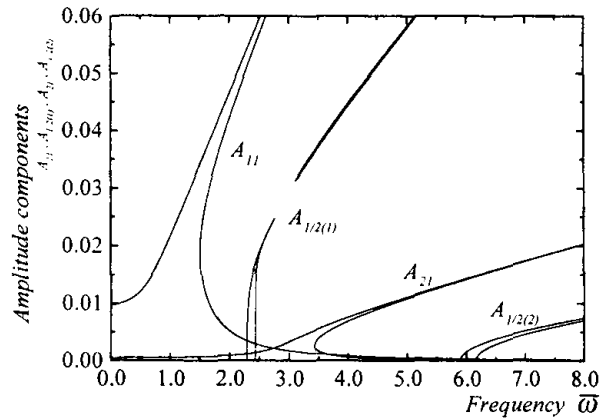


Fig. 3 Frequency response curves of the 1st symmetric mode and the 2nd symmetric mode : uncoupled case ;  $\gamma=0.01, k=30, \omega_1=1.21, \omega_2=3.01, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_t=0.1, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

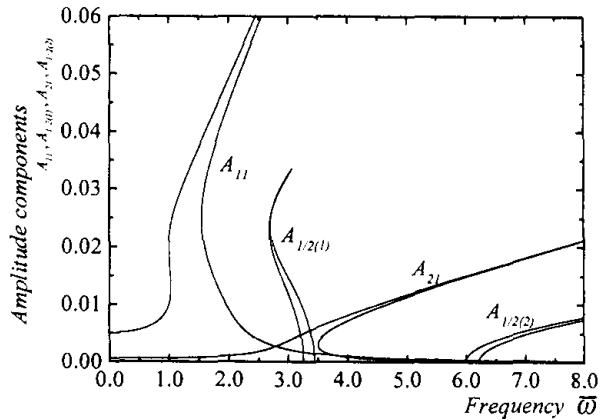


Fig. 4 Frequency response curves of the 1st symmetric mode and the 2nd symmetric mode : uncoupled case ;  $\gamma=0.02, k=30, \omega_1=1.68, \omega_2=3.04, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_t=0.1, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

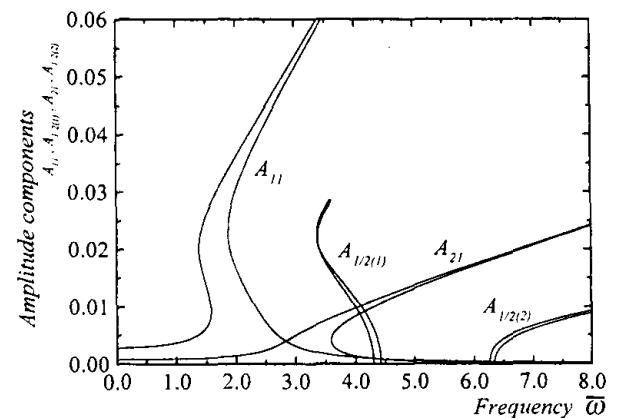


Fig. 5 Frequency response curves of the 1st symmetric mode and the 2nd symmetric mode : uncoupled case ;  $\gamma=0.03, k=30, \omega_1=2.18, \omega_2=3.14, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_t=0.1, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

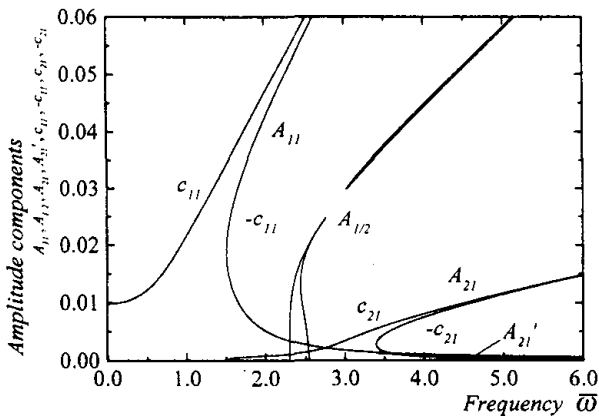


Fig. 6 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.01, k = 30, \omega_1 = 1.21, \omega_2 = 3.01, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.1, \bar{p}_0 = 0.1$  and  $\phi = 0$ .

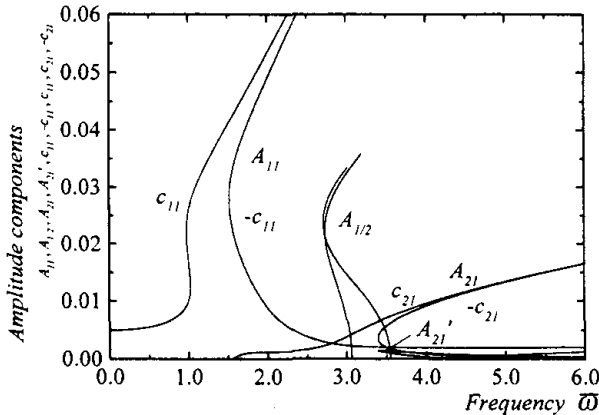


Fig. 7 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k = 30, \omega_1 = 1.68, \omega_2 = 3.04, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.1, \bar{p}_0 = 0.1$  and  $\phi = 0$ .

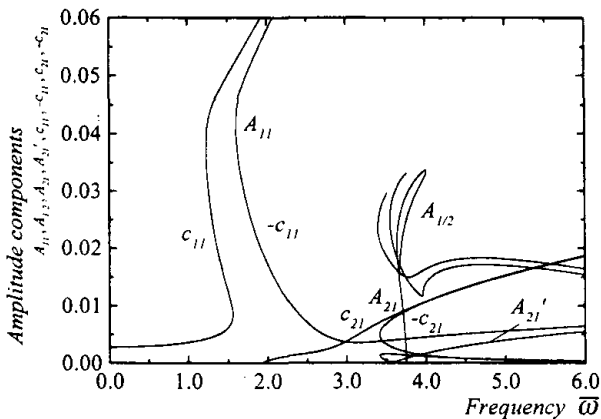


Fig. 8 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.03, k = 30, \omega_1 = 2.18, \omega_2 = 3.04, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.1, \bar{p}_0 = 0.1$  and  $\phi = 0$ .

無次元変動軸力の振幅  $\bar{H}_t = 0.1$  および荷重強度  $\bar{p}_0 = 0.1$  としている。対称 2 次振動の応答  $A_{21}$  は、対称 1 次振動とともに現れる。強制外力と同位相の応答  $c_{21}$  は 1 次振動の外力と逆位相の応答  $-c_{11}$  と同時に発生し、主共振近傍では  $-c_{11}$  の応答振幅が  $-c_{21}$  の応答振幅よりも大きい。加振振動数が対称 2 次固有円振動数  $\omega_2$  に接近するにつれて両者が逆転する。また、対称 2 次振動の逆位相の応答  $-c_{21}$  が発生する場合の対称 1 次振動の応答を  $A'_{21}$  で示している。 $A'_{21}$  は振幅の小さい領域で発生する。対称 1 次振動の分岐応答については、連成項を無視した場合 (Fig. 3, 4 および 5) と比較する。サグ比  $\gamma = 0.01$  の場合は全く対称 2 次振動の影響を受けない。サグ比  $\gamma = 0.02$  の場合もほとんど影響はないが振幅の大きなところで応答が交差するようになる。また、サグ比  $\gamma = 0.03$  の場合において連成項を考慮することにより、対称 1 次振動の主調波応答も 1/2 分数調波共振の応答も複雑な応答曲線を示し、高次振動の影響を受ける。サグ比  $\gamma = 0.03$  は、対称 1 次モードの遷移領域に対応し、対称 2 次固有円振動数と接近する。そのために、2 次振動の主共振が 1 次固有円振動数の 2 倍よりも左側から発生し、主共振の比較的振幅が高いところで分岐応答と重なるために影響を受けると考えられる。

(c) 変動軸力の振幅の影響

Fig. 9 および 10 は、サグ比  $\gamma = 0.02$ 、縦波-横波伝播速度比  $k = 30$ 、減衰定数  $h_1, h_2 = 0.005$  の偏平ケーブルで、無次元変動軸力の振幅  $\bar{H}_t$  を変化した場合の対称 1 次振動および対称 2 次振動の応答曲線を示す。また、荷重強度は  $\bar{p}_0 = 0.1$  (位相角  $\phi = 0$ ) としている。それぞれ Fig. 9 は  $\bar{H}_t = 0.3$ 、Fig. 10 は  $\bar{H}_t = 0.6$  の場合を表す。周期的変動軸力が大きくなると対称 1 次振動の主調波応答の幅が広がる。1/2 分数調波共振の応答では、振幅の大きな領域で分岐応答が発生し、この応答の幅が広がることを確認できる。この特徴は、1 自由度系の場合と同様な結果となるが、振幅の大きな領域で発生する分岐応答の数が 1 自由度の場合より増える。これは、対称 2 次振動の作用のもとに発生した分岐応答と言える。また、対称 2 次振動の応答に  $A_{21}$  については、変動軸力が大きくなっても振幅および発生領域の幅にほとんど変化は見られない。

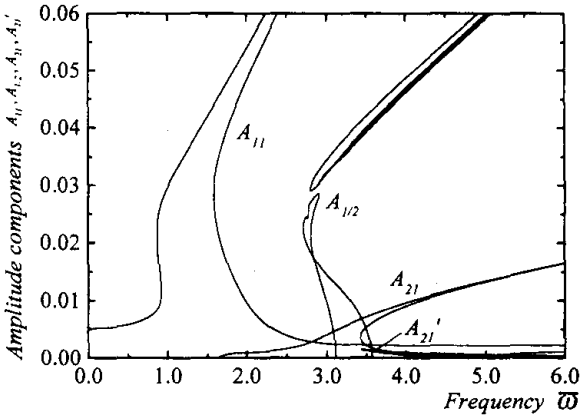


Fig. 9 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k = 30, \omega_1 = 1.68, \omega_2 = 3.04, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.3, \bar{p}_0 = 0.1$  and  $\phi = 0$ .

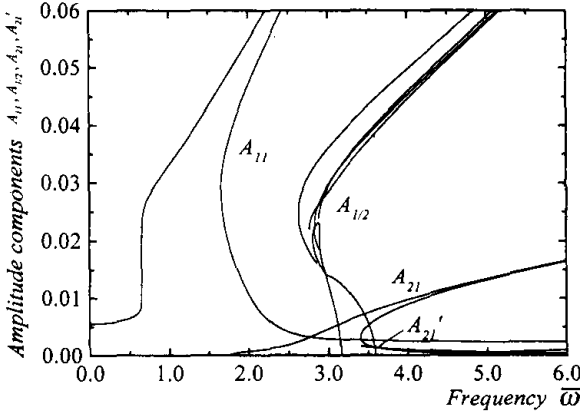


Fig. 10 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k = 30, \omega_1 = 1.68, \omega_2 = 3.04, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.6, \bar{p}_0 = 0.1$  and  $\phi = 0$ .

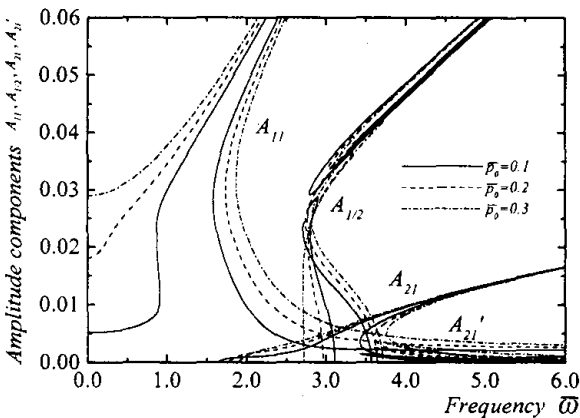


Fig. 11 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k = 30, \omega_1 = 1.68, \omega_2 = 3.04, h_1, h_2 = 0.005, \bar{H}_t = 0.6$ , and  $\phi = 0$ .

(d) 荷重強度の影響

Fig.11は、サグ比  $\gamma = 0.02$ 、縦波-横波伝播速度比  $k = 30$ 、減衰定数  $h_1, h_2 = 0.005$  の偏平ケーブルで、荷重強度  $\bar{p}_0$  を変化させた場合の対称1次および対称2次振動の応答曲線を示す。ここで無次元変動軸力の振幅は  $\bar{H}_t = 0.3$  としている。また、実線は荷重強度  $\bar{p}_0 = 0.1$ 、破線は  $\bar{p}_0 = 0.2$  および一点破線は  $\bar{p}_0 = 0.3$  の場合を表す。荷重強度の影響は対称1次振動の主調波および1/2分数調波共振の応答で顕著に現れる。荷重強度を大きくすると主調波の応答振幅は大きくなり、振幅の小さい領域で発生する1/2分数調波共振の発生領域は広くなることが確認できる。また、対称2次振動の応答に関しては、わずかに振幅が大きくなるだけでほとんど影響は見られない。

(e) 減衰力の影響

Fig.12および13は、サグ比  $\gamma = 0.02$ 、縦波-横波伝播速度比  $k = 30$  の偏平ケーブルで、周期的変動軸力の振幅  $\bar{H}_t = 0.3$ 、荷重強度  $\bar{p}_0 = 0.1$  (位相角  $\phi = 0$ ) とした場合の対称1次および対称2次振動の応答曲線を示す。また、Fig.12は対称1次および2次振動の減衰定数を  $h_1, h_2 = 0.005$  とし、Fig.13は  $h_1, h_2 = 0.01$  として減衰力の影響を評価する。また、Fig.12にはシミュレーションによる対称1次および対称2次振動の応答を○および△で示している。解析解とシミュレーション解は一致していることが確認できる。減衰力の影響は、対称1次振動の振幅の小さい領域で生ずる1/2分数調波共振の応答において現れ、振幅がわずかに小さくなっている。また、対称1次振動の主調波応答および対称2次振動の応答では減衰力の影響は全く見られない。文献1)の1自由度系の解析において、変動軸力が作用する場合のケーブルには減衰力の効果が期待できないことが明らかにされているが、ここでも同じことが言える。

(3) 逆対称1次振動の影響

Fig.14は、サグ比  $\gamma = 0.02$ 、縦波-横波伝播速度比  $k = 30$  および減衰定数  $h_1, h_2 = 0.005$  の偏平ケーブルに周期的変動軸力 ( $\bar{H}_t = 0.3$ ) のみが作用する場合の対称1次および逆対称1次振動の応答曲線を示す。対称1次固有円振動数の2倍 ( $2\omega_1$ ) および固有円振動数 ( $\omega_1$ ) 付近にそれぞれ対称1次振動による単純共振の主不安定領域  $A_{1/2}$  および副不安定領域  $A_1$  が、逆対称1次固有円振動数の2倍 ( $2\omega_2$ ) および固有円振動数 ( $\omega_2$ ) 付近に逆対称1次振動による単純共振の主不安定領域  $\bar{A}_{1/2}$  および副不安定領域  $\bar{A}_1$  がそれぞれ

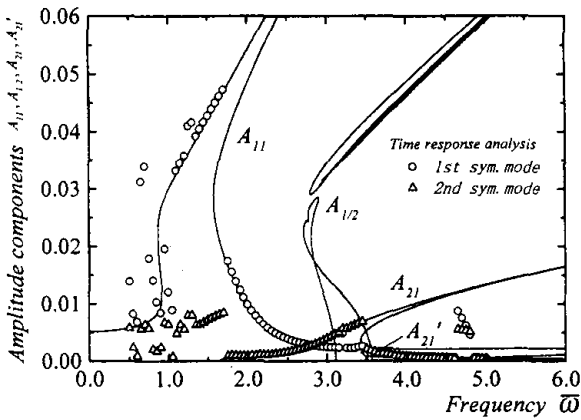


Fig.12 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k=30, \omega_1=1.68, \omega_2=3.04, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_l=0.6, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

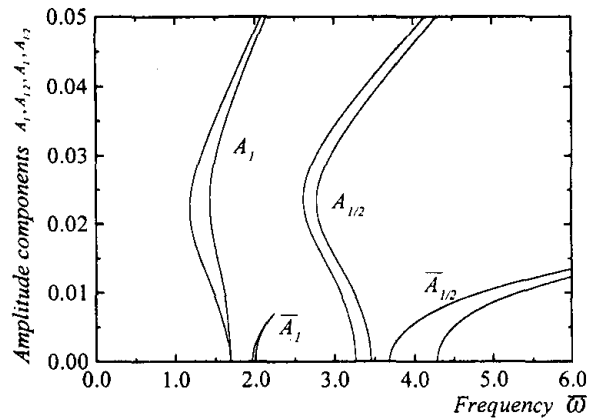


Fig.14 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 1st anti-symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k=30, \omega_1=1.68, \omega_2=2.0, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_l=0.3, \bar{p}_0=0.0$  and  $\phi=0$ .

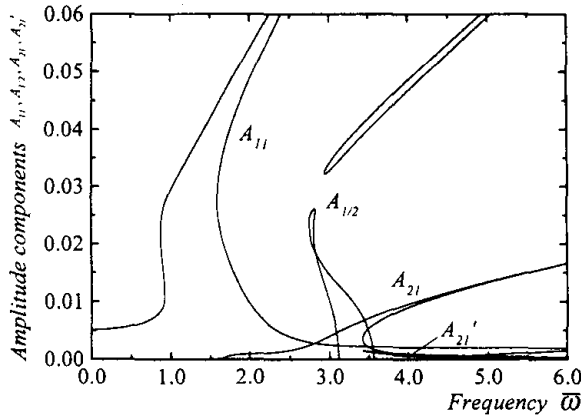


Fig.13 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 2nd symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k=30, \omega_1=1.68, \omega_2=3.04, h_1, h_2=0.01, \bar{H}_l=0.6, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

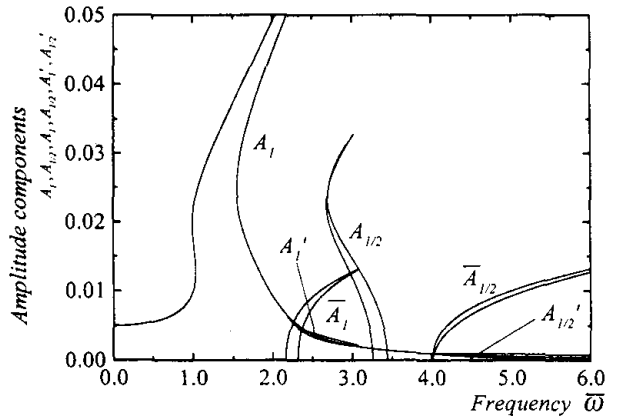


Fig.15 Frequency response curves of the 1st symmetric and the 1st anti-symmetric mode :  $\gamma = 0.02, k=30, \omega_1=1.68, \omega_2=2.0, h_1, h_2=0.005, \bar{H}_l=0.1, \bar{p}_0=0.1$  and  $\phi=0$ .

れ分岐応答の形で発生する。サグ比  $\gamma=0.02$  の場合、対称分岐応答は軟化バネ特性を示すが、逆対称分岐応答では軟化バネ特性は現れない。また、逆対称分岐応答は対称分岐応答に比べ振幅が小さい。しかし、逆対称分岐応答の主不安定領域については他の不安定領域に比べると発生領域が広いことが確認できる。

Fig.15は、Fig.14で用いた偏平ケーブルに周期的変動軸力 ( $\bar{H}_l=0.1$ ) と面内変動荷重 ( $\bar{p}_0=0.1, \phi=0$ ) が同時に作用する場合の対称1次および逆対称1次振動の応答曲線を示す。この場合も、逆対称振動は特定の振動数領域で現れる分岐型の応答として発生し、対称振動の外力と逆位相の応答から分岐した形で現れる。しかし、対称振動に比べると応答振幅は小さい。

サグ比  $\gamma=0.02$  の場合、逆対称分岐応答は対称1次振動の1/2分数調波共振と発生領域がずれるために、両者の連成効果による応答振幅の変化は特に見られない。また、逆対称分岐応答が発生する場合の対称振動の主調波応答を  $A_1', A_{1/2}'$  で示す。この場合、 $A_1'$  および  $A_{1/2}'$  の応答振幅は逆対称分岐応答の振幅に比べると小さいが、対称1次固有円振動数と逆対称1次固有円振動数がサグ比の値によって逆転する可能性があり (Fig.2 参照)、逆対称分岐応答が対称振動の主共振領域よりも左側もしくは同一の振動数領域から発生する場合において  $A_1'$  および  $A_{1/2}'$  が大きな応答振幅を示すことも考えられる。

## 5. まとめ

本研究で得られた結果をまとめると以下のとおりである。

1. 対称2次振動は対称1次振動とともに生じ、あらゆる振動数領域に応答が現れる。また、対称1次振動に比べ応答振幅は小さい。
2. サグ比 $\gamma=0.01$ および $0.02$ の偏平ケーブル（縦波—横波伝播速度比 $k=30$ ）の場合、対称1次振動の分岐応答は対称2次振動の影響をほとんど受けない。しかし、 $\gamma=0.03$ の場合、対称2次振動が1次固有円振動数の2倍よりも低い振動数から発生することにより、振幅の小さい対称2次振動の影響を受けて複雑な応答を示す。
3. 周期的変動軸力の振幅および荷重強度の影響は、対称1次振動の主調波応答および $1/2$ 分数調波共振の応答でのみ現れ、対称2次振動の応答では、これらの影響は現れない。
4. 対称2次振動の応答に減衰力の影響は現れない。

5. ケーブルに周期的変動軸力と面内変動荷重が同時に作用する場合、逆対称振動は特定の振動数領域で現れる分岐型の応答として発生し、対称1次振動の外力と逆位相の応答から分岐した形で現れる。しかし、対称振動に比べると応答振幅は小さい。

6. サグ比 $\gamma=0.02$ 、縦波—横波伝播速度比 $k=30$ の偏平ケーブルの場合、対称1次振動の $1/2$ 分数調波共振の応答に逆対称1次分岐応答の影響は現れない。

なお、計算には長崎大学総合情報処理センターのFACOM V-1200を使用したことを付記する。

## 参考文献

- 1) 高橋和雄・鎌田智之・花田博史：係数励振力と周期的変動荷重を受ける偏平ケーブルの非線形振動，土木学会論文集，No.549/ I-37，pp.115~124，1996.10.